

Medida del número π . Diferentes niveles en la investigación científica

Diego Fuertes - Álvaro González - J. Félix Fuertes

Fundación Conde de Vallellano. Villoria de Órbigo; León, España.
felix@uniovi.es

En este trabajo se trata de acercar las tareas de laboratorio a la realidad de la actividad científica, mediante las distintas maneras de obtener el número π . Con una instrumentación de bajo costo y sencilla, se pone de manifiesto la compleja diversidad de los diferentes niveles en la investigación científica. Por otra parte, es una forma eficaz de introducir los conceptos y protocolos básicos de la metodología experimental.

Palabras claves: número π , niveles de investigación, investigación didáctica, prácticas de laboratorio, gestión y representación de datos

We are trying in this work to close the gap between laboratory task and real experimental research, by means of the different ways to obtain the number π . With a cheap and single instrumentation, it is pointed out the complex diversity of the different search levels. It is also an effective way to introduce the basics concepts and protocols in the experimental techniques.

Keywords: number π , search levels, physics educational research, laboratory task, data analysis and representation.

Introducción

La investigación docente ha adquirido en las dos últimas décadas una relevancia primordial (ej.: McDermott, 2001), por lo demás, muy necesaria. Es una disciplina compleja y de multitud de facetas, pero su rasgo principal es el de focalizar la atención sobre los procesos de aprendizaje antes que a los contenidos (Reif, 1995; Niaz, 2010). En la Enseñanza de las Ciencias, los trabajos prácticos de laboratorio adquieren por ello un mayor protagonismo, ya que, debidamente programados [Petrucci et al., 2006; Galvez y Singh, 2010, Montino et al., 2011), pueden acercar al alumno de una manera natural a esos procesos de aprendizaje.

La medida del número π es una tarea bien conocida, modesta y elemental que, acaso por ello, pensamos que no es debidamente aprovechada. Planteamos, pues, en este trabajo, la medida del número π por tres métodos distintos (y tres ampliaciones complementarias), que nos permi-

tirán acercarnos a los conceptos y protocolos básicos de la investigación científica, concebida como una actividad compleja y dinámica (Kung, 2005; Ayala et al., 2011). La sencillez de los aparatos empleados, además del escaso coste, permite que estos aspectos básicos no se vean eclipsados por la compleja instrumentación de otras tareas comunes cuyo funcionamiento y mantenimiento no son siempre óptimos.

Diferentes niveles en la investigación científica

El estudio de la estructura del quehacer científico compete a la Filosofía de la Ciencia, disciplina que, obviamente, no cabe en los cursos de introducción a la Física. Sin embargo, no por eso se ha de evitar la presentación de una somera visión de tal estructura, que sea asequible a los alumnos, y que tratamos de conectar

con las tareas posteriores implicadas en la medición del número π .

Podemos diferenciar cuatro distintos apartados, que caracterizamos como ‘niveles de investigación’, por cuanto la separación de los hechos primordiales se va incrementando en cada nivel:

- de los hechos a los fenómenos (primer nivel),
- de los fenómenos a la experimentación (segundo nivel)
- de la experimentación a la interpretación teórica (tercer nivel)
- Simulación (cuarto nivel)

Esta separación en niveles no significa que operen independientemente; antes al contrario, forman una unidad interactuante, de la misma forma que el cuerpo humano es un todo, aunque se separen para su estudio en cabeza, tronco y extremidades. En los tiempos que corren, donde la especialización es cada vez más pujante (Fuertes, 2004), es una necesidad obligada que, al menos en la formación básica, se tenga una visión más holista de la actividad científica.



Figura 1: brilla la luna llena: el fenómeno por excelencia

Primer nivel: *de los hechos a los fenómenos*

Generalmente, las tareas están casi siempre orientadas hacia la medida de unas ciertas magnitudes, ya bien caracterizadas, mediante un procedimiento más o menos complejo que lleva a un resultado. Sin embargo, la capacidad de encontrar entre la variedad y complejidad de determinados hechos alguno que sea relevante – el fenómeno-, que tenga además algunas propiedades medibles y que se puedan relacionar, no es fácil de poner en evidencia (Ayala et al., 2011). Por eso, es necesario crear el escenario adecuado a cada tarea y encuadrarlo, en lo posible, en el devenir histórico, de manera que quede claro cuáles son esos hechos relevantes que sugieren el experimento (Mattheus, 1991; Ayala et al., 2011).

La aparición de la luna llena es el fenómeno por excelencia (fainos/brilla; menon: luna) -figura 1- (Fuertes, 1997). Con su luminosa redondez plateada, mes tras mes, cumpliendo regularmente su ciclo, acoplado al ciclo menor del igualmente redondo, pero dorado sol, y ambos acomodados en el ciclo estacional. El mito del eterno retorno, los ciclos, la redondez en la forma y en el recorrido de ambos astros, está detrás de todo ello. Para nuestros ancestros, además, su supervivencia dependía sobremanera de la regularidad de tales ciclos y necesitaban, por ello, estudiarlos con el máximo detalle. Surge, así, el segundo nivel.

Segundo nivel: *de los fenómenos a la experimentación.*

Cabe la posibilidad de estudiar el fenómeno tal cual, a través de sus propiedades, algunas medibles, otras no, o cabe, cuando es posible, diseñar algo más cerca de nosotros, más apropiado, que nos permita hacer el estudio con más eficacia y ajeno a accidentes espurios -el experimento propiamente dicho-. Se pueden estudiar esos ciclos tal cual se presentan en el cielo –la relación temporal entre ellos-, o se pueden

‘bajar a tierra’. En algún momento, un cazador percibió que las huellas dejadas por la bestia que, atrapada al otro extremo de su cuerda pugnaba por liberarse, mostraban una redondez similar a la de los astros. Es el eureka. De entre las diversas peripecias que acontecían en los múltiples y laboriosos días de caza, ésa era especialmente peculiar. Un nuevo fenómeno. El desaforado caballo se sustituye por un palo y, el esforzado cazador, por una estaca firmemente clavada en tierra; los pies del novel investigador hacen el resto. Ya es posible experimentar, dibujar circunferencias en la arena: cuerda más grande, cerco más grande: la naturaleza empieza a revelar sus secretos; la redondez celestial domesticada. Se fabrican cuerpos redondos con más precisión, cabe englobar cercos más pequeños en otros más grandes y, con ayuda de ello, se puede buscar una interpretación de los ciclos de los astros. Y se construye un templo que levante acta permanente de esos celestiales movimientos – figura 2-, una representación –traer al presente- la evanescente realidad.

Tercer nivel: *de la experimentación a la interpretación teórica*

Los fenómenos descritos mediante la experimentación –o directamente desde el

propio fenómeno- pasan, en el siguiente nivel, a la interpretación en el marco teórico; en el primer caso, se muestra lo que sucede, tal cual, con más o menos detalle y, en el segundo, se pueden establecer, principalmente, relaciones de causa-efecto dentro de un fenómeno o un grupo de ellos. Los objetos físicos empleados en la experimentación, si bien son diseñados al efecto para evitar interferencias no deseadas, no lo son del todo. Por eso, el objeto ideal, el ente abstracto, sí permite esta limpieza, sin perder el contacto con la realidad, pero distanciándose de ella, universalizándose, para poder desenvolverse con soltura en la nueva función: la interpretación de los fenómenos, e incluso la posibilidad de anunciar otros similares hasta el momento desconocidos.

Dos amantes que cometieron alguna grave falta, son castigados a perseguirse eternamente por el cielo sin encontrarse jamás. Es una interpretación mítica del fenómeno celeste. El mito puede considerarse un estado primitivo de la teoría científica: una prehistoria (Fuertes, 2001). No en vano teatro y teoría provienen de la misma raíz (theomai: yo represento). Los héroes de las leyendas son representantes de ciertos valores sociales por excelencia que se desenvuelven en la trama según lo que convenga representar.



Figura 2.- Stonehenge: representación del fenómeno.

Así pasa con los elementos constituyentes del fenómeno: El suelo arenoso deviene un plano y las marcas sobre él, líneas; el cerco, circunferencia; la estaca, un centro. Se establecen relaciones entre ellos y surgen nuevos elementos: ángulos, paralelas, poliedros..., y todo ello adquiere una estructura propia, capaz de interpretar los hechos que lo generan, y otros tantos no previstos en principio.

Cuarto nivel: *la simulación*

En la actualidad, con los potentes medios informáticos de que disponemos, este proceder ha adquirido una gran relevancia. Por lo que respecta a esta práctica, existen multitud de applets en la red que reproducen el método de Buffon o el tiro al blanco, o programas para realizar la poligonización de la circunferencia. En el primer caso, permiten incrementar el número de tiradas tanto como se quiera, haciendo el recuento de manera automática y sencilla; en el segundo caso, la clave está, principalmente, en el substrato algebraico que permite elaborar el programa, algo que ya se trata aquí. Ambos son poco eficaces desde el punto de vista docente, por cuanto se reducen, simplemente, a apretar teclas; son útiles como complemento a nuestra tarea.

La simulación, sin embargo, no es algo nuevo; ya existía desde el siglo pasado la simulación de circuitos hidráulicos por medio de circuitos eléctricos, o en reproducciones mecánicas mesoscópicas de fenómenos microscópicos, o de reproducciones a pequeña escala de fenómenos a escalas mayores. No es otra cosa el método de Buffon que una simulación mecánica de lo que realmente se concibe como la probabilidad de que un segmento de cierta longitud, colocado aleatoriamente sobre un plano enrejillado, cruce esa rejilla.

Este es un nivel en parte integrado en los anteriores, pues, la experimentación, en esencia, es una simulación -con utillaje

físico, convenientemente restringida y apropiada-, de los fenómenos, como la interpretación teórica es, en cierta medida también, una simulación con objetos abstractos como protagonistas. Lo que sucede es que, generalmente, suelen producir, además, información complementaria relevante.

Planificación de tareas

Las tareas se desarrollan con un grupo de doce alumnos, de primer curso universitario de Físicas, distribuidos en seis subgrupos de dos miembros, que operan respectivamente en los seis puestos de prácticas disponibles –dos puestos por cada uno de los tres métodos¹ en sesiones de tres horas (una por semana). Los primeros 30 minutos se dedican a la explicación de los objetivos de la tarea, pudiendo completarse las medidas en 90 minutos, y quedando la hora final para la gestión, representación y discusión de los datos.

En las dos sesiones posteriores se permutan los puestos, disponiendo de una sesión final para elaboración, presentación del informe de la práctica y discusión y contraste de resultados. Esta estrategia permite trabajar con grupos de hasta 50-60 alumnos programando una sesión de prácticas por cada día de la semana, que se completa con otra hora semanal para todo el grupo en la que se exponen los conceptos generales. El cuatrimestre se cubre con otras tres prácticas de estructura y planificación similar (Fuertes, 1990; Fuertes y Alonso, 1995; Fuertes y Pérez, 1996; Fuertes y Santos, 2004).

Método operativo

Como ya se ha dicho, se intenta obtener el mejor valor posible del número π por tres métodos:

- A- la *medida física*, estableciendo relaciones longitud-diámetro y superficie-diámetro de una colección de aros (junto con una relación volumen-diámetro de una colección de bolas);
- B- la *medida gráfica*, mediante la poligonalización de circunferencias (método de Arquímedes), y
- C- la *medida estadística*, con el método de Buffon.

