Síntesis
artículos basados en tesinas de grado
Nº 4 / 2013
ISSN 1851-8060

Secretaría de Investigación, Ciencia y Tecnica
Secretaría Académica
ffyh Facultad de Filosofía y Humanidades UNC

LA NOCIÓN DEL CONTINUO MATEMÁTICO DE HERMANN WEYL CONCILIANDO FORMALISMO E INTUICIONISMO

Estela Cherubini
estelacherubini@hotmail.com

Licenciatura en Filosofía
Directora de TFL: Mgter. Sandra Visokolskis
Co-directora: Dra. Patricia Brunsteins

Resumen
El tema de investigación en este trabajo gira en torno a la conciliación del formalismo con el intuicionismo que Hermann Weyl promueve, en su noción del "continuo matemático".
El propósito es mostrar, cómo desde la figura de Weyl se puede observar un cambio en la concepción de la matemática desde una visión constituida por objetos independientes hasta otra donde los objetos formales se relacionan con el sujeto intuitivo
Palabras clave: continuo matemático - Hermann Weyl – formalismo - intuicionismo

INTRODUCCION

> Un científico que escriba sobre filosofía encara conflictos de conciencia de los cuales pocas veces logrará liberarse sano y salvo; el horizonte y profundidad abierto de los pensamientos filosóficos no se reconcilian fácilmente con la claridad y determinación objetiva para las que ha sido entrenado en la escuela de la ciencia
>
> Hermann Weyl (1885-1955)

La matemática, en tanto disciplina científica, si bien parece tener determinación objetiva, no deja de producir nuevos pensamientos y nuevas formas, cambia en el tiempo y esto hace que tenga una historia. Una forma de encarar la historia de la matemática es escribiendo una filosofía de la historia de los problemas que plantea y sus intentos de soluciones. La imagen de la matemática europea continental que hoy quiero resaltar sufre una serie de cambios que surgen principalmente a comienzos del siglo XX.

El tema que investigo en este trabajo gira en torno a la conciliación del formalismo con el intuicionismo que Hermann Weyl promueve, en su noción del "continuo matemático".

Mi propósito es mostrar, cómo desde la figura de Weyl se puede observar un cambio en la concepción de la matemática desde una visión constituida por objetos independientes hasta otra donde los objetos formales se relacionan con el sujeto intuitivo. De este modo, formalismo e intuición, no son concebidos como dos mundos separados sino interactuando a través de la construcción simbólica.

Hago una reconstrucción histórica que no es exhaustiva, porque cada uno de los elementos requeriría un análisis más específico, pero la intención no es esa, sino dar una visión integral de todos estos elementos en cuestión concebidos desde una historia de la ciencia. Hay muchos temas involucrados en el trabajo matemático de Hermann Weyl, que enriquecen al análisis, al álgebra, a la teoría de números, a la topología, a la geometría diferencial, a la teoría del espacio-tiempo, a la mecánica cuántica, que ameritan más estudio; pero en este trabajo el recorte que he elegido se centra sólo en el estudio que hace Weyl sobre los fundamentos de la matemática, y en especial en la noción del continuo matemático, y su impronta en la conciliación del formalismo y el intuicionismo. En este recorte, ocupan un lugar de importancia los debates sobre los fundamentos de la matemática acaecidos en los albores del siglo XX, y el desarrollo de la noción del continuo, en el trabajo conjunto de matemáticos y filósofos, a través de los siglos; ambos aspectos logran configurar la postulación de la noción del continuo matemático de Weyl, como propuesta conciliadora entre el formalismo y el intuicionismo.

Hermann Weyl (1885-1955) en 1904 ingresa a la Universidad de Gotinga, como estudiante de matemática; en esta institución es discípulo de los profesores David Hilbert (1862-1943), Felix Klein (1849-1925) y Hermann Minkowski (1864-1909). Queda particularmente impresionado con las conferencias de Hilbert sobre la teoría de números, y decide estudiar sus escritos. Después de su "habilitación" (cualificación para ser maestro en una universidad alemana) en 1910, llega a ser *Privatdozent* y es autorizado a dar conferencias en la Universidad de Gotinga. En 1913, acepta una cátedra en el *Eidgenössische Technische Hochschule*: ETH (Instituto Federal Suizo de Tecnología) en Zurich. Los años en Zurich para Weyl resultan extraordinariamente productivos y surgen algunos de sus mejores trabajos, especialmente en los fundamentos de la matemática y de la física. Cuando llega a Zurich a finales de 1913, Albert Einstein (1879-1955) y Marcel Grossmann (1878-1936) se encuentran luchando para superar una dificultad en sus esfuerzos para proporcionar una formulación matemática coherente a la teoría general de la relatividad. Weyl aprecia la importancia de una relación cercana entre matemática y física, y es por esta razón que Weyl llega a interesarse en la teoría de Einstein y en los posibles retos matemáticos que esto ofrece.

Tras el estallido de la Primera Guerra Mundial (1914), Weyl es llamado al servicio militar, en mayo de 1915, pero su carrera académica es interrumpida por poco tiempo, ya que en 1916 es eximido de las obligaciones militares por razones de salud. Mientras tanto, Einstein acepta una oferta de Berlín y deja Zurich en 1914. La partida de Einstein debilita el programa de física teórica en ETH y la administración espera que la presencia de Weyl alivie la situación.

En 1920 Weyl diagnostica una nueva crisis en los fundamentos de la matemática, desencadenada por la publicación de L.E.J. Brouwer (1881-1966) "*Foundation of Set Theory Independent of the Principle of Excluded Middle*" (Fundamentos de la teoría de conjuntos independiente del principio del tercero excluido). En una serie de lecturas en el coloquio matemático de Zurich, aclama la teoría de Brouwer y su interpretación del continuo como la revolución, considerando a Brouwer como un matemático que finalmente resuelve el problema del continuo, que tanto había desafiado a las más grandes mentes. De esta manera, Weyl abraza el intuicionismo matemático de Brouwer, y en la década de 1920 publica una serie de artículos sobre la elaboración y defensa de un punto de vista intuicionista en los fundamentos de la matemática. Esta visión sostiene que la matemática es una libre creación mental, desarrollada a partir de la intuición primordial del tiempo, e independiente de la experiencia. Otros matemáticos de la misma época, adhieren a la concepción de David Hilbert (1862-1943), quien explica su metamatemática a partir de sistemas formales justificados en términos de manipulación de símbolos a través de leyes de la lógica.

Weyl, aunque aparentemente impresionado por la construcción del "continuo" de Brouwer, termina colocándose en una posición intermedia entre la axiomática hilbertiana y el intuicionismo brouweriano.

La intención de este trabajo es presentar las ideas subyacentes a la crisis de los fundamentos de la matemática que propone Hermann Weyl, focalizando las reflexiones en torno a la noción del "continuo", desde un punto de vista histórico hasta la perspectiva de Weyl, y mostrar que este examen contribuye a la investigación de las relaciones entre lo "formal" y lo que es inmediatamente dado, lo "intuitivo". Es la brecha entre lo "formal" y lo "intuitivo", la que Hermann Weyl intenta cubrir al sostener que hay una constante interconexión tanto entre los conceptos matemáticos y sus construcciones, como entre la intuición de las ideas del sujeto y la realidad.

