

Modelos matemáticos para el cálculo de la resistencia térmica de levaduras de jugo de naranja. Biología y Matemática integradas en clases de nivel superior.

Mathematical Models for Orange Juice Yeast Thermal Resistance Calculation. Biology Blending with Mathematics in College Courses.

Pamela Chirino¹ y Sandra Baigorria²

^{1,2} INESCEER, Villa María, Provincia de Córdoba, Argentina

¹pamelatchirino@yahoo.com.ar; ²sandrahb2001@yahoo.com.mx

Recibido 07/06/2013 – Aceptado 07/06/2014

Resumen

Este artículo presenta una propuesta implementada en primer año de un curso de educación superior de una carrera técnica con orientación en tecnología de los alimentos, para vincular Biología con Matemática, mediante el cálculo de resistencia térmica de *Cándida intermedia*, en el jugo de naranja con una concentración de sólidos solubles de 52°Brix. Para lograr la vinculación, se buscaron modelos matemáticos que permitieron averiguar las temperaturas y los tiempos a los que sobrevivirán 10 ufc/ml. Para tal fin se utilizaron distintos recursos digitales, cuyo uso es explicado en algunos casos.

Palabras clave: Matemática, Biología, Modelos, Levaduras.

Abstract

This article presents a proposal that was implemented in first year of a course that is part of a tertiary education degree course with food technology specialization, in order to link Biology with Mathematics by means of *Candida intermedia* thermal resistance calculation, in orange juice with a soluble solids concentration of 52° Brix. In order to establish the link between the two sciences, mathematical models through which it was possible to find the temperatures and the times at which 10 ufc/ml would survive were looked for. To such end, different digital resources were used. Such use is explained in some cases.

Keywords: Mathematics, Biology, Models, Yeasts.

Introducción

La Biología y la Matemática se muestran muchas veces como disciplinas enfrentadas y sin aspectos en común. Sin embargo, ambas ciencias se desarrollaron en función a la actividad de resolver problemas, gracias a la tarea de investigadores que gracias a sus conocimientos y capacidades lograron encontrar las respuestas a diversos interrogantes.

La presente propuesta muestra una experiencia cuyo objetivo principal era conectar biología con matemática a través del análisis de una tabla de datos de una experiencia que vincula la cantidad de levaduras que sobreviven luego de que el jugo de naranja, con una concentración de sólidos solubles de 52° Brix, es sometido a tratamientos térmicos con distintas combinaciones de tiempo y temperatura. Para llevar adelante el proceso de averiguar los tiempos y temperaturas a los que se someterá el jugo de naranja de 52° Brix, para obtener una concentración final de 10 ufc/ml, se ubicó al alumno en situación de científico que debe ayudarse de conocimientos matemáticos y biológicos, ya conocidos que se complejizarán con el uso de tecnologías digitales.

Es de destacar que se expondrá toda la experiencia vivida, la cual podría ser profundizada o acotada de acuerdo a características del grupo si se quisiera reimplementar en otros ámbitos. Tampoco sería determinante el tema a tratar, dado que las investigaciones de fenómenos biológicos abundan, sólo se busca mostrar cómo es posible plantear verdaderos retos científicos dentro de aulas para integrar disciplinas científicas.

Para caracterizar a los alumnos se puede decir que se encuentran en sus primeras vinculaciones con los procesos biológicos, y en cuanto a la matemática poseen un conocimiento general de cálculo y álgebra común a cualquier carrera técnica, como así también han realizado una breve estadía por la estadística descriptiva y el cálculo de probabilidades simples.