Los resultados que se presentan corresponden a los más óptimos de los obtenidos en los dos últimos cursos. En cualquier caso, las tareas son suficientemente sencillas como para que tales resultados sean bastante exitosos en la mayor parte de los casos. Las diferencias se manifiestan principalmente en la interpretación de los datos y la riqueza del informe y su defensa.

A-Medida física

Longitud-Diámetro

Disponemos de una colección de secciones de tubos de diámetros diversos, entre uno y doce centímetros; una cinta métrica de costurera, para medir su longitud externa y un calibre con el que se mide el diámetro –figura 3-. Los tubos tienen una pestaña para poder engarzar un extremo de la cinta métrica y poder medir la longitud. La cinta métrica tiene una apreciación nominal de un milímetro, -la *incerteza absoluta* del aparato, en lo sucesivo: ΔL (Gil y Rodríguez, 2001; cap.I). En la medida del diámetro se emplea un calibre cuya incerteza es de $\Delta D = 0,05$ mm; sin embargo, como la perfección de la redondez de los aros es limitada, la incerteza del aparato puede ser eclipsada por dicha limitación: la incerteza intrínseca de la definición del diámetro. Para obtener el mejor valor de tal magnitud, se hacen tres medidas con orientaciones distintas, hallando el valor medio D_M , al que se le asocia la incerteza de dicho promedio ΔD_M , que se calcula como la semidiferencia entre los

valores extremos de las tres medidas del diámetro: $\Delta D_M = (D_{MAX} - D_{MIN})/2$ (Gil y Rodríguez, 2001). Conviene hacer notar a los alumnos, con cierta insistencia, que estas limitaciones en el proceso de medición, no están exclusivamente condicionadas por la bondad de los aparatos, como ellos generalmente asumen.



Figura 3: Modestos utensilios para la medida de la relación de la longitud y la superficie, con el diámetro.

Los resultados de la relación entre la longitud (L) y el diámetro (D) se representan en la figura 4a, con un comportamiento lineal cuya pendiente nos da dos dígitos del número π , tal cual lo ofrece el programa; sin embargo, esta representación y la pendiente que muestra, aunque parece funcionar perfectamente a primera vista, no nos da la incerteza ni nos muestra mucho detalle. Esta incerteza del cociente longitud/diámetro, se realiza analíticamente, calculándola por el método logarítmico-diferencial²; la expresión es:

$$\Delta\left(\frac{L}{D}\right) = \frac{L}{D} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta D}{D} \right) \quad (1)$$

donde $\Delta L (= 1 \text{ mm})$ es la incerteza del aparato señalada previamente y ΔD la de la medida del diámetro, generalmente superior a la del calibre, pues proviene de la incerteza asociada al promedio de las tres medidas del diámetro, y es del orden de 0,5 mm.

En la figura 4b se representa el cociente L/D frente al diámetro, con la incerteza correspondiente así calculada. Es de interés insistir en la diferencia entre ambas representaciones; aquí se ve el cociente realizado, donde se añaden también las barras de error de cada aro y se observa que decrecen con el tamaño. En cualquier caso, en promedio, la incerteza es del orden del 1% y afecta ya al segundo dígito de π . Más adelante, en otro apartado, se

analiza con algo más de detalle este comportamiento.

Superficie-Diámetro

Para la medida de la relación superficie-diámetro, operamos de dos formas: a) una directa y b) una medida indirecta –figura 5-, aprovechando la ocasión para poner de manifiesto estas dos formas básicas de obtener una medida (Fuertes y Alonso, 1995).

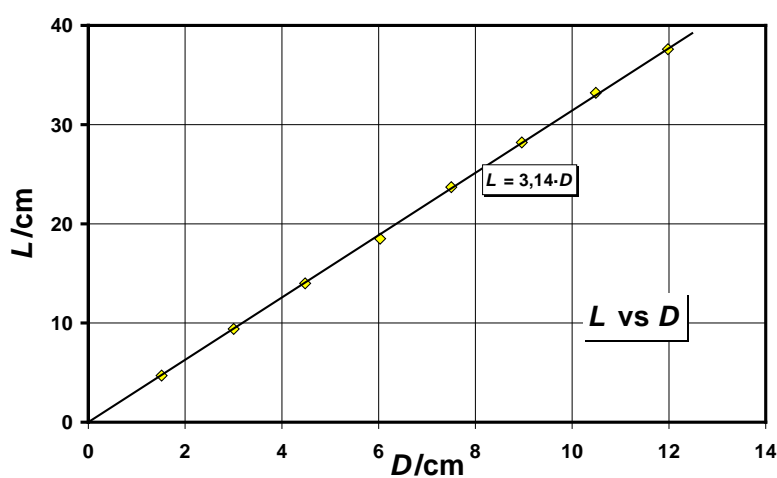


Figura 4a.-Representación de la longitud frente al diámetro para los distintos aros.

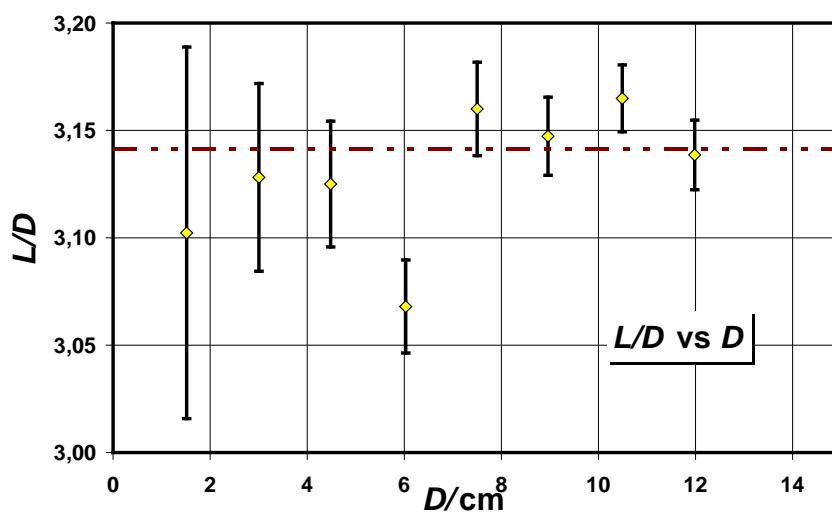


Figura 4b: Cociente L/D frente al diámetro con su incerteza.

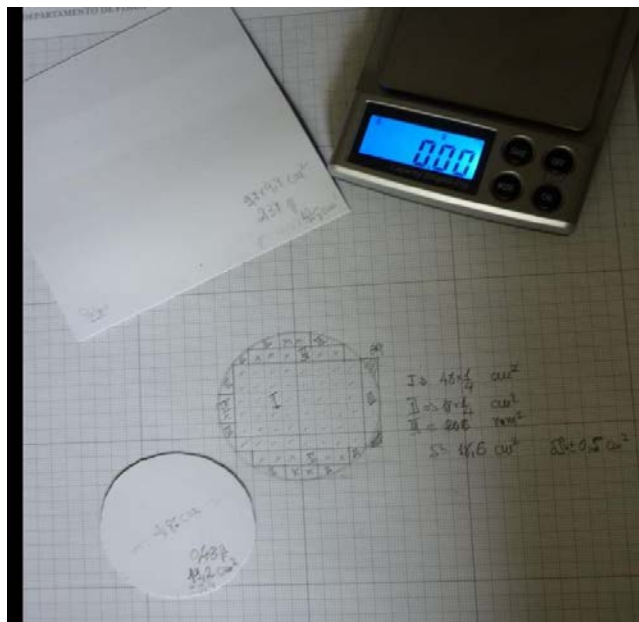


Figura 5: utensilios para la medida de la superficie

i) Medida directa.

La medida directa de una superficie no es algo común, ni que acepten los alumnos de una forma natural, como se aceptan otras mediciones de otras tantas magnitudes, siendo, en general, tan clara como la medida directa de una longitud. Se trata de comparar la superficie implicada con una superficie patrón y ver cuántas veces está contenida en la primera.

Se dibuja cuidadosamente, para ello, el contorno de cada aro sobre papel milimetrado, y después se van contando pacientemente los cuadraditos unidad -1 mm^2 - que cubre, abarcando inicialmente sectores lo más grandes posibles, y después completando el círculo con sectores de superficie decreciente. Sólo se necesita paciencia y concentración, lo cual no es poco

ii) Medida indirecta.

Para la medida indirecta se dibuja ahora el contorno sobre una cartulina rectangu-

lar, de la que previamente hemos medido sus dimensiones y hemos pesado con una báscula de joyero de incerteza 0,01 g, pudiendo así calcular su densidad superficial, con este dato, recortando el círculo y pesándolo, calcular su superficie. Para operar con más eficacia se empieza por el aro más grande, y después, se van recortando de éste los restantes, en tamaño decreciente.

iii) Resultados y discusión de las medidas directas e indirectas de la relación superficie-diámetro.

Los resultados obtenidos se representan en la figura 6a, que se ajusta perfectamente a una parábola, y la linealización correspondiente, en la figura 6b.

Se evidencia así la dependencia de la superficie con el cuadrado del diámetro, donde la pendiente de la recta, según el programa, tiende a $\pi/4$. Pero, como en el caso anterior, es necesaria una nueva representación –figura 6c- para percibir más detalladamente cómo evoluciona la

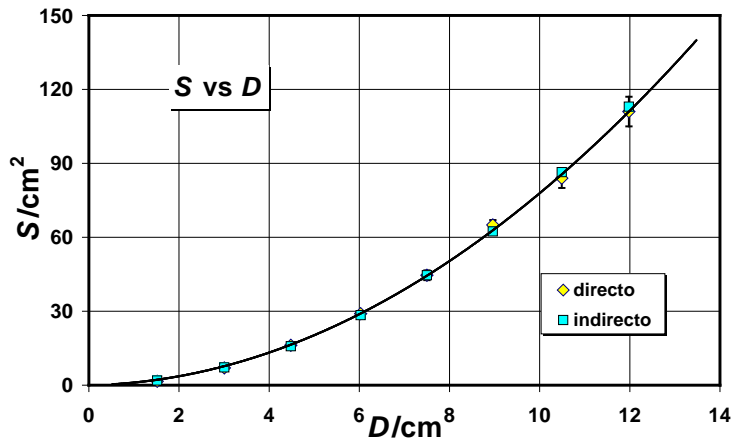


Figura 6a: Representación superficie-diámetro

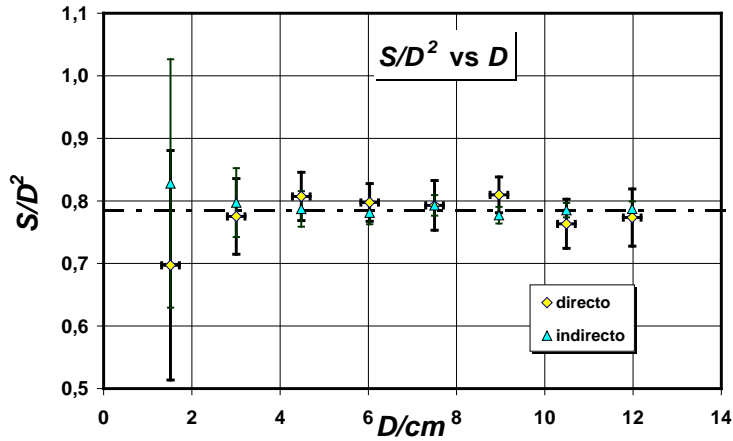


Figura 6b: linealización de la figura 6a

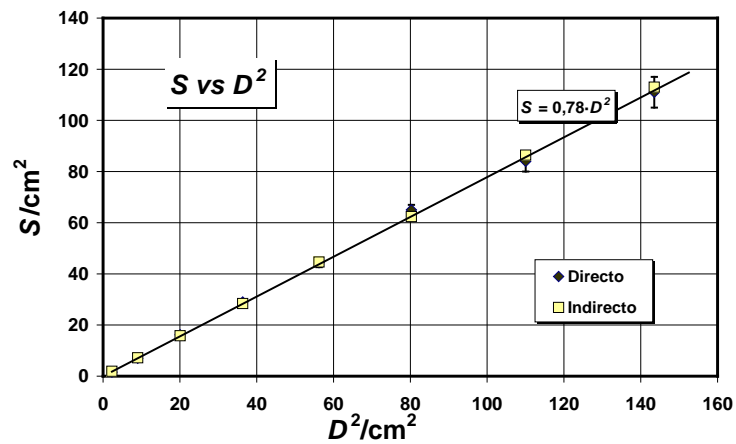


Figura 6c: Cociente S/D^2 frente al diámetro, con su incerteza.