Para Weyl la matemática pura y la realidad forman un todo teórico inseparable, esto es, no hay dos reinos, uno respaldado por los datos y otro por la razón, sino que tanto uno como el otro están indirectamente respaldados por los datos observacionales, pero todos contienen elementos racionales de apoyo.

La hipótesis que propongo defender es que para Weyl, la llave que permite hacer la interconexión entre lo formal matemático y la intuición del sujeto de la realidad, es la noción de construcción simbólica. A través de ésta, el filósofo-matemático logra vincular al sujeto con la matemática, estableciendo una conexión más cercana con la experiencia subjetiva, a través del uso de símbolos como signos intencionados que conducen sentidos provenientes del entorno. Esto es, los símbolos mismos son signos de la intención de transmitir el sentido, y no tienen existencia independiente más allá de la que surge de la captabilidad de una conciencia. De esta manera, Weyl logra una conciliación entre el formalismo y el intuicionismo.

Weyl se opone a la idea de una explicación del concepto del continuo sólo en términos formales, sino que considera también el aporte de la intuición. Esta es la idea clave de la propuesta de Weyl, al colocar a la construcción simbólica como puente entre lo formal y la intuición.

El objetivo general de esta tesis es elucidar y caracterizar el modo que Hermann Weyl llega a postular una idea conciliadora entre el formalismo y el intuicionismo, instanciada en la noción del continuo, a través de la contextualización de los debates sobre los

Síntesis
artículos basados en tesinas de grado
Nº 4 / 2013
ISSN 1851-8060
Secretaría de Investigación, Ciencia y Tecnica
Secretaría Académica
ffyh Facultad de Filosofía y Humanidades UNC

fundamentos de la matemática de su época y la presentación del trabajo conjunto de matemáticos y filósofos en el curso de la historia, de dicha noción, que contribuyen a la perspectiva de considerar a la construcción simbólica como medio para allanar la relación de lo formal de la matemática con la intuición de la realidad.

Y como objetivos específicos, propongo, en primer lugar, la presentación de la crisis de los fundamentos de la matemática; en segundo lugar, un rastreo histórico, no exhaustivo, del trabajo conjunto de matemáticos y filósofos, de la noción del "continuo"; y en tercer lugar, la descripción de la propuesta integradora de Weyl, instanciada en la noción del continuo.

El aporte que vislumbro en torno a la figura de Hermann Weyl consiste en la impronta que éste deja en las discusiones de su época, tanto en lo referente a las especulaciones sobre matemática y su conexión con la experiencia, como en su esfuerzo por recuperar al sujeto como elemento activo en los procesos de construcción simbólica y de cognición matemática. Es esta propuesta inclusiva de Weyl, de dos vertientes aparentemente desconexas en otros autores de su época, lo que hace valioso el aporte de su perspectiva integradora.

1. LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

A partir de 1874, Georg Cantor (1845-1918) inicia la formulación de la teoría de conjuntos. Su punto de partida son las colecciones de objetos; y rápidamente, aunque no sin resistencias, dicha teoría se convierte en el candidato ideal para ser usado como fundamento de la matemática. (Cfr. Sabaté, F. 2007). Con el decidido apoyo de Richard Dedekind (1831-1916) y Karl Weierstrass (1815-1897) y el firme rechazo por parte de Leopold Kronecker (1823-1891), Cantor sigue con la publicación de sus artículos en el *Journal de Crelle* y en *Mathematische Annalen,* hasta que, finalmente, entre 1895 y 1897, publica su tratado en dos volúmenes de teoría de conjuntos, en el que sistematiza estas ideas. Cantor sostiene que la matemática es muy libre y que las únicas condiciones para un nuevo concepto matemático son la no contradicción y su definición en función de los conceptos previamente aceptados.

No tardan en surgir las paradojas sobre la teoría de conjuntos, y resulta indispensable establecer una teoría libre de contradicciones. Todo acaba en una terrible decepción y los matemáticos terminan dudando del fundamento último en el que se apoyan.

Durante los primeros años del siglo XX, coexisten diferentes visiones de la matemática que implican distintos métodos lógicos. Se trata de fundamentar a la matemática como unidad. La fundamentación como una visión totalizante que intenta racionalizar y justificar una praxis de hacer global.

La búsqueda de la consistencia se convierte en el objetivo para todos, ya que no se puede construir un sistema de conceptos fundamentales que terminen en contradicciones. Por un lado, la teoría de conjuntos, establece los fundamentos, esto es, los conceptos primitivos sobre los que se debe desarrollar la totalidad de la matemática;

por otro lado, la lógica matemática, garantiza la validez del método deductivo. Desde aquí, aparecen diferentes posiciones, que pueden agruparse, en al menos, tres tendencias: logicismo, formalismo, e intuicionismo.

1.1. El logicismo

El logicismo se debe casi totalmente a Gottlob Frege (1848-1925) y a Bertrand Russell (1872-1970). En relación al primero, su publicación en 1879 titulada *Begriffsschrift* (Conceptografía) da un avance importante a la lógica. Frege en esta obra desarrolla un lenguaje universal, esto es, la lógica simbólica, con la idea de eliminar toda posibilidad de malentendido del lenguaje natural. Su intención consiste en basar toda la matemática en la pura lógica. El programa de Frege usa la teoría de conjuntos como uno de sus principales recursos para reducir la matemática a la lógica. En 1893 publica el primer volumen de *Die Grundgesetze de Arithmetik* (Las leyes básicas de la aritmética) con la intención de continuar con otros dos volúmenes, pero se interrumpe en 1902, cuando ya impreso el segundo volumen, recibe una carta de Russell en la que expone que sus axiomas eran inconsistentes, dando lugar a la desde entonces llamada "paradoja de Russell". Frege incluye en un apéndice la modificación de sus axiomas, lo que lo lleva a invalidar muchas de las demostraciones del primer volumen y reconocer que no hay nada más indeseable para un científico que ver rechazados sus principios cuando tiene su obra finalizada.

El programa logicista, llamado así por querer considerar a toda la matemática reducible a la lógica, lo sigue Bertrand Russell, quien, conjuntamente con Alfred North Whitehead (1861-1947), publican *Principia Mathematica* en tres volúmenes en 1910, 1912, 1913. Los objetos matemáticos son objetos puramente lógicos y los principios matemáticos son leyes lógicas o derivados de leyes lógicas.

1.2. El formalismo

El formalismo se desarrolla bajo la dirección de David Hilbert (1862-1943) desde su intervención en el Congreso Internacional de París de 1900, cuando plantea los 23 problemas no resueltos que, según su pensar, constituirían el gran desafío para los matemáticos del siglo XX. En esta serie aparece en primer lugar planteado el problema ¿cuál es el cardinal del continuo?.