Desarrollo

Primer momento: Investigación teórica

La actividad se ejecutó con los docentes de biología y de matemática presentes y comenzó buscando comprender un proceso biológico mediante diversos caminos: la exposición del docente de biología, una investigación rápida en bibliografía pertinente y una breve puesta en común que culminó en comprender un proceso biológico no abordado aún. Entre las características encontradas se puede desatacar:

- Las bacterias ácido lácticas son la causa primaria del daño microbiológico durante el procesamiento del jugo de naranja, ya que algunas pueden sobrevivir fácilmente a cualquier tratamiento térmico. Las levaduras son consideradas un problema potencial de los jugos de naranja concentrados y jugos refrigerados, debido a su habilidad para sobrevivir y crecer bajo condiciones ambientales adversas. Según Salcedo et al. (2001) se ha demostrado que *Cándida intermedia* es una levadura capaz de resistir los procesos normales de pasteurización comercial, por lo que es muy probable que su alta incidencia en los jugos pasteurizados sea ocasionada por deficiencias en las combinaciones tiempo-temperatura. Según Frazier (1990) la destrucción térmica de microorganismos, enzimas, nutrientes y características sensoriales, describen una cinética de primer orden y dependen exclusivamente del componente en cuestión, que comúnmente es denominada de tipo logarítmica, es decir, para un intervalo de tiempo, siempre se destruye un mismo porcentaje de cada componente o población microbiana.
- la supervivencia microbiana durante el proceso de esterilización por el calor depende, además de la temperatura alcanzada y de la duración del tratamiento, de la composición del alimento. Factores como la concentración de carbohidratos, lípidos y proteínas así como el contenido de humedad y el pH pueden afectar la sensibilidad de los microorganismos al calor. Los carbohidratos presentes en las naranjadas, sacarosa, glucosa y fructosa generalmente resultan en un incremento de la resistencia térmica.
- Jay (2002) sostiene que las células tienen morfología de elipsoidal a cilíndrica, (2.4 a 6.4) x (3.2 a 7.2) micras, por lo general dispuestas en las cadenas, formando pseudohifas en ramas cortas como árboles con blastosporas ovoides presentes. Crecimiento en medio líquido: *Cándida intermedia* se dispersa como células individuales o en pares. El medio líquido promueve el crecimiento micelial; se forma una película gruesa arrugada. Se encuentra en el suelo, la cerveza y las uvas; también en la piel, en la garganta o en las heces de animales. *Cándida intermedia* puede producir alcohol etílico, prefiere pH neutro, puede crecer en medio ácido de pH 1,8 y la temperatura óptima de desarrollo es de 20-30° C.

Segundo momento: Acercamiento a una investigación real y primeros cuestionamientos numéricos.

Posteriormente y para introducirse en aspectos matemáticos, los docentes proponen algunos interrogantes: ¿Cómo se relacionan el número de levaduras (ufc/ml), el tiempo y la temperatura? ¿Qué combinaciones de tiempo y temperatura podrían asegurar que el número de levaduras sea de 10ufc/ml o menos? ¿Se puede encontrar una función matemática que modele el fenómeno del tratamiento térmico del jugo de naranja con una concentración de sólidos solubles de 52°Brix?

Frente a la imposibilidad obvia de que los alumnos respondan estas preguntas, se los invitó a buscar en internet la investigación realizada por Salcedo y otros (2001) y centrarse específicamente en la tabla de jugos de naranja con una concentración de sólidos solubles de 52°Brix en Cándida intermedia:

Tiempo (seg)	Número de levaduras (ufc/ml) a 63°	Número de levaduras (ufc/ml) a 64°	Número de levaduras (ufc/ml) a 65°	Número de levaduras (ufc/ml) a 66°	Número de levaduras (ufc/ml) a 67°
2	6400	3100	2000	1400	280
6	1300	200	180	100	-
10	65	45	35	25	16
12	30	18	24	14	-
14	15	10	11	-	-

Tabla N° 1. Cantidad de levaduras (ufc/ml) en diferentes tratamientos térmicos.

Tercer momento: primeros modelos

De un análisis en conjunto de docentes y alumnos surge que el número de levaduras, L , (ufc/ml) depende de la temperatura, T_e , al cual es sometido el jugo de naranja y durante el tiempo que dura el tratamiento térmico. A mayor temperatura, menor serán las ufc/ml de levaduras, y lo mismo sucede al considerar la variable tiempo versus la variable número de levaduras. Pero las preguntas originales "¿qué modelos se podrían encontrar para estas relaciones? ¿para qué tiempo y temperatura el tratamiento térmico llevará a 10 ufc/ml en el jugo de naranja con una concentración de sólidos solubles de 52°Brix?" seguían sin ser respondidas.