relación y su incerteza con el diámetro. En forma similar a la anterior, ésta se obtiene analíticamente de la relación:

$$\Delta\left(\frac{S}{D^2}\right) = \frac{S}{D^2} \left(\frac{\Delta S}{S} + \frac{2\Delta D}{D} \right) \quad (2)$$

donde ΔD es la incerteza del diámetro, ya conocida, y ΔS es la incerteza de la superficie. Para el método directo, es la que resulta de contar los cuadraditos (mm^2) que no están ni dentro ni fuera de la circunferencia, es decir, los que son cruzados por la línea. Para el método indirecto, el que resulte del cálculo correspondiente de la expresión de la que se obtiene, estando implicados la incerteza de la báscula y la del diámetro del círculo. Los datos así calculados son similares; sin embargo, no lo son las *fiabilidades* respectivas de ambos tipos de medidas. La fiabilidad del método directo, en el que está implicado el recuento de un sinnúmero de cuadraditos, deja mucho que desear. Buen momento para matizar la diferencia entre los conceptos de incerteza y fiabilidad de una medida y/o método-.

Volumen-Diámetro

Disponemos de varias canicas entre uno y tres centímetros diámetro, a las que me-



Figura 7: utensilios para la medida de la relación volumen/diámetro.

dimos su volumen por desplazamiento en probetas o vasos de precipitado (figura 7), y su diámetro como el valor medio de tres medidas realizadas con un calibre.

La esfericidad de las canicas es bastante notable por lo que la incerteza del diámetro medio es del orden de 0,1 mm, -un poco superior a la del calibre-; la incerteza del volumen es, en cambio, del orden de 10% ya que la probeta más precisa -de 0,5 cm^3 - sólo admite a las canicas de menor diámetro, necesitándose otra de mayor boca pero con menor incerteza -1 cm^3 - para las de diámetro mayor, o un vaso de precipitado para la más grande, también de 1 cm^3 , pero de menor fiabilidad, pues no se aprecia con buena claridad el enrase.

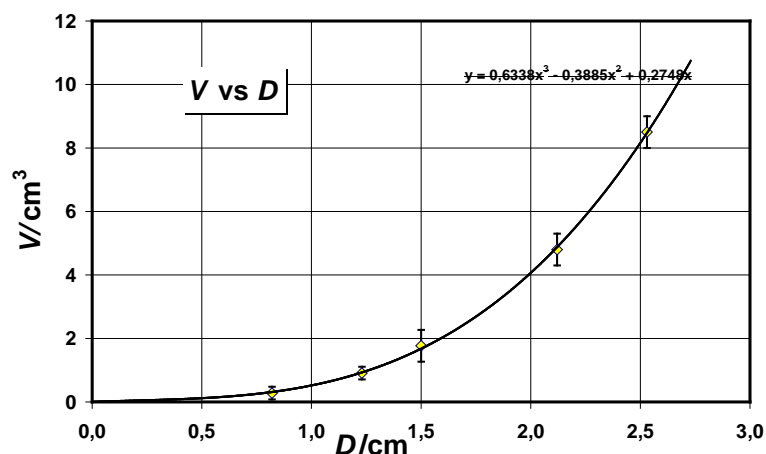


Figura 8a: representación del volumen frente la diámetro.

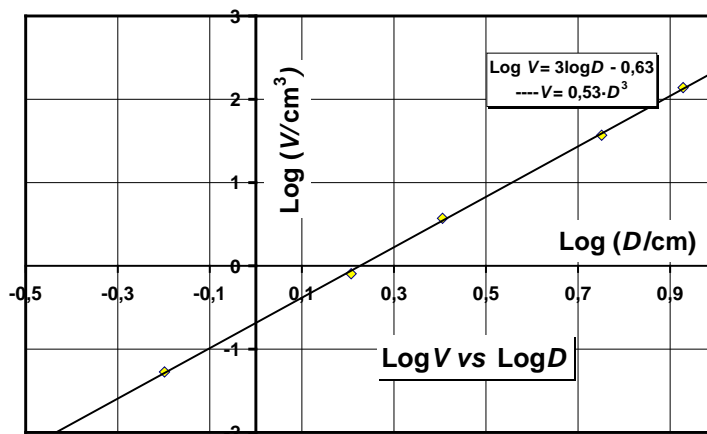


Figura 8b: Representación bilogarítmica para la obtención del exponente.

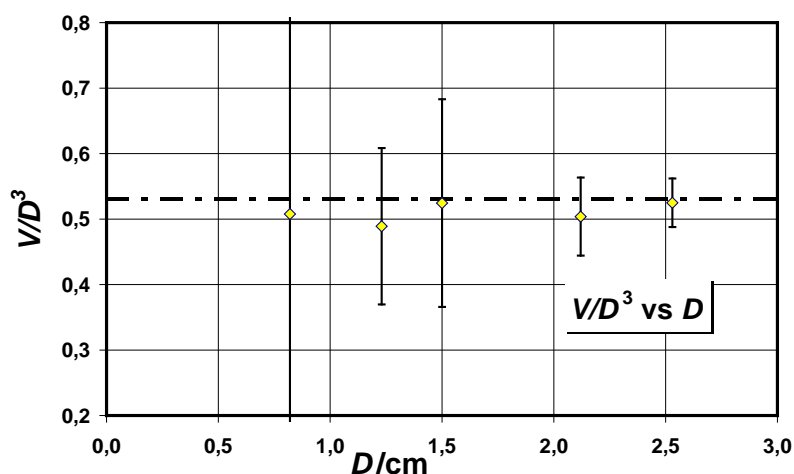


Figura 8c.-Cociente V/D^3 con su incerteza.

En cualquier caso, va quedando claro que un –aparente- mal resultado convenientemente justificado es más valioso que uno bueno sin explicación alguna.

La representación de los datos se muestra en la figura 8a. El programa nos da, en general, una expresión polinómica compleja, dada la incerteza mencionada de las medidas del volumen. Para justificar la expresión monómica esperada se hace una nueva representación doble-logarítmica – figura 8b-. Es una buena ocasión para introducir este tipo de representaciones y su utilidad en la gestión de datos.

Con esta dependencia, se puede hacer una nueva representación de la relación del volumen con el cubo del diámetro, similar a las de los dos apartados previos – figura 8c-; dicha relación, aunque con una incerteza notable, se agrupa en torno a un valor medio de 0,53.

La incerteza de la relación se calcula analíticamente de la expresión (3):

$$\Delta\left(\frac{V}{D^3}\right) = \frac{V}{D^3} \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{3\Delta D}{D} \right) \quad (3)$$

Esta expresión fue obtenida por el método logaritmo-diferencial como en los dos

casos anteriores. Curiosamente, la mayor es la de la canica pequeña, cuyo volumen había sido medido en la probeta más precisa; una muestra clara de la diferencia entre la incerteza absoluta y relativa y de cómo evoluciona la incerteza total de una medida obtenida en función de otros parámetros, como se percibe de la lectura adecuada de la expresión (3).

Síntesis y discusión de las tres relaciones

La comparación de los resultados obtenidos de las mediciones respectivas de la longitud, superficie y volumen, con el diámetro, se muestra en la figura 9a.

A medida que la dimensión crece, esa relación va decreciendo. Es el momento de explorar más allá de los límites físicos de nuestra percepción: esta actividad concreta produce un gran entusiasmo, realmente, entre los alumnos, que hay que tratar de dirigir.

Para ello se los va orientando hacia un nivel más abstracto, postulando el comportamiento de cuerpos virtuales –hiperesferas en dimensiones superiores, siguiendo la tendencia que marcan nuestros datos, a través de una nueva representación gráfica –figura 9b-. Definiendo, en cualquier dimensión N , un volumen genérico $V(N)$, que dependa de la potencia ené-

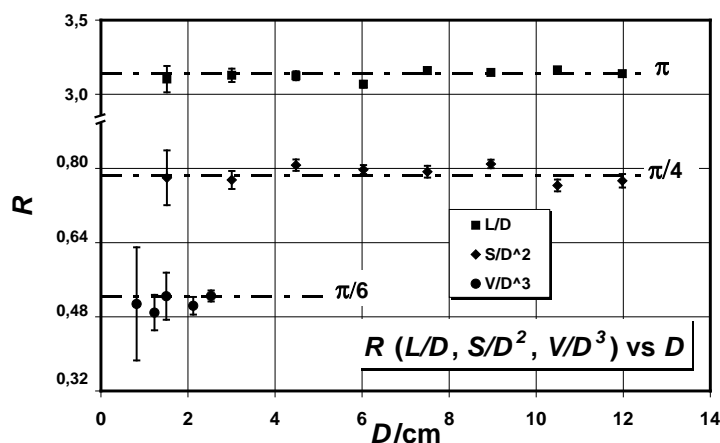


Figura 9a: gráfica resumen de los tres tipos de mediciones

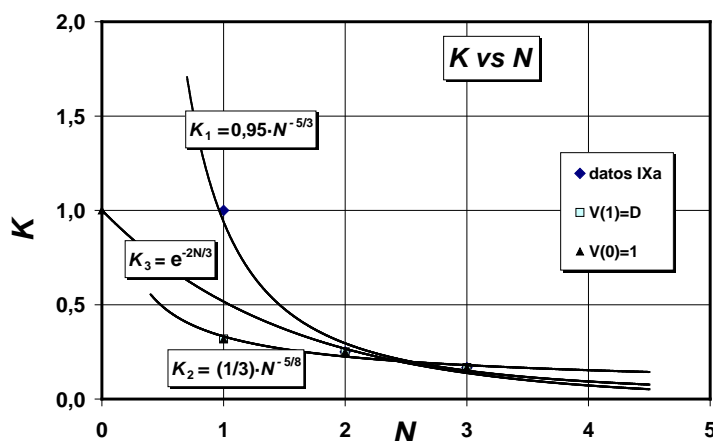


Figura 9b: tendencia del factor dimensional

sima del diámetro multiplicada por π , y un factor $K(N)$ característico de la dimensión, incluyendo la superficie del círculo como ‘volumen de orden 2’: $S=V(2)$, y la longitud de la circunferencia como ‘volumen de orden uno’: $L=V(1)$, de forma que:

$$V(N) = K(N)\pi D^N \quad (4)$$

La representación gráfica de los tres datos del factor dimensional $K_1(N)$ correspondientes a la figura 9a: $K(1)=1$, $K(2)=1/4$ y $K(3)=1/6$, frente a N , (figura 9b -datos 9a-) nos permite obtener una línea de tendencia por la que postular cuál sería el volumen de cualquier hiperesfera:

$$V(N) = K_1\pi D^N = 0,95N^{5/3}\pi D^N \quad (5)$$

Ese factor, además, nos da una idea de cómo es la ocupación parcial del espacio de una hiperesfera frente a la ocupación

total de un hipercubo cuyo volumen es D^N (figura 9c), a través de la relación entre ambos volúmenes: $V(N)/D^N=0,95\cdot\pi\cdot N^{-5/3}$, de lo que se deduce que, el apilamiento de hiperesferas para altas dimensiones deja el espacio cada vez más vacío, ya que al crecer N la relación anterior tiende a cero.