David Hilbert (1862-1943) es uno de los más importantes matemáticos de su generación. En los inicios del siglo XX, Hilbert empieza a preocuparse por el problema de la consistencia de los axiomas y de sus demostraciones. Entre las convicciones de Hilbert puedo citar la que se refiere a que todo problema matemático, una vez definido ha de tener su solución basada en la pura razón, como lo expresa: "En la matemática no existe el *ignorabimus*" (Cfr. Giaquinto, M. 1983: 125). Ya en su publicación *Grundlagen der Geometrie*, establece los axiomas desde los cuales puede desarrollarse toda la geometría, tanto euclídea como la no euclídea, mediante pura deducción. La combinación del ideal axiomático con la convicción de que todo problema debe tener solución, conduce en los años siguientes a la idea de completitud del sistema axiomático.

Un paso en la dirección sugerida por Hilbert, lo hace Ernst Zermelo (1871-1953) en 1908, quien publica la primera axiomatización de la teoría de conjuntos, pero no consigue demostrar su consistencia.

Tradicionalmente había dos centros para matemáticos en Alemania: Berlín y Gotinga. En el siglo XIX Berlín es la más prestigiosa, pero cuando Felix Klein (1849-1925) se traslada a Gotinga y pone las bases para la matemática pura y aplicada, es aquí donde se asienta el tono para la nueva matemática. En esta Universidad, Hermann Mincowski (1864-1909) y David Hilbert (1862-1943) se posicionan en la meca de la matemática europea. (Cfr. Van Dalen, D. 2005: 441).

Hilbert trata los fundamentos de la matemática en una serie de artículos en los años: 1899, 1904, 1917,1922, 1925,1927, 1928, 1930, 1931. Para Hilbert la teoría es un esquema de conceptos que puede ser llenado de material por parte de la interpretación del sujeto. A pesar de la fascinación inicial de Hilbert por los *Principia Mathematica,* se posiciona posteriormente en la idea del desarrollo simultáneo de la lógica y de la matemática.

Se debe reservar algún lugar a la idea que las proposiciones establecidas están justificadas, al menos en parte, por referencia a algo que está más allá de las proposiciones mismas, por referencia, de hecho, a la experiencia.

El compromiso más importante de Hilbert en los fundamentos de la matemática tiene lugar en 1920. A través de la ayuda de su asistente Paul Bernays (1888-1977), quien se une a Hilbert en 1917 y trabaja con él toda la década de 1920 a 1930, es cuando Hilbert desarrolla el programa acerca de los fundamentos de la matemática. Hilbert y Bernays rechazan el revisionismo de la matemática defendido por Brouwer y Weyl y apuntan hacia fundamentos que garantizan la formalidad de la matemática sin sacar ninguna parte de la matemática clásica.

Las objeciones de Hilbert hacia Brouwer y Weyl reflejan bastante claro el desarrollo histórico de los fundamentos de la matemática en los años alrededor de 1920. En el artículo de 1922, que aparece un año después de la conversión al intuicionismo de Weyl, es cuando Hilbert ataca a Weyl y a Brouwer juntos. No distingue las posiciones de ambos, sin embargo, Weyl pronto toma distancia del intuicionismo, y entonces sobre Brouwer cae el principal objetivo de ataque de Hilbert.

Hilbert reconoce la necesidad de una fundamentación segura de la matemática, pero desacuerda con Brouwer y Weyl cuando ellos demandan que la intuición es la única garantía en matemática. El plan de Hilbert es mostrar la admisibilidad de toda la matemática con el establecimiento de sistemas axiomáticos para las distintas ramas.

Para Hilbert, el nuevo significado de la matemática, a la cual designa como matemática apropiada, es una teoría general de formalismos o teoría general de formas. Hilbert habla de matemática apropiada como un repertorio de fórmulas probables. Esta matemática apropiada se mueve en un nivel metamatemático y en un particular punto de vista finitista. Este punto de vista finitista es la condición restrictiva, en el sentido tal que la matemática es rigurosa, si solamente un número finito de inferencias es admisible en una prueba.

Hilbert sostiene que el infinito para la matemática no ha sido aún clarificado. Reconoce que el infinito en el sentido de totalidad infinita es alguna cosa meramente aparente. El infinito potencial puede darse, en principio, por adición y por división. Así, el infinito potencial se encuentra, por ejemplo, en magnitudes continuas que, como la línea, pueden fragmentarse tanto como se quiera sin que se llegue jamás a partes simples. Estas partes no existen, pues si existieran constituirían un infinito actual.

Pero, antes que el programa de Hilbert se pusiera en marcha, Kurt Gödel (1906-1978) se las arregla para poner un obstáculo insalvable y el programa se viene abajo. (Cfr. Stewart, I. 2004:258). En 1931 Gödel publica un trabajo que plantea un escollo insalvable al programa de Hilbert para demostrar la coherencia de la aritmética. Esta publicación echa por la borda asimismo otra de las creencias favoritas de Hilbert, que en principio, todo problema puede ser resuelto. Debemos saber, llegaremos a saber, proclamaba Hilbert. Pero Gödel demuestra que existen otros aspectos más allá de lo que pudiera soñar Hilbert en su filosofía.

1.3. **El intuicionismo**

El matemático Leopold Kronecker (1823-1891) expresa: "Dios creó los naturales, todo lo demás es construcción humana" (Cfr. Sabaté, F. 2007). Para Kronecker, los números enteros positivos son entidades que existen, pero los racionales, los irracionales, los imaginarios, los trascendentes, etc., son símbolos. Pocos matemáticos de su tiempo siguen las ideas de Kronecker; sin embargo, su perspectiva pasa a una nueva escuela matemática: el intuicionismo, que afirma que no existen objetos matemáticos si no existen procedimientos para su construcción.

La aparición de esta nueva escuela matemática tiene sus raíces en algunas controversias que se suscitaron a comienzos del siglo XX, tales como la aceptación que la matemática sea una extensión de la lógica, y que la consistencia sea un requisito suficiente de la existencia de objetos matemáticos. Estas ideas son revisadas y debatidas por Henri Poincaré (1854-1912) quien se opone a la visión russelliana de la matemática como extensión de la lógica. Según Poincaré, en la aplicación del principio de inducción completa, la intuición de la sucesión completa de los números naturales, es la que permite pasar de una proposición particular a una general. Según Poincaré, esta aplicación está vedada para la lógica. Esta intuición es una pura comprensión mental de algún principio o relación fundamental, y sin ella, la matemática es imposible. Otro aspecto importante que defiende Poincaré, es la negación de la existencia del infinito actual.

En general hasta Kant se considera al sujeto como pasivo en el acto del conocimiento y éste se tiene que plegar al objeto para conocerlo; ahora el sujeto es activo, son las cosas las que se deben someter al sujeto de cara al conocimiento. El sujeto no deja intacta la realidad conocida, sino que la constituye en el propio acto del conocimiento. Bajo esta perspectiva aparecen las nuevas ideas de Luitzen Brouwer.