El rol del docente se transformó aquí en orientador de las actividades a realizar por los alumnos, se les propuso entonces observar el número de levaduras presentes luego de que el jugo de naranja fuera sometido a 2 seg de tratamiento térmico, reduciéndose la Tabla N°1 a:

Temperatura (°C)	Número de Levaduras (ufc/ml)
63	6400
64	3100
65	2000
66	1400
67	280

Tabla N° 2. Reducción de la Tabla N°1. Tratamientos térmicos de 2 seg de duración.

Algunos alumnos notaron que la cantidad de levaduras es función de la temperatura del tratamiento térmico, y para un período de dos segundos, cada vez que se incrementa en un °C la temperatura, el número de levaduras se reduce a aproximadamente un 50% de la cantidad anterior. Por lo tanto, estos puntos no pertenecerían a una recta sino a una curva de decrecimiento exponencial. Los alumnos que ya estudiaron función exponencial indican que buscaran acercarse al modelo teórico $y = k \cdot a^x$

- La cantidad inicial de levaduras es 6400 ($k=6400$)
- Aproximadamente el número de levaduras decrece a razón del 50% ($a=0,50$)
- El número de levaduras, L , depende de la temperatura, Te .

Finalmente los alumnos "fabrican" $L = 6400 \cdot 0,50^{(Te-63)}$, deduciendo que cuando $L = 10$, la temperatura es de aproximadamente 72,3°C (siempre y cuando el tratamiento térmico dure 2 seg). Si bien el profesor felicitó a los alumnos por el modelo encontrado, les explicó que seguramente tenía un error significativo porque esa tasa de decrecimiento era bastante representativa para 63° y 64°, pero dejaba mucho que desear para los 67°. Sin embargo, el profesor no desestimó este modelo porque era parte del proceso de aplicar objetos matemáticos a ámbitos no matemáticos.

Luego, se indujo a que los alumnos se pregunten si era posible formular un modelo similar cuando el tratamiento térmico se lleve a cabo durante 6 seg. La respuesta fue obviamente negativa, no se puede hacer la suposición de que por cada grado que aumenta la temperatura, el número de levaduras se reduce a un 50% de la cantidad anterior. Esto se evidenció al reducir la Tabla N°1 a un nueva tabla que sólo muestre el número de levaduras que sobreviven luego de 6 seg a distintas temperaturas.

Temperatura (°C)	Levaduras (ufc/ml)
63	1300
64	200
65	180
66	100

Tabla N° 3. Reducción de la Tabla N°1. Tratamientos térmicos de 6 seg de duración.

Lo que sí se aseguró es que el modelo que describe la relación entre el número de levaduras y las temperaturas a los 6 segundos es exponencial, pero no es posible encontrar el valor de a y k que correspondería con $L = k \cdot e^{a \cdot Te}$ manualmente, aunque sí se podrían encontrar mediante cualquier planilla de cálculo. Así, los alumnos obtuvieron que el modelo exponencial que mejor estima los datos es $L = 2 \cdot 10^{24} \cdot e^{-0,787e}$, siendo $r^2=0,8206$ (el profesor de matemática explicó que significa r^2). Esta función permitió responder a qué temperatura, en este caso para 6 seg, se encontrarán presentes en el jugo de naranja 10 ufc/ml de levaduras, es decir se resolvió $10 = 2 \cdot 10^{24} \cdot e^{-0,787e}$, que arrojó como resultado $Te = 67,8^\circ C$

Cuarto momento: modelos en varias variables

Si bien estos dos modelos, (el creado mediante la abstracción y razonamientos matemáticos y el elaborado mediante el uso de software) permitieron realizar estimaciones acerca del número de levaduras presentes cuando este tipo de jugo de naranja es expuesto a una cierta temperatura, sólo sirvieron para aproximar el número de levaduras cuando se trabaja a un tiempo determinado (siempre y cuando el tiempo elegido forme parte de los datos de la Tabla N° 1). Pero ¿cómo estimar el número de levaduras a los 3 seg o a los 7 segundos con una temperatura de 64°C? Evidentemente los modelos encontrados hasta este momento son limitados y no servirían para realizar estimaciones en otros procesos de pasteurización.