Sin embargo, hay que notar que volumen de dimensión uno no es realmente la circunferencia, ya que para dibujarse ha de invadir una segunda dimensión –figura 9c- por lo que no corresponde a la longitud de la circunferencia sino al diámetro $V(1)=D$. En este caso, el apilamiento de ‘esferas’ de una dimensión llena totalmente el espacio. Una nueva representación con el dato primero corregido nos permite obtener otra línea de tendencia $K_2(N)$: [figura 9b, $V(1)=D$].

$$V(N) = K_2\pi D^N = (1/3)N^{5/8}\pi D^N \quad (6)$$

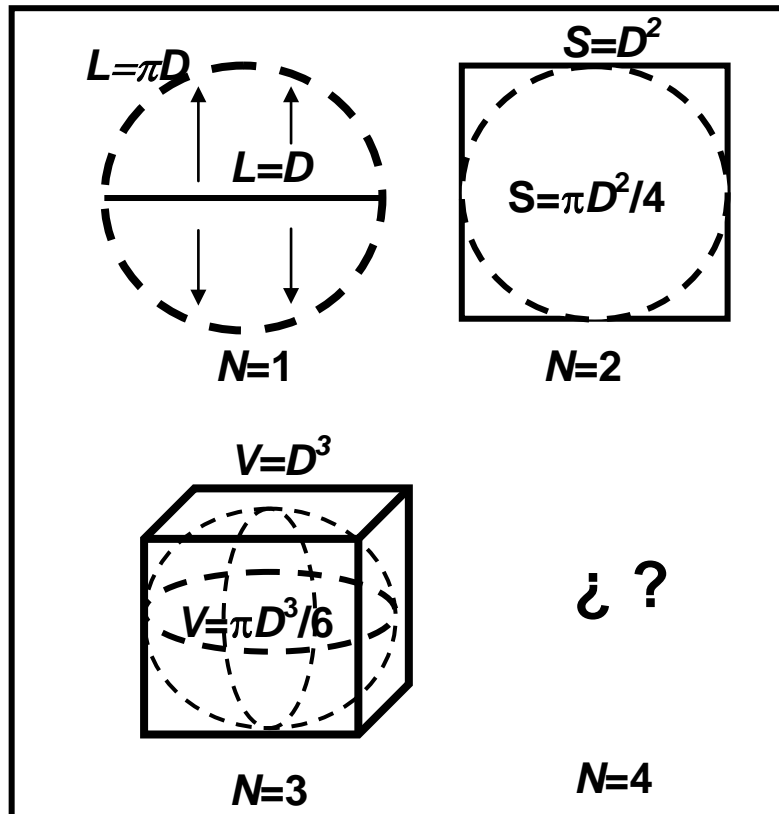


Figura 9c: comparación de la ocupación del espacio

Además, surge la duda sobre tal ajuste, proponiéndose una exponencial de manera que el ‘volumen del punto’ sea uno: $V(0)=1$, para evitar la tendencia al infinito en la dimensión cero. Así (figura 9b - $V(0)=1$ -), se obtiene la siguiente expresión:

$$V(N) = K_3 \pi D^N = e^{-2N/3} \pi D^N \quad (7)$$

Sin embargo, esta generalización con sólo dos puntos fiables y otros dos supuestos, no es muy satisfactoria. Por ello, es el momento de acceder al nivel algebraico y proponer el cálculo del volumen de la hipersfera mediante integración y, una vez obtenido, contrastar con los valores previstos. La tarea directa es compleja e inadecuada en este curso; no obstante, el cálculo a través del cuadrado de la integral gaussiana [ej.: Mungan, 2010] es relativamente accesible, y se puede presentar, pues además, la expectación creada ante los alumnos es significativa, lo que los hace más receptivos a la exposición. La solución bien conocida es:

$$V(N) = \frac{(D/N)^N \pi^{N/2}}{\Gamma(N/2 + 1)} \quad (8)$$

$$V(N) = \frac{(D/N)^N \pi^{N/2}}{\Gamma(N/2 + 1)} \quad (8)$$

donde $\Gamma(N/2 + 1)$ es la función factorial gamma. Sin necesidad de entrar en detalles, se puede proponer una solución recursiva:

$$V(N) = V(N - 2) \left(\frac{\pi}{2N} \right) D^2 \quad (9)$$

con $V(0)=1$ y $V(1)=D$, que nos permite obtener el factor $K(N)$ y compararlo con las propuestas derivadas de los ajustes de los (pocos) datos experimentales previos. Tales datos se muestran en la Tabla I, donde los que provienen de los ajustes se han aproximado al inverso del número entero más próximo al resultado real, toda vez que tales resultados se obtienen de una extrapolación limitada.

Como se puede ver, más allá de los dos puntos seguros, la discrepancia se va haciendo cada vez más notable en cualquiera de las tendencias. Se comprueba, sin embargo, como una limitación física se resuelve con relativa facilidad en el nivel algebraico.

Tabla 1: Comparación de los factores $K(N)$ de diferentes aproximaciones

K(N)				
N	0,95·N-5/3	(1/3)·N-5/8	EXP(-2N/3)	REAL
0	∞	∞	1	1
1	1	1/3	1/2	1/ π
2	1/3	1/4	1/4	1/4
3	1/6	1/6	1/7	1/6
4	1/10	1/7	1/14	$\pi/32 \approx 1/10$
5	1/15	1/8	1/28	$\pi/60 \approx 1/19$
6	1/20	1/9	1/55	$\pi^2/384 \approx 1/39$
7	1/26	1/10	1/106	$\pi^2/840 \approx 1/85$
8	1/32	1/11	1/207	$\pi^3/6144 \approx 1/198$
9	1/39	1/12	1/403	$\pi^3/15120 \approx 1/488$
10	1/47	1/13	1/786	$\pi^4/12880 \approx 1/1262$

Curiosamente, por otra parte, el protagonista principal de toda la acción, la definición de número π como relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, queda excluido de esta generalización, creándose en este nivel geométrico el volumen genérico de dimensión *uno* con valor D , y el del punto, con valor *uno*, lo que sugiere intrigantes preguntas que dejan abiertas las puertas de la Topología para cursos superiores.

Evolución de la incerteza de las medidas

Por alguna extraña razón, quizá debido a los programas de cálculo actuales que permiten obtener en cualquier operación un buen número de decimales, es muy difícil hacer ver a los alumnos que cada dato obtenido está supeditado a una precisión determinada, condicionada por la incerteza de los instrumentos, el procedimiento, y algunas otras variables, aunque se halla explicado previamente (Gil y Rodríguez, 2001). La calidad de la medida, se percibe en un principio, como algo un tanto ajeno; el redondeo de los resultados,

como mucho, se supedita a la incerteza de los instrumentos. Es por ello necesario redundar en el cálculo de la incerteza de la medida para mostrar que no sólo los instrumentos condicionan el resultado final.

La aplicación del método logarítmico-diferencial a las expresiones implicadas es sencilla y sólo es problemático la lectura adecuada de las ecuaciones resultantes y su contraste con la realidad (Romer, 1993). Ya que obtenemos π de la relación entre la longitud (L) y el diámetro (D), ambos medidos con las incertezas respectivas ΔL y ΔD de los aparatos empleados o del promedio, aplicando el método logarítmico-diferencial se tiene:

$$\Delta\pi / \pi = \Delta L / L + \Delta D / D \quad (10)$$

Podemos expresar la incerteza absoluta y relativa sólo en función del diámetro y la incerteza de los aparatos implicados o del valor medio:

$$\Delta\pi = (1/D)(\Delta L + \pi \Delta D) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\pi} = (1/D)(\Delta L / \pi + \Delta D) \quad (12)$$

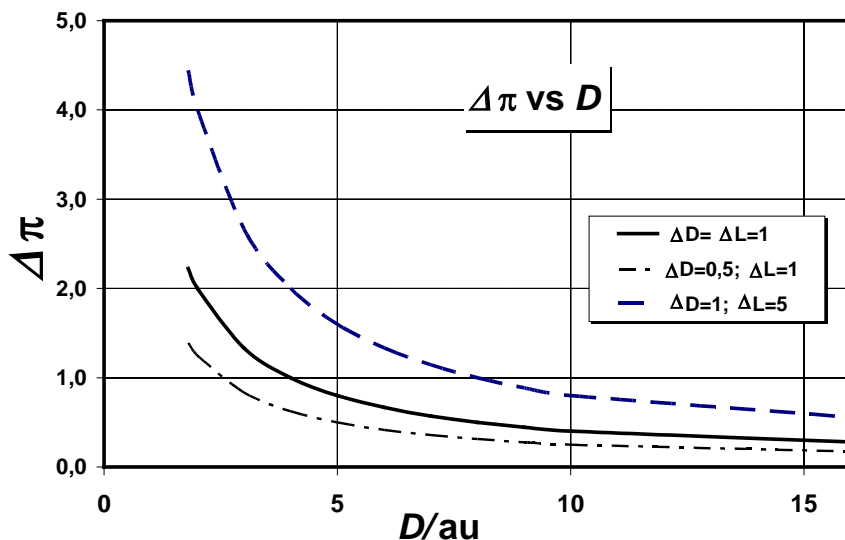


Figura 10a: Evolución de la incerteza absoluta con el diámetro

Aprovechando la facilidad que da la hoja de cálculo, se hace una representación gráfica de las relaciones (11) y (12) para así mejor percibir su tendencia -Figuras 10a y 10b, respectivamente- De ahí, se concluye, que no sólo la incerteza de los instrumentos -cinta métrica, calibre- condicionan la incerteza de la medida, sino que depende notablemente del tamaño del aro, así como de la perfección en su redondez. La conclusión es clara: para obtener más decimales de π , en la medida física, aunque se pudiera mejorar algo la incerteza de los instrumentos, es más contundente la mejora cuando el tamaño de los aros se hace mayor y más perfectos. Pero los aros más grandes, ya no se puede medir su diámetro con el calibre; además, no ha lugar pues su perfección es más difícil con más tamaño y por ello la incerteza asociada al diámetro superaría siempre a la incerteza del calibre.