ISSN 1851-8060

1.4. **El intuicionismo de L.E.J. Brouwer**

El matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) es una figura central en la historia de la matemática contemporánea y la filosofía. En su tesis doctoral Sobre los fundamentos de la matemática en 1907, defendida en la Universidad de Amsterdam, sin usar todavía la palabra "intuicionismo" sostiene: "No puede existir matemática, si no ha sido construida intuitivamente". (Cfr. Sabaté, F. 2007). Brouwer defiende que la matemática es una libre creación mental, desarrollada a partir de una intuición primordial (la del tiempo) e independiente de la experiencia. Los objetos matemáticos no pueden existir si no pueden ser construidos, un cierto idealismo respecto a las entidades matemáticas.

Brouwer reconoce una facultad definida en la mente individual y un acto directo de aprehensión: la intuición, como la necesaria fundamentación de todo conocimiento. (Cfr.Van Sitgt, W., en Mancosu, P.1998:4). Según Grattan-Guinness, los orígenes de la filosofía de Brouwer parten de un entendimiento pobre de ciertos textos místicos, y particularmente sobre una lectura ingenua de la perspectiva de Kant sobre el lugar de la intuición.

En la concepción de la matemática de Brouwer, como actividad mental, los números pasan a ser objetos matemáticos producidos por la mente humana. Es más, un objeto matemático, para los intuicionistas, existe si se lo puede construir. Este punto de vista psicológico les conduce a la conclusión de que algunas partes de la matemática clásica sobre todo las que hablan de totalidades completas e infinitas, son inaceptables y de esta restricción de la matemática se sigue una restricción de la lógica. Las entidades matemáticas no existen en sí mismas, sino que son construcciones del pensamiento, producidas por un acto de creación libre de la mente humana y el método axiomático no juega ningún rol en estas construcciones. Por el contrario, si no es posible mostrar que una entidad se ha construido o es construible mediante procesos intuitivos ya conocidos, entonces tal entidad no debe ser admitida por la matemática.

Para los intuicionistas la matemática es totalmente independiente de la lógica; la lógica es la que depende del pensamiento matemático intuitivo, y, por lo tanto, el principal objetivo de la lógica teórica es formalizar los procedimientos del pensamiento matemático.En general, para un intuicionista, probar un enunciado matemático es lo mismo que exhibir un método de construcción de la entidad de la cual habla el enunciado. El acto de abstracción que daría un número real como un punto sin duración no es algo que se pueda construir. No hay cortes entre los números reales, sino que siempre hay conexiones entre ellos, es una superposición de fases.

Para un intuicionista no es posible demostrar la existencia de una entidad por el absurdo, por cuanto éste presupone partir de la no existencia y tratar de llegar a una contradicción, para luego derivar por el absurdo la existencia. En realidad, si se piensa en términos de construcciones mentales, es plausible afirmar que para probar la existencia de una entidad, no es condición suficiente suponer que su no existencia lleva a una

Síntesis
artículos basados en tesinas de grado
Nº 4 / 2013
ISSN 1851-8060
Secretaría de Investigación, Ciencia y Tecnica
Secretaría Académica
ffyh Facultad de Filosofía y Humanidades UNC

contradicción. Por ende, la existencia de una entidad sólo puede probarse en forma directa, mediante su exhibición o forma de construcción. Por el contrario, para un intuicionista, sí es aceptable que por el absurdo se llegue a una prueba de no existencia, ya que resulta totalmente plausible que, si al tratar de construir mentalmente una entidad se llega a un absurdo, entonces su construcción no es posible y la entidad en cuestión no existe.

1.5. **Hacia una integración complementaria entre el formalismo y el intuicionismo: Hermann Weyl.**

La aproximación entre la tendencia formalista proclamada por David Hilbert y el intuicionismo liderado por Luitzen Brouwer, es esbozada por Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) en un artículo filosófico alrededor de 1920, en el cual Weyl apunta proveer con un sentido a todo el sistema matemático, esto es, la matemática como totalidad, incluyendo a la matemática transfinita, la cual es imposible entender intuitivamente y es llamada por Weyl: matemática teórica. Según Weyl esta parte trascendente de la matemática puede solamente ser representada por medio de símbolos.

Weyl sostiene que Hilbert y Brouwer, están cercanos, en la idea de construcción, ya que para Hilbert la construcción es axiomática, esto es, a través de manipulación simbólica con base intersubjetiva dada por la intuición, mientras que para Brouwer se trata de una construcción simbólica fundada en la intuición primordial del tiempo.

El entusiasmo inicial de Weyl por el intuicionismo parece más tarde disminuir; esto puede ser debido a una creencia cada vez más de su parte que los sacrificios exigidos por matemáticos a la adhesión a la doctrina intuicionista llegan a ser intolerables para la práctica de los matemáticos. El siguiente pasaje de *Philosophy of Mathematics, and Natural Science,* Weyl afirma:

> La matemática alcanza con Brouwer su mayor claridad intuitiva. Logra desarrollar los comienzos del análisis en forma natural conservando siempre íntimo contacto con la intuición en forma mucho mejor de la conseguida hasta entonces. Sin embargo, no puede negarse que al llegar a teorías más avanzadas y generales la inaplicabilidad de las simples leyes de la lógica resulta una torpeza casi insoportable. Y el matemático observa con dolor que el edificio que creía construido de bloque de concreto se esfuma ante sus ojos. (Weyl, H. [1949] 1965: 60. Traducción Ímaz, C.).

No obstante, es probable que Weyl siga convencido hasta el fin de sus días que el intuicionismo, se acerca más que otros métodos matemáticos para capturar la esencia de la continuidad.

Weyl sostiene que la intuición, en lugar de la prueba, proporciona el fundamento último del conocimiento matemático; no obstante, él reconoce que no sería razonable exigir a todos los conocimientos matemáticos, que posean la inmediatez intuitiva.

Weyl advierte desde el comienzo que si bien, lo intuitivo y lo formal matemático no coinciden, que un profundo abismo está fijo entre ellos; sin embargo, hay motivos racionales que impelen a cruzar de uno al otro en el esfuerzo para comprender el mundo. No rechaza la idea de Brouwer que la matemática gana claridad intuitiva pero él ve que algo más se necesita decir sobre las partes de la matemática que no se fundan en lo intuitivo. Las partes de la matemática que no se fundan en la intuición serían trascendentes. (Cfr. Tieszen, R. 2005:271).

Weyl apuntará a un intento de combinar la axiomatización hilbertiana con el intuicionismo brouweriano. Es por esto, que considero a Weyl un intermediario entre el formalismo y el intuicionismo. Weyl abre la posibilidad de la construcción simbólica como síntesis entre lo dado en la intuición y lo formal matemático para la postulación de un mundo externo, indicando la inevitable inseparabilidad de realidad y matemática. Según Weyl, el fundamento y el sentido último de la matemática sigue siendo un problema abierto, que no se sabe en qué dirección se encuentra la solución, ni siquiera si una respuesta final objetiva se puede esperar.

2. DESARROLLO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DEL CONTINUO: ANTECEDENTES CIENTÍFICOS Y FILOSÓFICOS

En el recorte que he elegido, además del problema de los fundamentos, ocupan un lugar de importancia las distintas concepciones matemáticas y filosóficas del continuo, desarrolladas a través de los siglos, que configuran la noción del continuo matemático propuesta por Weyl como ejemplo de instancia mediadora entre lo formal y la intuición.