Así los objetivos se volvieron más ostentosos, buscar una fórmula que relacione número de levaduras (L), tiempo de exposición (t) y temperatura (T_e) al cual es expuesto el jugo de naranja con una concentración de sólidos solubles de 52°Brix. Es decir, encontrar una función en la que el número de levaduras dependa de los factores tiempo y temperatura, L dependa de t y T_e .

Elaborar una función con estas características no era tarea sencilla, pero no imposible gracias al desarrollo tecnológico que permite acercarse a distintas representaciones de un objeto matemático, lo que aumenta las posibilidades de trabajo interdisciplinario. Como hoy en día existen programas que permiten una visualización en tres dimensiones de los datos que se tienen, el profesor de matemática mostró una representación gráfica realizada mediante el software Maple, obteniendo una representación visual tridimensional de la Tabla N°1.

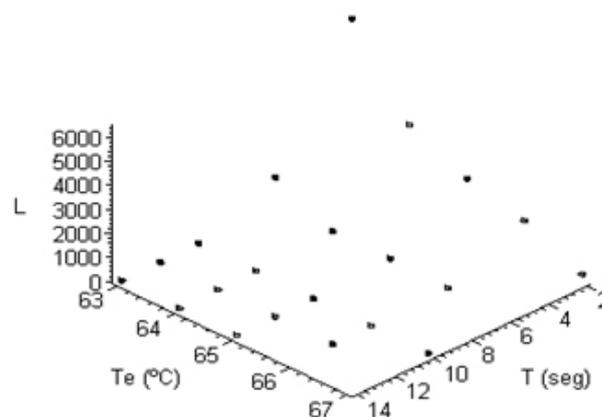


Figura N° 1. Representación gráfica de Tabla N°1

La observación de la figura N° 1 permite concluir, algo que ya se había intuido, que la relación entre las variables es de decrecimiento exponencial, sólo que ahora hay dos variables que influyen en el número de levaduras presentes. Por esta razón, el modelo buscado ya no es $y = ka^x$. Si bien los alumnos no habían trabajado con funciones en varias variables, pudieron comprender sencillamente que una variable podía depender de más de una variable. (Debido a limitaciones obvias de tiempo no se realizó un análisis funcional de este tipo de funciones, sólo se hizo un tratamiento intuitivo y de tipo aplicativo).

No era posible conocer con qué forma exponencial en varias variables probar, por lo tanto no quedó más que dejar jugar a la imaginación que, sumado a los conocimientos matemáticos mediante ensayo y error, permitió estimar el número de levaduras a distintas temperaturas y durante diferentes tiempos. Si bien, lo ideal es que el alumno proponga alternativas, que protagonice la vinculación de biología con matemática, ellos no proponían modelos. Dado que la abstracción a modelos de este tipo era compleja, los docentes debieron proponer una primera alternativa para incentivar la búsqueda. Una idea simple para empezar fue tratar de encontrar una función como $Z = k.e^{a(x,y)}$, que representando el problema se convirtió en $L = k.e^{a(te1)}$. El deseo de buscar un mejor modelo brindó la posibilidad de incluir otros datos que hasta ahora no se habían tenido en cuenta, como por ejemplo que el número inicial de levaduras es de $9,9 \times 10^6$

ufc/ml a temperatura ambiente de 28°C. Eso nos invita a suponer que el modelo buscado tendría la forma de $L = 9900000 \cdot e^{a(Te-28) \cdot t}$.

Pero la sola observación visual impedía calcular el valor del coeficiente a. La actividad se tornó más compleja, dado que los programas con planillas de cálculos comunes no estiman funciones en varias variables. Sin embargo, y como existen softwares más complejos que sí lo hacen, se explicó el uso de InfoStat para esta finalidad: como si fuera una planilla de cálculo se cargan los datos, luego a Estadísticas, regresión no lineal y de ahí se seleccionan las variables dependientes (Levaduras) y las regresoras (Temperatura y tiempo), como se muestra en la siguiente imagen.