Para las medidas de superficie y el volumen se opera de forma similar y se tiene una conclusión parecida:

$$\Delta\pi_s = (1/D)(\Delta S + 2\pi \Delta D) \quad (13)$$

y

$$\Delta\pi_v = (1/D)(\Delta V + 3\pi \Delta D) \quad (14)$$

de las que también se puede obtener información sobre su mejora y los problemas de cierto interés que pueden aparecer, para someterlos a discusión en la sesión de presentación.

B- Medida geométrica

Medida de perímetros.

El método de Arquímedes de la poligonalización de circunferencias [Fuertes y Pérez, 1998], de sobra conocido, muestra en este contexto, sin embargo, dos aspectos que conviene resaltar: Por una parte, el que el procedimiento de medida pasa del un nivel físico a un nivel geométrico; éste permite prescindir de los aros, los cuales

en la realidad pueden ser más o menos perfectos, y reemplazarlos por circunferencias trazadas sobre papel con un compás, con una perfección más accesible

Por otra parte, aunque parezca que el ‘cerco a la circunferencia’ se haga en este caso por medio de segmentos limitados en tamaño, por contraste con la continuidad de la cinta métrica, esta continuidad es sólo aparente pues, como todo instrumento de medida, tiene una limitación condicionada por la incerteza del aparato empleado. En la práctica, con la cinta métrica se realiza una ‘poligonalización virtual’ circunscrita -figura 11- con un polígono de lado igual a la incerteza ΔL de la cinta.



Figura 11: Metro de carpintero y poligonalización de la circunferencia.

Cada alumno del grupo dispone de una hoja de papel milimetrado, sobre la que se dibuja una circunferencia de 10 cm de diámetro, a la que se le añaden dos diámetros perpendiculares entre sí. Uno de los miembros del grupo dibuja un cuadrado inscrito, uniendo las intersecciones de los diámetros con la circunferencia, y después, con escuadra y cartabón, mediante paralelas tangente, construye el cuadrado circunscrito -figura 12-. El otro alumno del grupo actúa en forma similar, pero construyendo primero un triángulo inscrito mediante escuadra y cartabón, y después, otro circunscrito trazando paralelas tangentes de cada lado.

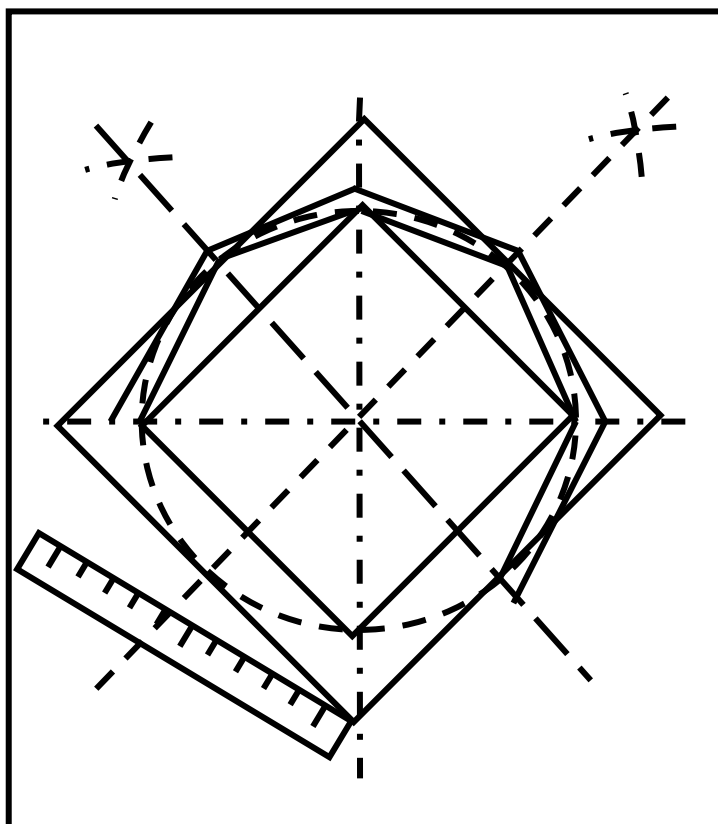


Figura 12: Construcción de polígonos.

A continuación se mide la longitud de los lados respectivos, inscrito y circunscrito, y se anotan los valores que nos permitan después calcular los perímetros correspondientes. Conviene comprobar que las construcciones de los polígonos son, cuando menos, tan regulares como la incerteza de la medida de los lados -1 mm en este caso-; para ello es necesario medir todos los lados y ver que, en efecto, su diferencia es como mucho de 1 mm; de lo contrario, el valor del lado debería ser el promedio de la medida de todos, con una incerteza obtenida de dicho promedio, superior a 1 mm obviamente.

De los polígonos de tres y cuatro lados se construyen los de seis y ocho, respectivamente, hallando la mediatriz de cada

uno de sus lados. Actuando como antes se obtienen los valores de los lados respectivos. Con una división posterior se obtienen los polígonos de doce y dieciséis lados; con cierta paciencia y diligencia -necesarias en cualquier trabajo de laboratorio- pero sin dificultad. En fin, por la otra cara de papel, se dibujan después los polígonos de cinco y siete lados, por los métodos bien conocidos, de los que se pueden obtener nuevos polígonos de diez, catorce y veinte lados.

El proceso podría continuar, pero no es posible ya un trazado claro y regular con circunferencias de este tamaño. Es evidente que partiendo de un diámetro superior, de 15 o 20 cm se podrían alcanzar polígonos de hasta 30 lados con nitidez aceptable,

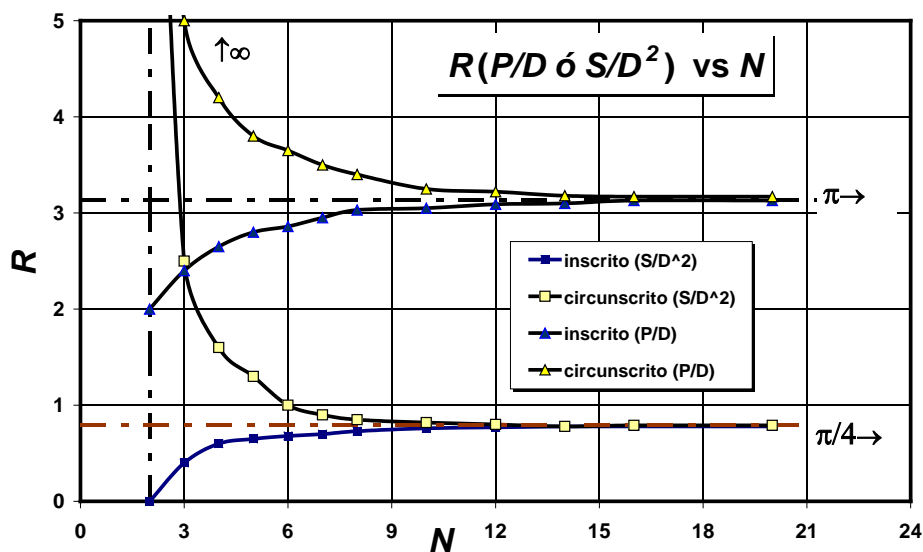


Figura 13: Relación perímetro/diámetro y superficie/diámetro de los distintos polígonos.

pero con este trazado es suficiente para tener una idea básica del funcionamiento del método, quedando la ampliación como tarea complementaria para los grupos que lo deseen.

Medida de superficies

Para hallar las superficies respectivas (S) sólo es necesario medir la apotema (A) de cada uno de los polígonos inscritos –ya que la de los circunscritos es precisamente el radio de la circunferencia. El valor correspondiente de dichas superficies se programa en la hoja de cálculo sin más que aplicar las expresiones respectivas:

$$\begin{aligned} S_I(N) &= P_I(N)(A_I / 2) \\ S_C(N) &= P_C(N)(D / 4) \end{aligned} \quad (15)$$

siendo P_I y P_C los perímetros inscritos y circunscritos respectivos hallados en el apartado anterior.

Resultados y discusión (medidas geométricas)

Los datos obtenidos se representan en la gráfica de la figura 13, donde en el eje Y

se representan las relaciones (R): perímetro/diámetro y superficie/diámetro al cuadrado y, en el eje X, el número de lados (N). La convergencias respectivas de ambos pares de gráficas hacia π y $\pi/4$ se muestran con claridad.

En dicha gráfica hay un aspecto interesante que subrayar: se trata del comportamiento de las líneas de tendencia en el límite inferior para $N=2$: un ‘polígono de dos lados’, que no tiene sentido a primera vista. Para el caso del perímetro de tal polígono virtual de dos lados, la tendencia es la de un valor infinito, para el circunscrito, y un valor de $2D$, para el inscrito. La figura 14 permite explicar este comportamiento.

En la parte superior –14A-, se representa la forma en la que de triángulo se obtendría un cuadrado, cortando uno de sus vértices e incorporando un nuevo lado, haciendo hueco convenientemente al nuevo lado entre los tres restantes. En la parte inferior -14B- se actúa de forma contraria, con la eliminación de uno de los lados del triángulo, dilatando los lados y empalmando los vértices: el resultado en esta figura