2.1. Antecedentes científico-filosóficos de la noción del continuo

Desde todos los tiempos, la noción del continuo, estuvo y está ligada a lo infinito. En el curso de la historia, las cantidades infinitamente grandes y las cantidades infinitamente pequeñas juegan un papel importante en la comprensión aplicada del cálculo matemático.

A continuación hago un sucinto trayecto histórico del desarrollo de los infinitesimales y su impronta en la consideración de las distintas visiones del continuo matemático. Cabe aclarar que esta construcción no es exhaustiva, porque cada instancia requeriría un estudio más específico, pero mi intención es dar una visión integral de todos estos elementos, destacando los aspectos de los infinitesimales que conciernen a la noción del continuo.

2.2. El continuo y el infinito

En matemática y en física, lo continuo suele estar asociado a lo infinito cuando se hace referencia a la divisibilidad y a la aditividad. En el caso de la divisibilidad, el continuo está vinculado a la misma cuando se consideran procesos de descomposición en partes cada vez más pequeñas; y en el de la aditividad, cuando se consideran procesos de agregación de partes, y se hace cada vez más grande. Y así se obtienen las nociones de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, respectivamente.

En el caso del continuo, el proceso de dividir en pequeñas partes, o de agregar partes, nunca termina. El continuo, de este modo, es divisible sin límite (infinitamente), o es infinitamente grande.

Lo opuesto a continuo es lo discreto, que por lo general está asociado con lo finito, pero también con lo infinito numerable. La tensión entre lo finito y lo infinito para el conocimiento de la realidad está presente en la historia de la humanidad. Esta tensión ya es motivo de conocimiento entre los antiguos griegos. Anaximandro (610-546 a.C.) postula la existencia de una "materia prima", una materia que da origen a todo lo existente, que denomina ápeiron (sin límite), una forma primordial de materia, infinita e infinitamente divisible que es el origen de todas las cosas finitas. Un principio originario, indestructible, in-engendrado e imperecedero. Para Anaximandro lo que es principio de determinación de toda realidad ha de ser indeterminado.

Anaxágoras (500-428 a.C) es el primero en dar una versión del concepto de infinito. Anaxágoras reclama que el continuo no puede ser compuesto de elementos discretos "separados uno del otro como si se cortaran con un hacha". El espacio no sólo es infinito en el sentido que no alcanza y termina en cualquier lado, sino que en cada lugar, es interiormente infinito. A través de un proceso de división *ad infinitum* es así como un punto puede ser determinado, paso a paso, más y más precisamente; es la perspectiva de una existencia de espacio como dado por la intuición. Esto es en contraste a lo finito. El significado matemático de Anaxágoras del principio infinitesimal llega a ser evidente en su solución de la "cuadratura del círculo", es decir, en su prueba que el área de un círculo es proporcional al cuadrado del radio. (Cf: Mancosu, P. 1998:124).

Sublevándose contra Anaxágoras está la teoría estricta atomista de Demócrito (460-370 a.C). Las discusiones acerca del proceso de divisiones infinitas, en el sentido si se llega o no a puntos extensionales o a nada en absoluto, generan la idea que la materia no es infinitamente divisible, sino que se llega a una partícula discreta incapaz de ser dividida en infinitas partes.

La doctrina del atomismo, la cual parece haber surgido como un intento de escapar del dilema de los eleáticos, es ante todo, una teoría física. Fundada por Leucipo (460-370 a.C.) y Demócrito (460-370 a.C.), sostiene que la materia no es divisible sin límites, sino compuesta de indivisibles, sólidos homogéneos, corpúsculos extendidos espacialmente, todo por debajo del nivel de visibilidad.

Con Anaxágoras y Demócrito presento las dos tendencias originales de considerar el continuo como divisibilidad infinita. En el primer caso, la divisibilidad nunca termina; en el segundo caso, la divisibilidad termina en un último elemento "indivisible". Más tarde, los pensadores que siguen la línea de los primeros se llaman "infinitistas" y los seguidores del segundo enfoque se conocen como "finitistas".

2.3. Los infinitesimales como indivisibles

William de Ockham (1280-1349) señala que la principal dificultad presentada por el continuo es la infinita divisibilidad del espacio. En su libro *Quodlibet* de 1322-27, enuncia el tratamiento de la continuidad sobre la idea que entre dos puntos cualesquiera sobre una recta hay un tercero, quizás la primera formulación explícita de la propiedad de densidad, que lleva a la idea de infinito "actual". Declara que "ninguna parte de una línea es indivisible". Tiene la intuición, sorprendente en su pre-ciencia, que una línea punteada se convierte en posibilidad de ser continua, cuando es concebida como un conjunto denso de puntos, en lugar de un conjunto de puntos en sucesión contigua.

La visión del continuo de Nicolás de Cusa (1401-1464), un campeón del infinito actual, es de considerable interés. En su *De Mente Idiotae* de 1450, sostiene que cualquier continuo, sea éste de percepción geométrica, o física, es divisible en dos sentidos, uno ideal y el otro real. La división ideal "progresa hasta el infinito", mientras que la real termina en átomos después de muchos finitos pasos. La concepción realista de Nicolás de Cusa del infinito real se refleja en su cuadratura del círculo. Define al círculo como un polígono de infinitos lados que poseen un largo infinitesimal, y deduce el área del círculo: se descompone el círculo en infinitos triángulos de base infinitesimal y altura igual al radio; ya que el área de cada triángulo es base por altura dividido 2, el área del círculo es entonces la circunferencia (o sea la suma de las bases de los triángulos) por el radio dividido 2. La idea de considerar una curva como un polígono infinilateral se emplea por un número de pensadores más tarde, tal el caso de Kepler, Galileo y Leibniz.

Los infinitesimales son descriptos como cantidades pequeñísimas del proceso de sucesivas divisiones, que por un lado, en la línea de Anaxágoras, nunca termina; el proceso de división es sin límites y pueden ser despreciados en los cálculos prácticos; y, por otro lado, en la línea de Demócrito, el proceso de división termina en partes últimas, los átomos, que más tarde en la edad media toman la forma de indivisibles.

Para la corriente que considera, al continuo como divisible infinitamente, es imposible reconocer una unidad más allá de la posibilidad de una pluralidad potencialmente infinita. Para la corriente que sostiene al continuo como no infinitamente divisible, se llega a una partícula discreta incapaz de ser dividida en infinitas partes, el átomo o unidad.

En la lucha contra la divisibilidad infinita, los atomistas van montando una afirmación del continuo, como reducible al final a lo discreto.

René Descartes (1596-1650) emplea técnicas infinitesimales, incluyendo el método de los indivisibles de Cavalieri en su trabajo matemático. Sin embargo, Descartes evita el uso de los infinitesimales en la determinación de tangentes a las curvas; en su lugar desarrolla métodos puramente algebraicos.