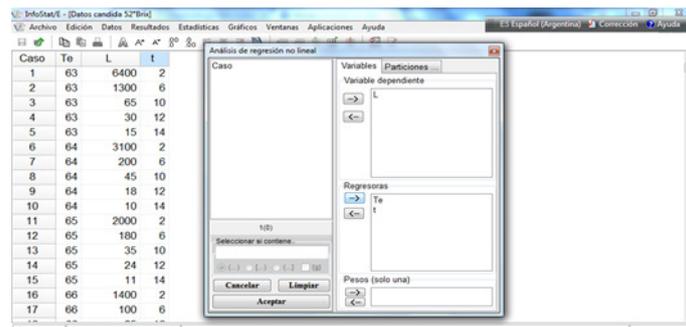


Figura N° 2. Carga de datos en software estadístico.

Luego se completa la función que se quiere generar, se hace click en "verificar sintaxis del modelo", y luego "aceptar":

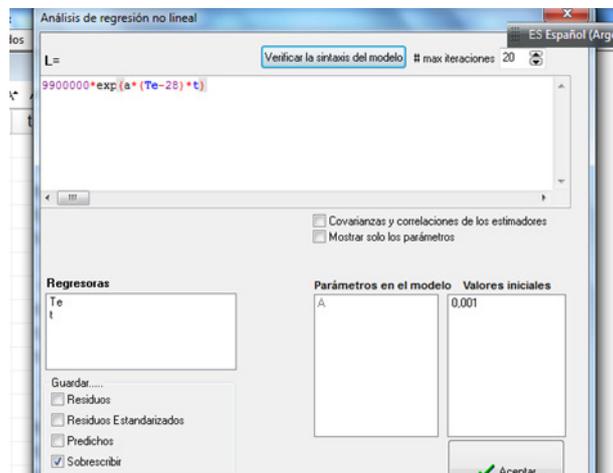


Figura N°3. Carga del modelo funcional a generar.

Y finalmente, el software generó el valor para el parámetro buscado:

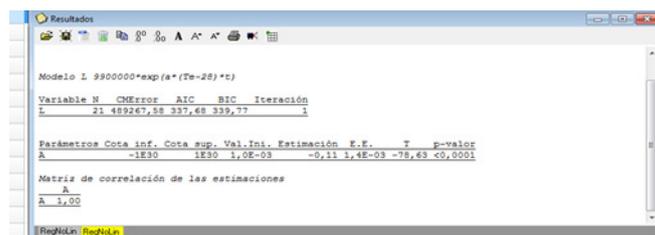


Figura N° 4. Resultado del análisis estadístico realizado por el software.

Naturalmente, los alumnos no sabían qué significa cada valor, sin embargo se dieron cuenta que el valor que toma es $-0,11$ (porque la pantalla indica Estimación) y el profesor de matemático agregó que como $p < 0,0001$, $-0,11$ es una buena aproximación de (desde la teoría de la probabilidad). Sin embargo que el modelo se convierta en $L = 9900000 \cdot e^{a(Te-28) \cdot t}$ siendo el valor $p < 0,0001$, no invitó a dar por clausurada la búsqueda de otros modelos. Pero el profesor solicitó un análisis manual que muestre qué tan bien aproxima esta función a las imágenes reales. Así los alumnos en una planilla de cálculo cargaron datos, calcularon las imágenes de nuestra función y los errores absolutos y porcentuales como se muestra en la siguiente imagen.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Tiempo (seg)	Temperatura (°C)	Número de levaduras (ufc/ml)	Estimación	Error absoluto	Error porcentual			
2	2	63	6400	4482,8097	1917,01	29,95%			
3	6	63	1300	0,0000	1300,00	100,00%			
4	10	63	65	1,8849E-10	65,00	100,00%			
5	12	63	30	8,5355E-14	30,00	100,00%			
6	14	63	15	3,6031E-17	15,00	100,00%			
7	2	64	3100	1997,6860	-87,68	-1,65%			
8	6	64	200	4,7511E-04	200,00	100,00%			
9	10	64	45	6,2744E-11	45,00	100,00%			
10	12	64	18	2,2821E-14	18,00	100,00%			
11	14	64	10	8,2861E-18	10,00	100,00%			
12	2	65	2000	2087,2083	-87,21	-4,36%			
13	6	65	180	0,0000	180,00	100,00%			
14	10	65	35	2,0896E-11	35,00	100,00%			
15	12	65	24	6,0911E-15	24,00	100,00%			
16	14	65	11	1,7265E-18	11,00	100,00%			

Figura Nº 5. Planilla de cálculo con estimaciones y errores.