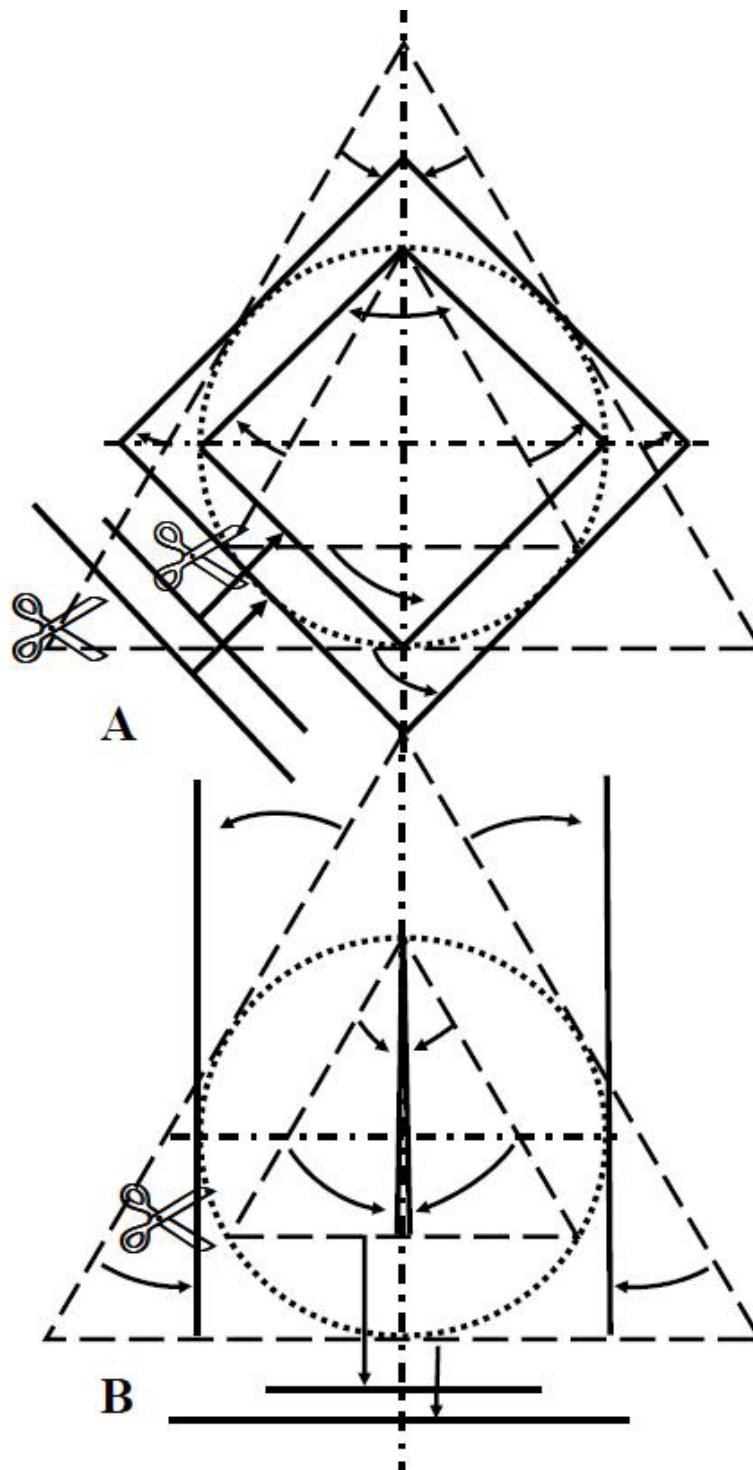


Figura 14:A -Construcción de un cuadrado incorporando un lado a un triángulo.
 B -Construcción de un 'polígono' de dos lados eliminando un lado de un triángulo

es que nos queda un polígono virtual de dos lados, donde el inscrito deriva en dos diámetros superpuestos, en tanto que, el circunscrito, en dos rectas paralelas de longitud infinita. El perímetro del primero tiende pues a $2D$, mientras que el del segundo a infinito, como corresponde a la tendencia de la figura 13.

Para el caso de la superficie se explica igualmente cómo en el circunscrito tiende su valor a infinito –las dos rectas paralelas delimitan una superficie infinita–, en tanto que la del inscrito tiende a cero: los dos diámetros superpuestos no delimitan superficie alguna.

Salta a la vista en la construcción que la longitud de los lados se va haciendo menor al crecer el número de lados del polígono, hasta un momento en el que se nos hace físicamente imposible continuar con el dibujo. En teoría, este límite se alcanza con el trazado de la circunferencia, al que corresponden infinitos lados y longitud de cada uno cero. Curiosa mezcla que da un resultado finito y perfectamente contempla-

ble en el papel. Es evidente que la longitud del lado va con la inversa del número, por ello, como comprobación complementaria, representamos la evolución de la longitud de los lados con N , como se muestra en la figura 15. Se ha representado la hipérbola $D\pi/N$ también, para ver si esta sencilla tendencia pudiera ser la adecuada, y se ve que sólo lo es a partir de un cierto valor de N . La interpretación geométrica nos da la solución.

Partiendo de los dibujos de los polígonos, divididos en N triángulos isósceles a partir de su centro, y apoyándose en la definición del seno y la tangente en uno de esos triángulos, se puede expresar algebraicamente el lado (A) de los polígonos, en función del diámetro de la circunferencia. Estas expresiones, fácilmente deducibles, son:

$$\begin{aligned} \Lambda_I(N) &= D \operatorname{sen}(\pi / N) \\ \text{y} \quad \Lambda_C(N) &= D \tan(\pi / N) \end{aligned} \quad (16)$$

que se representan en la gráfica 15, encajando a la perfección.

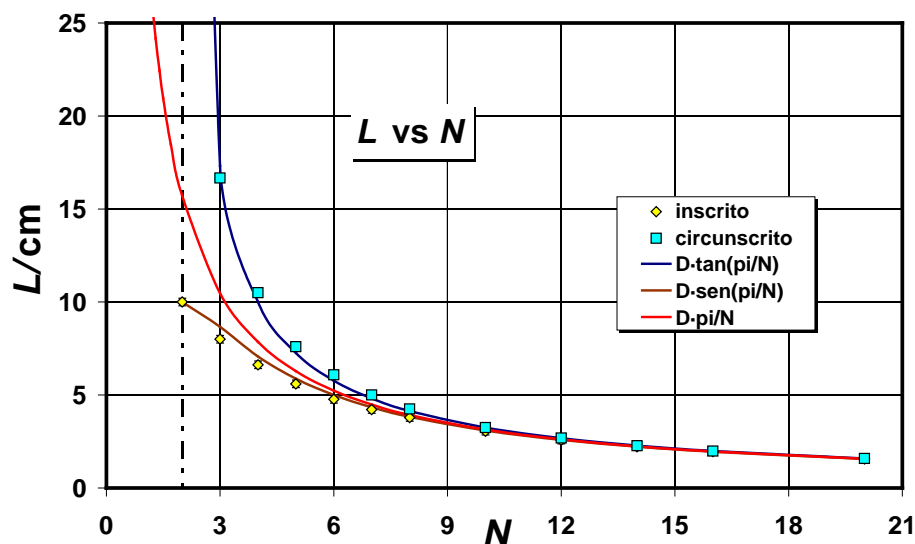


Figura 15: Decrecimiento de la longitud de lado de los polígonos

Multiplicando sendas expresiones por N se obtienen los perímetros respectivos:

$$\begin{aligned} P_I(N) &= ND \operatorname{sen}(\pi / N) \\ \text{y} \quad P_C(N) &= ND \tan(\pi / N) \end{aligned} \quad (17)$$

Expresiones que permiten interpretar las dos curvas superiores de la figura 13.

En el límite, para un polígono de infinitos lados, ambos perímetros confluyen con la longitud de la circunferencia:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_I(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_C(N) = L \quad (18)$$

Puesto que, tanto el seno como la tangente tienden al arco cuando el ángulo tiende a cero, que es lo que sucede al crecer N , en el límite se tiene el valor correcto; esa extraña asociación previa del infinito con el cero queda resuelta:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} ND \operatorname{sen}(\pi / N) &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} ND \tan(\pi / N) &= ND\pi / N = D\pi \end{aligned} \quad (19)$$

Una vez más, se evidencia la eficacia de un nivel superior, así como una percepción clara del concepto de límite.

En fin, si los perímetros se multiplican por la mitad de la apotema se obtiene el valor de las superficies (S) correspondientes, que se ajustan de forma clara a las curvas inferiores de la figura 13:

$$\begin{aligned} S_I(N) &= (1/8)ND^2 \operatorname{sen}(2\pi / N) \\ S_C(N) &= (1/4)ND^2 \tan(\pi / N) \end{aligned} \quad (20)$$

Estas expresiones confluyen, igualmente en el límite, al valor de la superficie del círculo: $S_I(\infty) = S_C(\infty) = (\pi/4) \cdot D^2$.

Para la sesión última, es de cierto interés introducir la discusión sobre la posibilidad de operar con la esfera, de igual forma que se ha hecho con la circunferencia. Esto es, ‘poliedrizar’ su superficie para, a partir de ahí, acercarse de forma similar, tanto a su superficie como a su volumen; los sólidos platónicos y, sobre todo, el balón de fútbol, terminan apareciendo con facilidad -cosa muy del gusto

de los alumnos-, pero es más difícil hacerles ver que la ‘teselación’ adecuada de la esfera es una de las fuentes del cálculo diferencial e integral. Sin alcanzar ninguna solución se crea, sin embargo, una expectativa interesante para las asignaturas de Matemáticas en próximos cursos.

C- Método de Buffon.

Esta es, a primera vista, una tarea tediosa y un tanto frustrante, pues la incerteza no supera el primer decimal. Sin embargo, hay que insistir en que el objetivo básico no es la búsqueda del resultado sino la exploración y el examen de los procesos implicados, sus limitaciones y sus posibilidades de mejora. Además, es necesario hacer ver que, en la investigación real, la paciencia y perseverancia son virtudes obligadas. En cualquier caso, siempre es posible jugar después de realizar la práctica con los applets apropiados de este método y el de Montecarlo.



Figura 16: Plataforma para el método de Buffon

El método de Buffon se basa en la probabilidad de que un determinado segmento de longitud L cruce o no cruce las líneas de un entramado, separadas una distancia D (ej.: Schuster, 1974). El cálculo establece que la relación entre el número total de segmentos N y el número P que cruzan las líneas es:

$$P/N = 2L/\pi D \quad (21)$$

Puesto que hemos elegido $L=D$ de la expresión 21 se tiene:

$$\pi \rightarrow 2N/P \quad (22)$$

para un número suficiente de tiradas.

Para complementar este experimento, se está tratando de adaptar un difusor apropiado, que proyecte gotas tintadas sobre láminas cuadradas con un círculo inscrito. Regulando la altura desde la que se proyecta, se puede controlar el número total de ‘impactos’. La lectura de la multitud de impactos y su ínfimo tamaño son el problema principal. Las mejoras posibles se someten a debate en la sesión final y es de cierta riqueza.

Se dispone de una plataforma de 50x40cm –figura 16- sobre la que se pega una cartulina con rectas paralelas separadas 3cm; sobre ella se arrojan puntas sin cabeza de la misma longitud, en series de 30 en 30. Una vez arrojadas, se separan y se cuentan con una pinza las que cruzan las líneas y se anota el valor. En sentido estricto, se deberían arrojar primero 30, después 60 y así sucesivamente, pero por encima de 60 se produce un amontonamiento indeseado. Por ello, se arrojan primero 30, después

otras 30 que se suman al dato anterior, etc., corrigiéndose el efecto espurio anterior. Los resultados se muestran en la figura 17.

Ampliaciones

Medidas de circunferencias de gran diámetro.

Ha quedado claro, tanto en el procedimiento de la medida física como en el de la medida gráfica, que una forma posible de mejorarla notablemente es la de aumentar convenientemente el tamaño de los aros o el trazado de las circunferencias; ambas tareas se podían ampliar ligeramente desde los procedimientos originales, pero no de forma ostensible. Ni es sencillo trabajar con aros de algunos metros, ni trazar circunferencias de tamaño parecido en el papel.

Pero sí es posible salir a la calle. Con ello, regresamos al supuesto procedimiento inicial del novel investigador que se ocupó en dibujar y estudiar círculos en la arena. El eterno retorno, una vez más, tratándose de ‘ciclos’, parece obvio.