El concepto de infinitesimal surge de problemas de carácter geométrico, pero desde el álgebra y la geometría de los siglos XVI y XVII se transforma en el número infinitesimal. La idea aparece en el trabajo de Pierre de Fermat (1601-1665) en la determinación de valores máximos y mínimos, publicado en 1638. Este tratamiento contiene el germen de la técnica fértil de "variación infinitesimal", es decir, la investigación del comportamiento de una función cuando sus variables tienen cambios pequeños. Fermat aplica este método para determinar tangentes a curvas y centros de gravedad.

La geometría analítica de Fermat y de Descartes, cambia el curso del análisis infinitesimal, y comienza el proceso de aritmetización.

Tradicionalmente, la geometría fue considerada en la Grecia antigua como la rama de la matemática relacionada con el continuo, y la aritmética con lo discreto. El cálculo infinitesimal que toma forma en los siglos XVI y XVII, tiene como principal tema la variación continua, como una especie de síntesis de continuo y discreto.

2.4. Cálculo infinitesimal

Isaac Barrow (1630-1677) es uno de los primeros matemáticos en comprender la relación recíproca entre el problema de la cuadratura y el encuentro de tangentes a curvas (en lenguaje moderno, entre integración y diferenciación). Barrow presenta una serie de argumentos en contra del atomismo en matemática, y concibe a las magnitudes continuas como generadas por movimientos, y así necesariamente dependientes del tiempo, una visión que parece influir sobre el pensamiento de su alumno Isaac Newton (1642-1727).

Durante los años de plaga (1665-1666) Newton considera el cálculo de fluxiones, donde introduce la notación para el incremento momentáneo, destinado a representar un momento o un instante de tiempo. Este momento tiene las características de las cantidades infinitesimales introducidas por Fermat y por Barrow.

Newton propone fundamentar su cálculo sobre bases geométricas sólidas, por lo que hace hincapié en la concepción cinemática de las curvas. Describe las nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a fluxiones, abandonando así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio de una ampliación del concepto de fluxión que requiere la comparación de velocidades instantáneas en la razón última de los pequeños crecimientos.

Newton define la fluxión como la razón última de incrementos evanescentes, a lo cual Berkeley responde: "¿Y qué son esos incrementos evanescentes? Ni son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera nada. ¿No la podríamos llamar fantasmas de cantidades difuntas?" (Cfr. Stewart, I. 2004: 84).

El filósofo y matemático G.W.F. Leibniz (1646-1716) también se preocupa por el problema de la composición del continuo, que llama "el laberinto del continuo" en su sistema filosófico: monadismo. Su razonamiento considera que si una línea se extiende, y la extensión es una forma de repetición, luego, una línea, siendo divisible en partes, no puede ser una (verdadera) unidad. Es entonces una multiplicidad, y en consecuencia una agregación de unidades. Pero ¿qué clase de unidades?, aparentemente, los candidatos para unidades geométricas son los puntos, pero los puntos no son más que las extremidades de lo extendido; en esto Leibniz se apoya en los argumentos que se remontan a Aristóteles, en los cuales ningún continuo puede estar constituido por puntos. Se deduce que un continuo no es ni una unidad ni una agregación de unidades. Leibniz concluye que el continuo no es una entidad real, sino que tiene un carácter puramente ideal. De esta manera libera al continuo del requisito de ser simple o compuesto de simples. Leibniz sostiene que espacio y tiempo, como continuos, son ideales, pero busca refugio en lo infinitesimal cuando expresa:

> Hay que especificar que dx y dy se toman de tal modo que sean infinitamente pequeñas. Es útil tomar cantidades infinitamente pequeñas tales que, cuando se busca su cociente, no puedan ser consideradas como cero, pero que se puedan desechar siempre que se encuentren con otras cantidades incomparablemente mayores. (Cfr. Stewart, I. 2004: 85).

Leibniz rechaza el atomismo material, y no da crédito a los infinitesimales, que los denomina cantidades inasignables, ni a la matemática infinita con extensión objetiva; puesto que considera al continuo como una entidad puramente ideal; entonces las cantidades infinitesimales son ideales, útiles ficciones introducidas para acortar argumentos.

Los infinitesimales, los diferenciales, las cantidades evanescentes, las cantidades inasignables, como herramientas, corren por las venas del cálculo durante el siglo XVIII, y hacen posible la derivación de la gran riqueza de resultados. La clave del nuevo análisis descubierto por Newton y Leibniz yace en la gran utilidad de las expansiones de series infinitas, aunque las sucesiones infinitas son manipuladas sin considerar su convergencia.

2.5. **Etapa de rigorización matemática**

El rápido desarrollo del análisis matemático del siglo XVIII no oculta el hecho de que sus conceptos subyacentes no sólo carecen de definiciones rigurosas sino que poseen carácter lógico dudoso. A comienzos del siglo XIX estos supuestos comienzan a ser cuestionados. Entre los primeros que abrieron el camino para la reformulación de la idea del "paso al límite" fueron Bernard Bolzano (1781-1848), Niels Henrik Abel (1802-1829), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918). Sus trabajos establecen las pautas, características y sentidos del análisis matemático y su enseñanza hasta la actualidad.

El trabajo del filósofo y matemático Bernard Bolzano (1781-1848) se considera pionero en el tema de clarificar el concepto de función continua. Bolzano es un gran investigador en matemática, lógica y filosofía pero tiene poca influencia en su círculo inmediato durante su vida. Después de capacitarse en filosofía, física y matemática en la Universidad de Praga, se une a la Facultad de Teología pero persigue a la matemática como su principal interés de investigación. Publica dos libros y tres folletos entre 1804 y 1817, de los cuales, el más importante es el de 1817, *Rein Analytischer Beweis* que contiene una nueva prueba rigurosa del teorema del valor intermedio escrito con formulaciones de la noción de límite, continuidad de funciones y convergencia de series infinitas, sorprendentemente similares a los encuentros, poco después en *Cours* de Cauchy (1821), siendo así con él un co-pionero del análisis matemático. (Cfr. Grattan-Guinness, I .2000: 72-73).

La piedra angular para el desarrollo riguroso del cálculo es suministrada por las ideas del gran matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Tanto en los trabajos de Cauchy como en los de Bolzano, juega un rol central la aritmética del concepto de límite liberado de toda geometría y de toda intuición temporal.

Cauchy elige caracterizar la continuidad de funciones en términos de una noción rigurosa de infinitesimal, la cual define en el *Cours d´analyse* como "una cantidad variable (cuyo valor) decrece indefinidamente en forma de converger al límite 0". (Cf. Bell, J. 2005). Esta es la definición de continuidad de Cauchy. Sus trabajos representan una etapa crucial en la renuncia por parte de los matemáticos, a los infinitesimales y a las ideas intuitivas de continuidad y de movimiento.

Por su parte, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) completa el destierro de la intuición espacio temporal y el infinitesimal, desde los fundamentos del análisis, para instalar el rigor lógico completo. Weierstrass propone establecer el análisis matemático sobre las bases de números solamente, para aritmetizar. La aritmetización puede ser vista como una forma de atomismo matemático.

Karl Weierstrass pone orden a la expresión: "tan cerca como se quiera" que designa a números pero que dejan de serlo al hacerse cada vez más pequeños. Considera la variable, no como una cantidad que cambia de forma activa, sino simplemente como un símbolo estático para cualquier miembro de un conjunto de valores posibles.