De analizar la planilla completa se afirmó que sólo habría una buena estimación, que sucede cuando la temperatura es 63°C a los 2 seg, que provoca un error del 29%. Pero las otras imágenes no brindan una buena estimación, dado que el error llega a ser del 100%. Esto no desanimó la búsqueda de un modelo que estructure y sintetice el vínculo existente entre el número de levaduras, el tiempo y la temperatura del tratamiento térmico, dado que para continuar el proceso de matematización sólo es necesario el uso de la imaginación y la creatividad. En grupos y con ayuda de los profesores, y luego de una cantidad innumerable de intentos fallidos, se proponen algunos modelos, como por ejemplo $L = 9900000 \cdot e^{a(Te-28)+bt}$, que cargado en el software estadístico genera $a = -0,20$ y $b = -0,41$, por lo que el modelo ahora se convierte en $L = 9900000 \cdot e^{-0,20(Te-28)-0,41t}$, donde el valor p de Te es menor a $0,0001$ y el de t es igual a $0,0055$. Al analizar los errores porcentuales, como en el modelo anterior, se advirtió que este modelo es notablemente mejor, dado que los errores porcentuales disminuyeron a más de la mitad en la mayoría de los casos, llegando en algunos casos, sólo de un 5%. Sin embargo, que el modelo arroje, en algunos casos, errores porcentuales rodeando un 500%, invitó a buscar un modelo más exacto, que disminuya esos errores. Por ejemplo $L = (9900000e^{a(Te-28)+bt})^k$, que cargado InfoStat nos indicó que $a = -0,32$, $b = -0,23$ y $k = 1,95$, con todos los valores p menores que $0,0001$, el nuevo modelo resulta $L = (9900000e^{-0,32(Te-28)-0,23t})^{1,95}$. Nuevamente, al analizar los errores porcentuales de cada imagen que genera este modelo se observa que efectivamente esta función es notablemente mejor que la anterior porque el error máximo es de 160%, y sólo hay tres imágenes con un error superior a 100%, inclusive hay errores del 0,5%. Si bien la búsqueda de modelos siguió, este fue el mejor encontrado para realizar buenas estimaciones y responder interrogantes, que con los primeros modelos no se podían responder.

¿Qué sucedería con el número de levaduras a los 20 segundos con una temperatura de 50°C ?
 $L = (9900000e^{-0,32(50-28)-0,23 \cdot 20})^{1,95} = 6097 \text{ ufc/ml}$.

¿Qué sucedería con el número de levaduras a los 3 segundos con una temperatura de 80°C ?
 $L = (9900000e^{-0,32(80-28)-0,23 \cdot 3})^{1,95} = 0 \text{ ufc/ml}$, lo que nos indicaría un tratamiento realmente exitoso. Aquí el profesor de biología volvió a la escena de forma sustanciosa: el tratamiento, según la matemática resultó exitoso, pero ¿es bueno someter el jugo de naranja a una temperatura de 80°C ? ¿Qué sucede con las propiedades organolépticas y nutritivas del jugo de naranja?

También se pudo responder bajo de los interrogantes originales: bajo qué condiciones el número de levaduras es de 10 ufc/ml, es decir para que valores de Te y de t , $10 = (9900000 \exp^{-0,32(Te-28)-0,23 \cdot 6})^{1,95}$. Como esta ecuación tiene infinitas soluciones, profesores y alumnos propusieron distintas combinaciones de temperaturas y tiempos (viables y aceptables desde el punto de vista microbiológico). Por ejemplo, para 6 seg, quedaría resolver: $10 = (9900000 \exp^{-0,32(Te-28)-0,23 \cdot 6})^{1,95}$ cuyo resultado es $T = 69,95^{\circ}\text{C}$.