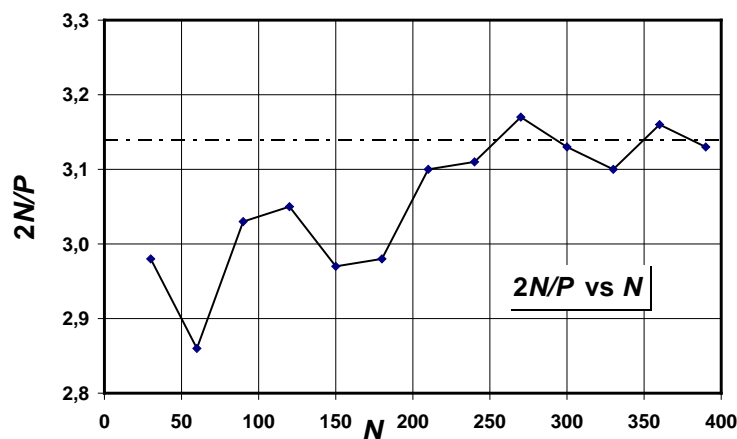


Figura 17: Resultados del método de Buffon



Figura 18a: Medida de la longitud de la circunferencia con cinta métrica



Figura 18b: Medida de la longitud de la circunferencia "a pie"

Así, por medio de una tiza y una cuerda, se trazan diversas circunferencias entre uno y diez metros de diámetro, que se mide con una cinta métrica normal, así como su longitud respectiva –figura 18a-. No es sencillo acomodar perfectamente la cinta métrica sobre la marca de la tiza, por lo que la medida no es del todo fiable. Pero podemos intentar mejorar la medición talonando pacientemente las circunferen-

cias con dos patrones distintos –pie grande y pie pequeño, en lo sucesivo -figura 18b; en definitiva, es una nueva poligonalización, con polígonos de lados respectivamente iguales al pie grande y al pequeño

Después se representan los datos de las tres mediciones y se gestionan como en el apartado *Medida Física: Longitud-Diámetro* -figuras 19, a b y c respectivamente.

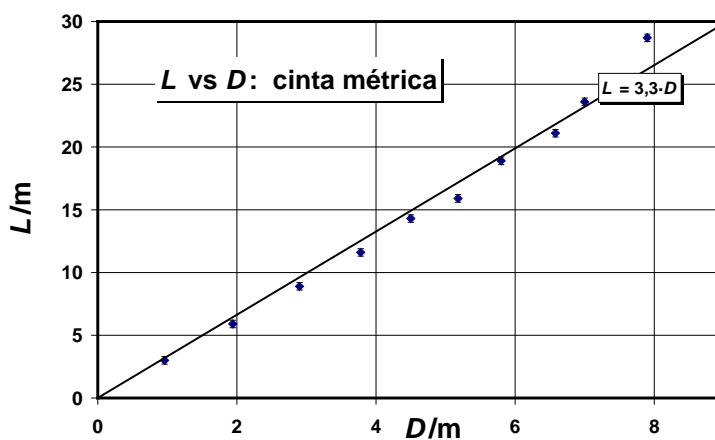


Figura 19a: Relación longitud-diámetro para las medidas con cinta métrica

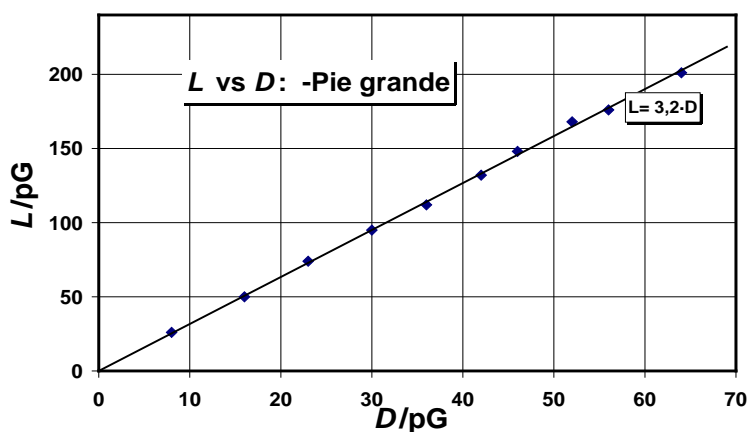


Figura 19b: Relación longitud-diámetro para las medidas del pie grande

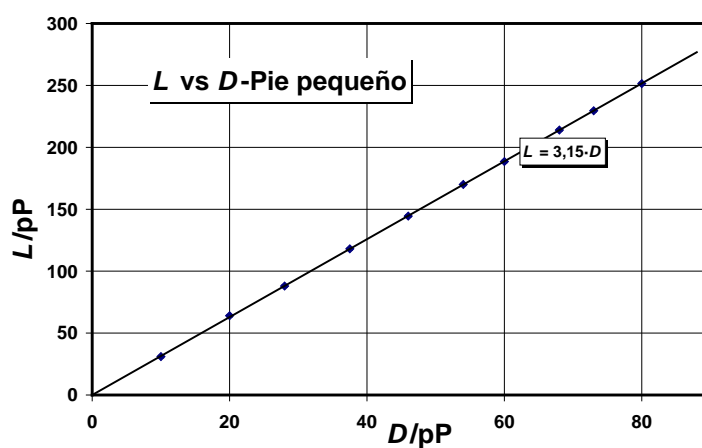


Figura 19c: Relación longitud-diámetro para las medidas del pie pequeño

Las relaciones longitud/diámetro de las tres mediciones se representan en la figura 20, incluyendo también los datos correspondientes a los aros, donde, para poder agruparlas en una misma gráfica, se han referido todas al diámetro normalizado de la circunferencia menor (D_1) de ambas colecciones.

Queda también claro que, si en lugar de dibujar las circunferencias sobre una superficie plana, sin marca alguna, se realizan sobre una superficie cubierta de baldosas, sería relativamente sencillo, aunque laborioso, hacer medidas también de la relación superficie/diámetro, que podríamos contrastar con las primitivas del apartado *Superficie-Diámetro: Medida directa*. De igual forma, pero con menor amplitud, es posible sustituir las canicas por tres o cuatro balones, uno de fútbol, otro de baloncesto, pelotas de playa, etc., y las probetas por bañeras convenientemente aforadas, comprobando hasta qué punto se podría mejorar el resultado o la tarea deviniera estéril. Toda esta ampliación, de cualquier forma, está anunciada en su eficiencia si se examinan con detalle las curvas de la figura 10a y se conjuga adecuadamente cómo evoluciona la incerteza con el diámetro –comportamiento hiperbólico-

y con la incerteza de los instrumentos –pendientes de las hipérbolas-.

Medida de ángulos y cuarto postulado.

Esta tarea es un complemento de la medida gráfica y, generalmente, se suele realizar en el tiempo restante del correspondiente al método de Buffon –la práctica más corta-, usando para ello los dibujos hechos por los grupos que están realizando la medida gráfica y que ya se suelen encontrar gestionando los datos.

Se trata de medir los ángulos correspondientes a cada polígono y representar la tendencia a medida que crece el número de lados. –figura 21-. Con ello se comprueba cómo va creciendo el valor del ángulo de manera asintótica, alcanzando en el límite, los 180° . También se representa la suma total de los ángulos del polígono, que crece indefinidamente de manera lineal, más fácilmente ajustable por el programa, de la que deducimos la individual sin más que dividir por N (en la misma gráfica de la figura 21, pero en radianes, con la escala vertical de la izquierda, con objeto de poder incorporar ambas y compararlas entre sí; es ésta una oportunidad para introducir este tipo de gráficas de escala doble y su interés).

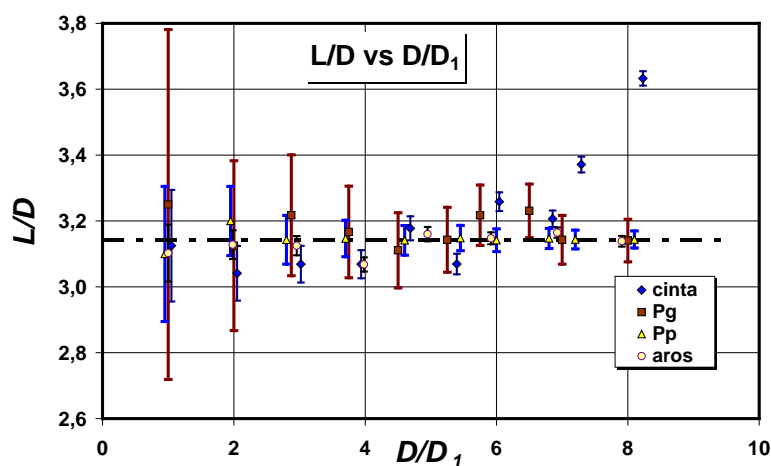


Figura 20: Comparación del Cociente L/D frente al diámetro normalizado

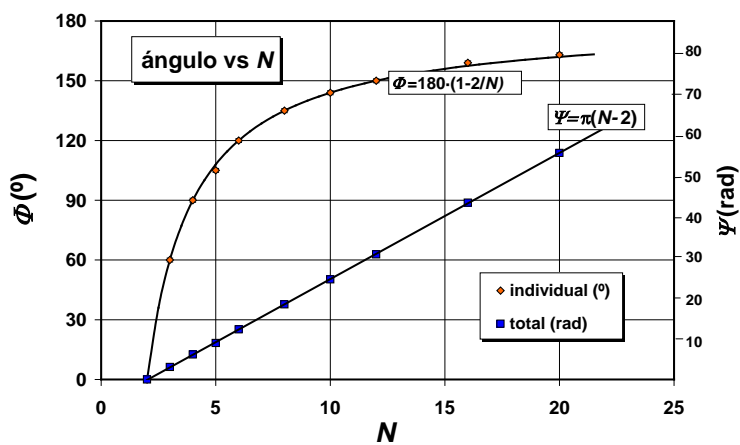


Figura 21 Representación de los valores de los ángulos de los diferentes polígonos

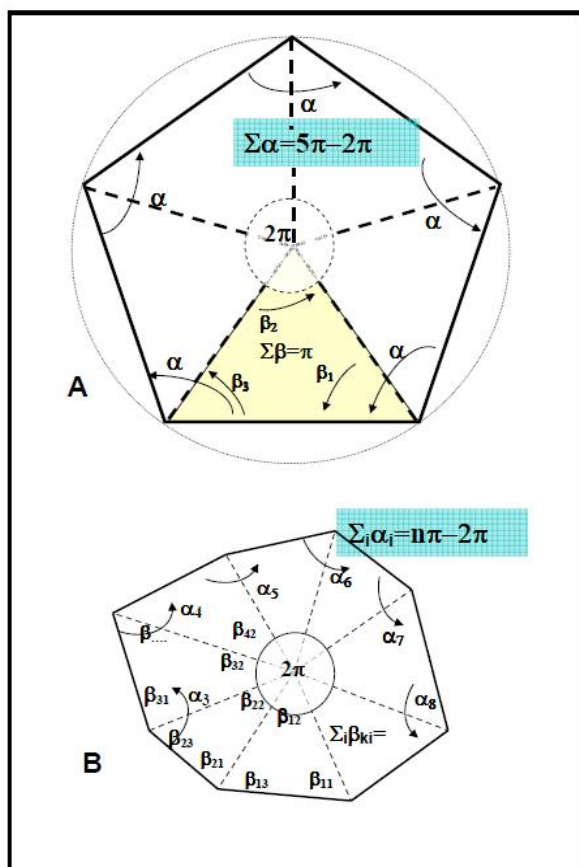


Figura 22: Comprobación de los resultados de la gráfica 19

Es interesante observar que el corte con el eje X se produce en el punto $N=2$, para ambos casos: el ángulo individual del ‘polígono’ de dos lados es cero -dos rectas paralelas- y cero es pues la suma total. Queda para el posible debate los valores negativos del ángulo para valores de $N=1$ y $N=0$.