La definición de límite dada por Weierstrass, libera al cálculo de consideraciones metafóricas y nace el análisis moderno. La preocupación de Weierstrass es purgar los fundamentos del análisis de todas las huellas de la intuición de movimiento continuo (esto es, reemplazar lo variable por lo estático). La aritmetización del análisis constituye un proceso en el que el rigor en la praxis matemática se hace absoluto, y se insiste en que se ha dado un fundamento a la misma.

Siguiendo los esfuerzos de Weierstrass, otro ataque sobre el problema de formulaciones de definiciones rigurosas de continuidad y de número real es encarado por Richard Dedekind (1831-1916) quien reconoce que la propiedad de densidad del conjunto ordenado de los números racionales, es insuficiente para garantizar la continuidad. En *Continuity and Irrational Numbers* de 1872, considera que cuando los números racionales se asocian a los puntos de una recta, "existen infinitos puntos (sobre la recta) a los que no corresponden ningún número racional"; de esta forma los números racionales manifiestan huecos, incompletitud, y discontinuidad. (Cfr. Bell, J.2009). El relleno de huecos en los números racionales a través de la creación de nuevos puntos individuales es la idea clave subyaciendo a la construcción de Dedekind del dominio de números reales.

Dedekind propone en 1858, la definición de número real mediante cortaduras, por estar insatisfecho con la teoría de límites que se apoya en evidencias geométricas.

Transforma el análisis en teoría de conjuntos. Los conceptos son aplicados a elementos de conjuntos infinitos. Un conjunto infinito no puede ser dado más que dando una propiedad característica para sus elementos.

Hilbert apoya las ideas de Dedekind y escribe que el enfoque de Dedekind, con su idea de fundar lo finito en lo infinito, resulta "deslumbrante y cautivadora". El más visionario "aritmetizador" es Georg Cantor (1845-1918).

Cantor avanza más allá de sus predecesores en sus formulaciones, de lo que es una definición topológica de continuidad. A lo largo de su carrera muestra una oposición dogmática a los infinitesimales.

A pesar de los grandes logros de Weierstrass, Dedekind y Cantor en la construcción del continuo desde materiales aritméticos, muchos otros pensadores de final del siglo XIX y principios del siglo XX, siguen oponiéndose, en distintos grados, a la idea de una explicación del concepto del continuo sólo en términos discretos. Entre ellos, puedo nombrar a Brouwer y Weyl.

3. LA PROPUESTA: UNA VISIÓN INTEGRADORA A PARTIR DE H. WEYL

Para Weyl, el infinito real, no se puede dar plenamente en la intuición ni siquiera en principio, entonces no hay conocimiento matemático del infinito real. Nadie puede describir el conjunto infinito de los números naturales indicando las propiedades características de los elementos del conjunto; por eso, Weyl, reniega de la teoría de conjuntos y su definición de conjunto por comprensión. Según Weyl, la inexhaustibilidad es esencial para el infinito.

Tanto Weyl como Brouwer creen que las bases intuitivas del concepto del número real se encuentran en las sucesiones de elección. Entender a una sucesión de elección como representante de un elemento del continuo, es considerar a la sucesión en progreso, sea ésta con ley o sin ley. La condición que el punto real nunca "es" sino que siempre "deviene" preserva el continuo. En esta perspectiva, los puntos reales son siempre alguna cosa en devenir, indeterminados, contrario a la concepción clásica, donde un punto es considerado determinado y terminado.

Weyl da la bienvenida a la construcción de Brouwer del continuo por medio de sucesiones generadas por actos libres de elección, y esto lo lleva a identificar al continuo con un medio de libre ser, que no se disuelve en un conjunto de números reales como entidades terminadas. Weyl siente que Brouwer, a través de su doctrina del intuicionismo llega más cerca que cualquier otro para tender un puente del infranqueable abismo, entre lo formal matemático y lo intuitivo en la concepción del continuo. En particular, él encuentra convincente el hecho que el continuo de Brouwer no es la unión de partes no vacías disjuntas, sino que es indescomponible. Un continuo genuino no se puede dividir en fragmentos separados.

El continuo no es extraído de la experiencia física, sino que se explica reinventando por sus propios instrumentos operatorios, el modelo de las sucesiones libres de elección.

Weyl explica, el hueco entre lo formal y lo intuitivo del continuo describiendo esas partes de la matemática que no se basan en la intuición como puramente simbólicas. No rechaza la idea de Brouwer que la matemática gana claridad intuitiva pero él ve que algo más se necesita decir sobre estas partes que no se fundan en lo intuitivo. (Cfr.Tieszen, R. 2005:271). Según Weyl, la moderna investigación matemática es la hábil amalgama de procedimientos constructivos o intuicionistas y procedimientos axiomáticos. Weyl intenta combinar la axiomatización hilbertiana con el intuicionismo brouweriano. Es por esto, que considero a Weyl un intermediario entre el formalismo y el intuicionismo. Weyl intenta hacer corresponder a las proposiciones ideales de Hilbert, lo que no puede acceder por la intuición. (Cfr. Bell-Korté: 2009).

La construcción como lo intuitivo en la experiencia subjetiva, y lo simbólico como lo formal instanciado por el uso de símbolos, considerados como signos intencionados que conducen el sentido que proviene del entorno. Los símbolos mismos son signos de la intención de transmitir el sentido, y no tienen existencia independiente más allá de la que surge de la captabilidad de una conciencia. Así, Weyl intenta una conciliación entre el formalismo y el intuicionismo.

CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo sugiere cómo se puede abordar el desarrollo histórico de un concepto matemático, desde el abordaje que toma una personalidad científica no tan conocida en la historia de la ciencia como Hermann Weyl, y mostrar que sus aportes contribuyen a las perspectivas de la ciencia moderna.

La reconstrucción de varios aspectos de la historia de la matemática proporciona una elucidación más transparente de la relación que Weyl señala entre lo formal de la matemática y la intuición del sujeto, y muestra la dificultad de esta tarea integradora, relación que Weyl establece a través de la construcción simbólica.

La construcción simbólica como idea conciliadora que establece el nexo entre el formalismo y el intuicionismo, es presentada en este trabajo, a través de la exposición del período de crisis de los fundamentos de la matemática en la contextualización de los debates acaecidos durante los primeros años del siglo XX. Luego, por el racconto histórico del concepto del continuo asociado a lo infinitesimal, hasta la presentación de la propuesta integradora en la noción del continuo de Hermann Weyl.

En la historia de la matemática, que aquí simplificadamente se presenta, el rol de las discusiones, acerca de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, que si bien queda abierto, e inconcluso, sin definiciones exactas, deja abierta la navegación de océanos que todavía hoy sólo algunos matemáticos están preparados para surcar.

BIBLIOGRAFÍA

Bell, John L.(2000). "Hermann Weyl on intuition and the continuum". *Paper McGill University*.