Es innumerable la cantidad de preguntas que se podrían responder gracias al modelo buscado, o inclusive criticando al modelo, relacionando con los procesos de pasteurización, los costos del proceso y las propiedades microbiológicas del jugo de naranja. Los planteamientos mostrados son sólo el puntapié inicial de nuevas búsquedas y descubrimientos, tanto desde el ámbito matemático como el biológico.

Posteriormente, se les solicitó a los alumnos crear modelos simples de fenómenos biológicos de interés. Fue así que los alumnos, nuevamente gracias a la ayuda de planillas de cálculo generaron:

- Para modelar la relación entre la temperatura en °C del tanque de enfriamiento de la leche cruda durante 24 hs, t , y la cantidad de colonias de bacterias por ml, B , se encontró $B=982,98e^{0,2742t}$
- Para modelar la relación entre la cantidad de levaduras de *Candida intermedia* (ufc/ml), la temperatura en °C y el tiempo del tratamiento térmico a 36°Brix se encontró: $L=38.000.000e^{-0,24(Te-28)-0,57t}$

Otros alumnos no lograron realizar modelos matemáticos dado que no encontraron relaciones representativas entre las variables que estudiaron, básicamente por falta de dominio de los objetos matemáticos.

Evaluación

La actividad fue positiva dado que se efectuó una vinculación entre objetos biológicos y matemáticos. Las limitaciones principales surgieron en cuanto al manejo de software, algunos alumnos manifestaron que hubiese sido necesario clases previas para aprender a manejarlos.

Un porcentaje pequeño de alumnos no logró crear ningún tipo de función en varias variables, puede deberse a que éstas fueron las primeras aproximaciones a este tipo de funciones y a que la lógica de trabajo fue radicalmente distinta a las establecidas previamente en las clases de matemática.

Algunos alumnos manifestaron que la actividad les resultó novedosa porque aplicaron contenidos matemáticos y biológicos que les permitió cuestionarse situaciones muy comunes en su quehacer como futuros profesionales, en las cuales no tendrán respuestas totalmente certeras pero si combinan conocimientos de distinta índole el nivel de error puede disminuirse considerablemente.

Reflexiones Finales

La posibilidad de vinculación disciplinaria es un reto que deben asumir los profesores de distintas áreas pensando, en primera instancia, que los alumnos son capaces de asumir este reto intelectual y colaborativo. Evidentemente, el uso de recursos digitales resultó ser vital para ejecutar la mayoría de las actividades, siendo su uso sólo un vehículo y no un fin en sí mismo, una parte importante de la resolución de problemas, una mano más a los conocimientos biológicos y matemáticos. Por otro lado, la ventajas de realizar una actividad como esta no fue limitante a la comprensión de procesos biológicos o matemáticos dado que se pusieron en práctica distintas habilidades cognitivas como explicar, razonar, hipotetizar, transferir e inferir entre otras, que propician cumplir con un objetivo de cualquier currícula actual: formar sujetos capaces de resolver problemas. Desde el punto de vista de los docentes (tanto del de biología como el de matemática) se evidenció un crecimiento profesional por afrontar situaciones donde no todas las respuestas son conocidas, y a su vez permitió continuar vinculadas a la actividad de investigación y generación de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Frazier, W. 1990. *Microbiología de los Alimentos*. Zaragoza: Acribia.

Jay, J. 2002. *Microbiología Moderna de los Alimentos*. Zaragoza: Acribia.

Salcedo Z.; B. Ferrer; A. Ocando; Rodríguez, G. 2001. *Resistencia térmica de levaduras en jugo de naranja a diferentes concentraciones de sólidos solubles*. Disponible en <http://www.educapalimentos.org/site2/archivos/investigaciones/RESISTENCIA%20LEVADURA%20EN%20JUGO%20NARANJA.pdf> consultado el 28 de julio de 2013.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: Thomson Editores

Stewart, J. (2002). *Cálculo de varias variables*. México: Thomson Editores.