……….(2009)."Continuity and Infinitesimals". En *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Bell, John-Korté, Herbert (2011). Hermann Weyl. En *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Béjar, Manuel (2010). "La apuesta cuántica de Schrödinger y Weyl (I). Intuiciones sobre una bioneurologia cuántica de la conciencia". Universidad Pontifica ICAI-ICADE. Madrid. http://www.tendencias21.net/La-apuesta-cuantica-de-Schrodinger-y-Weyl-I_a4181.html

Boyer, Carl B.(1993). "The History of the Calculus" En *National Council of Teachers or Mathematics*. Historical Topics for the Mathematics Classroom, Panel. USA.

Carson, Emily- Huber, Renate (2006). *Intuition and the Axiomatic Method,* Springer, Netherlands.

Dalen,D.-Atten,M.-Tieszen,R (2001). "Brouwer and Weyl: The fenomenology and mathematics of the intuitive continuum" ,Department of Philosophy, Utrecht University.

Dancy, Jonathan (1993). *Introducción a la epistemología contemporánea,* Tecnos, Madrid.

De Lorenzo, Javier (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Tecnos, Madrid.

Detlefsen, M.(1993). "Hilbert´s Formalism", en Hilbert, *Revue Internationale de Philosophie* , 47.

Eves, Howard (1983). *An Introduction to the History of Mathematics*. The Saunders Series, USA.[1953]

Forman, Paul (1984). *Cultura en Weimar, causalidad y teoría cuántica, 1918-1927. Adaptación de los físicos y matemáticos alemanes a un ambiente intelectual Hostil,* Alianza Universidad, Madrid.

Giaquinto, Marcus (1983). "Hilbert's Philosophy of Mathematics". The *British Journal for the Philosophy of Science,* vol. 34, 2, 119-132.

Grattan -Guinness,I.(2000). "The Search for Mathematical Roots. 1870-1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics, from Cantor though Russell to Gödel", Princeton, University Press, Princeton and Oxford.

Hallett, Michael (2008). "Reflections on the Purity of Method in Hilbert¨sGrundlagen der Geometrie". En Mancosu, Paolo, *The Philosophy of Mathematical Practice,* Oxford University Press.

Heyting, Arend (1976). *Introducción al intuicionismo,* Tecnos, Madrid.

Hilbert, David (1967). "Sobre los fundamentos de lógica y aritmética". [1904]. En Heijenoort, Jean van. *From Frege to Gödel. A source Book en Mathematical Logic, 1879-1931,*Harvard University Press Cambridge, Massachusetts.

……….Sobre el Infinito. (1967). En Heijenoort, Jean van.*From Frege to Gödel. A source Book en Mathematical Logic, 1879-1931*. [1925],Harvard University Press Cambridge, Massachusetts.

……….''Los fundamentos de la matemática" (1967). En Heijenoort, Jean van. *From Frege to Gödel. A source Book en Mathematical Logic, 1879-1931,* [1927],Harvard University Press Cambridge, Massachusetts.

Kragh, Helge (1989). *Introducción a la Historia de la Ciencia*, Grijalbo, Barcelona.

Legris, Javier (2005). "Sobre la justificación epistemológica de la metamatemática de Hilbert", Universidad de Buenos Aires, Conicet, Argentina.

Longo, Guiseppe (2001). "The Mathematical Continuum. From Intuition to Logic", CNRS and Ecole Normale Sup , Paris, Francia.

López, Chantal & Cortez, Omar (2007). *Introducción a la teoría de la ciencia*, Biblioteca Virtual Antorcha.

Mancosu, Paolo (1998). *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics en the 1920s.,* Oxford University Press.

Mondolfo, Rodolfo (1971). *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica,* Eudeba, Argentina.

Newman, James R.(1983) *SIGMA. El mundo de las matemáticas*, Tomo I, Grijalbo Barcelona.

Ortega, Mariano (2004). "K.Gödel: en búsqueda de fundamento". En *Revista de Didáctica de las Matemáticas. Filosofía y matemáticas. Uno,* 37, X, Graó,Barcelona.

Palau, Gladys (1995). "Los obstáculos epistemológicos en la historia de la matemática".Trabajo leído en la XLV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina, Río Cuarto.

Piergiorgio, Odifreddi (2006). *La matemática del siglo XX: de los conjuntos a la Complejidad,* Katz , Buenos Aires.

Pyenson, Lewis (1990). *El joven Einstein El advenimiento de la relatividad,* Alianza, Madrid.

Sabaté, Ferrán Mir (2007). "La polémica intuicionismo formalismo en los años 20. Principio de Tercio Excluso", *Cuaderno de Materiales,* Madrid.

Sánchez Ron, José Manuel (2001). *Historia de la física cuántica I. El período fundacional*

ISSN 1851-8060

(1860-1926), Crítica, Barcelona.

..........(2005) "Einstein, Felix Klein, David Hilbert y Hermann Weyl", Conferencia Universidad Politécnica de Catalunia, Facultad de Matemática y Estadística. España.

Sklar, Lawrence (1992). *Filosofía de la física*, Alianza, Madrid.

Spengler, Oswald (1958). *La decadencia de Occidente. Bosquejo de una morfología de la historia universal,* Traducido por Manuel G. Morente, Espasa-Calpe, S.A., Madrid.

Stewart, Ian (2004). *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy,* Crítica, Barcelona.

Tieszen, Richard (2005). "Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics". San José State University, Cambridge University Press.

Van Dalen, Dirk (2005). "Mystic, Geometer and Intuitionist. The life of L.E.J.Brouwer 1891-1966", vol. 2: Hope and Disillusion, Clarendon Press- Oxford.

...... (2011)."The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer", Springer, Verlag, London Limited.

Van Heijenoort, Jean (1967)."From Frege to Gödel. A Source book in Mathematical Logic, 1879-1931", Harvard University Press, Cambridge.

Van Hiele, Pierre M.(1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education,* Academic Press, INC. Orlando Florida.

Visokolskis, Sandra (2011). "Apuntes de Clases" Seminario Historia de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Weyl, Herman (1987) *The Continuum. A critical Examination of the Foundation of Analysis. [1918]*. Translated By Stephen Pollard&Thomas Bole. Dover Publications. INV. New York.

......(1967). "Comentarios sobre la segunda lectura de Hilbert sobre los fundamentos de la Matemática" .[1927]. En Heijenoort, Jean Van. *From Frege to Gödel. A source Book en Mathematical Logic. 1879- 1931*.Harvard University Press Cambridge, Massachusetts.

......(1989). "The Open World: theree lectures on the metaphysical implications of science" [1932], *JSTOR Ox Bow Press*.

......(2009) *Mind and Nature* ,[1934], Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics. Edited and with an Introduction by Peter Pesic, Princeton University Press, Princeton and Oxford, United States of America.

...... (1965) *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural,* [1949].,Centro de Estudios Filosóficos, Universidad Nacional Autónoma de México.

......(1974) "El modo matemático de pensar". En "La forma del pensamiento matemático.

Analogía y notas de James R. Newman", Traducción De Manuel Sacristán,

Grijalbo, Barcelona.

Wilder, R.L.(1969). "Development of Modern Mathematics", University of Michigan. En *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of

Teachers of Mathematics, United States of America.