Es también una forma de comprobar experimentalmente el cuarto postulado “la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos”, deducible de nuestra ley empírica: “la suma de los ángulos de un polígono de N lados vale $(N-2)\pi$ ”. Y, en sentido inverso, explicar nuestra ley partiendo del cuarto postulado –figura 22-. Cualquier polígono, ya sea regular 22A o irregular 22B, se puede descomponer en N triángulos partiendo de un punto interior cualquiera (en el regular, al haber un centro geométrico, éste es el óptimo). La suma total, pues, es el resultado de restar al valor de $N\pi$ la suma de los ángulos de todos los triángulos- los N ángulos en torno al punto interior, es decir: 2π . [Es interesante sugerir a los alumnos que comprueben dicha ley para algún polígono

irregular que construyan ellos a su gusto.] Una vez más, se muestra que, una interpretación teórica adecuada de los datos, suele tener validez más allá del ámbito del que ha sido obtenida.

Convergencia de series: nivel algebraico.

La función específica de esta tarea complementaria es principalmente un ejercicio de programación en la hoja de cálculo para diversas series con las que se puede calcular π . Pero también muestran cómo las limitaciones técnicas que presentan los métodos anteriores, que sólo permiten obtener como mucho dos decimales, pueden ser mejoradas en un nivel algebraico, superior, hasta límites insospechados.

Podemos servirnos de las expresiones algebraicas (17) obtenidas previamente para los perímetros respectivos, para aproximarnos al valor de π algebraicamente, mediante un programa estándar de cálculo:

$$\begin{aligned}\pi(N) &= N \operatorname{sen}(\pi / N) \\ \pi(N) &= N \tan(\pi / N)\end{aligned}\quad (23)$$

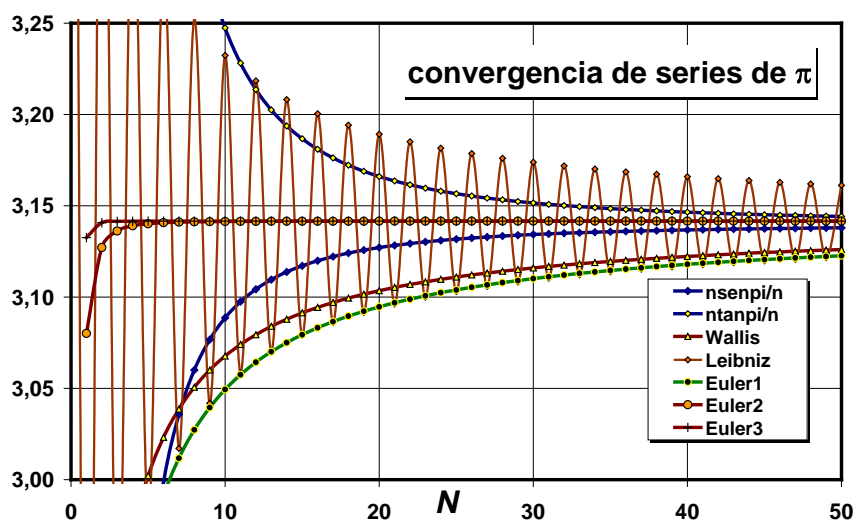


Figura 23a: Evolución de la Convergencia de las distintas series

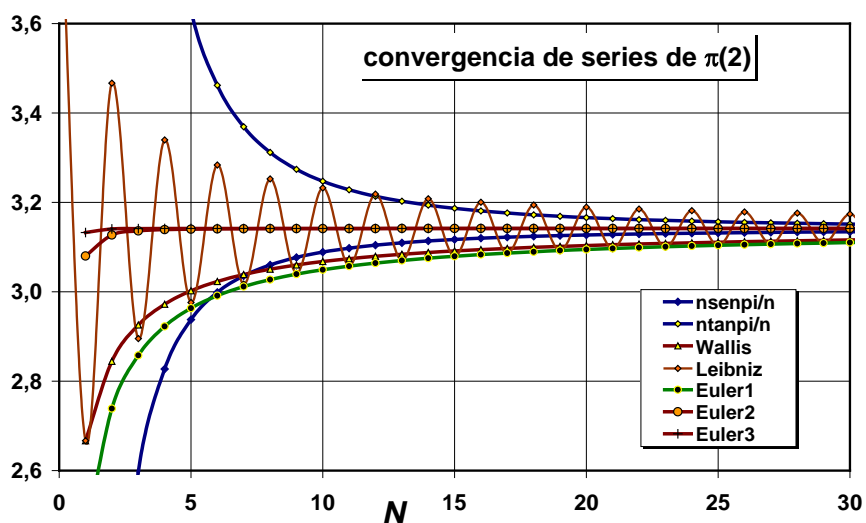


Figura 23b: Detalle de la figura anterior 23a

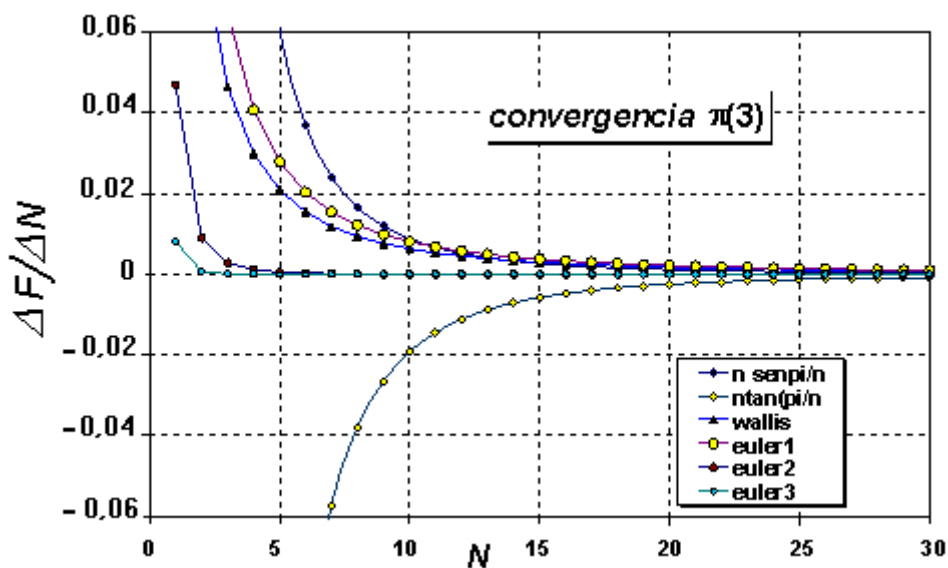


Figura 23c: "Rapidez" de convergencia

Los medios informáticos actuales permiten calcular fácilmente los valores progresivos de π obtenidos mediante las expresiones 23. Una representación gráfica de dichos valores -figura 23a- nos muestra la rapidez con la que tales expresiones tienden al valor esperado y cómo se van incrementando decimales a medida que se incrementa el número N . En estas expresiones,

este avance no es muy rápido, por eso, en este nivel se han ido buscando nuevas aproximaciones con conquistas de posiciones decimales más eficientes (ej: Borwein et al., 1989).

Es necesario añadir algunas otras series -entre otras tantas-, bien conocidas, de diversa procedencia, con objeto de resaltar la riqueza de la exploración en el nivel

matemático que, según las necesidades, se va abriendo camino en ámbitos cada vez más complejos y sutiles. Queda así abierto el acercamiento a asignaturas correspondientes de Matemáticas con una mejor disponibilidad. Un ejemplo son las que siguen:

Leibniz/Gregory(≈ 1680):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Wallis(1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Euler (≈ 1750):

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (\text{II})$$

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \quad (\text{III})$$

Ramanujan (1924):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_0^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{(1103 + 26390n)}{396^{4n}}$$

Es de interés comentar someramente la procedencia de alguna de ellas, la época y el ‘instrumental’ del que se disponían, sin entrar en muchos detalles, pues no es apropiado un curso introductorio, pero sí lo es la expectativa que genera en los alumnos. Incluso, se puede desarrollar alguna de ellas, particularmente sencillas, como por ejemplo la de Wallis, apoyándose en el desarrollo en serie del seno y el teorema fundamental del álgebra.

La representación gráfica de los distintos valores para cada expresión (figuras 23a y 23b) nos permite ver cómo difieren cada una en su convergencia hacia el valor esperado: unas oscilan, otras se acercan desde valores superiores y otras desde valores inferiores, pero con diferente ‘rapidez’ en dicha convergencia (figura 23c). El caso excepcional es la serie de Ramanujan que, con el primer término ya permite obtener más de cien decimales.

Conclusiones

Con una instrumentación sencilla, se pueden poner de manifiesto con esta tarea dos objetivos importantes en las prácticas de laboratorio. En primer lugar, se muestran los diferentes niveles en la investigación científica, en toda su complejidad, acercando así las prácticas, a la realidad de dicha investigación. Por otra parte, como objetivos más específicos, nos permite asentar los conceptos básicos de medida, su incerteza y su fiabilidad, y el tratamiento, gestión y representación adecuada de los datos, y el manejo con soltura la hoja de cálculo. La sencillez y modestia de la instrumentación hace también posible que se puedan disponer de seis puestos de prácticas para dicha tarea –tres pares idénticos-, favoreciendo el trabajo en equipo, el intercambio de información y el contraste de datos entre los diversos grupos de alumnos. Es conveniente resaltar que, aunque las tareas independientes son en cierta medida triviales, es la complejidad del proceso, la interacción y complementación entre todas ellas, lo que le confiere un aceptable interés.

Notas

¹ La sencillez del instrumental necesario no impide que se puedan disponer de cinco o seis puestos de prácticas idénticos, de manera que todos los alumnos realicen la misma tarea en cada sesión. Sin embargo, parece preferible actuar de esta manera pues, aunque la primera sesión es un tanto trabajosa, en las siguientes cambia el ambiente de forma notable, y es más eficiente y vivo al intercambiarse entre

los grupos la información de la tarea previa.

² Es frecuente pasar por alto el interés que tiene el cálculo de la incerteza de una magnitud obtenida en función de otras, mediante el cálculo diferencial directo o el logaritmo-diferencial, siendo este último no más que un procedimiento de ‘diseccionar’ expresiones, convertir productos en sumas, haciendo más sencillas las operaciones de derivación en la mayor parte de los casos. Sin embargo, hay aquí un salto entre dos niveles bien diferenciados, las operaciones matemáticas de diferenciación, y la identificación posterior entre las diferenciales ‘tan pequeñas como se quiera’ en el nivel matemático, por el de la incerteza de las medidas en el nivel físico, ‘tan pequeñas como se pueda’.

Referencias

- Ayala M., Malagón J.F. y Sandoval S.; (2011). Magnitudes, medición y fenomenología; *Revista de Enseñanza de la Física*, 24(1), pp.43-54.
- Borwein, J.M., Borwein, P.B. and Bailey D.H. (1989). Ramanujan, modular equation and approximations to pi, or how to compute one billion digits of pi. *Am. Mat. Monthly*, 96(3), pp. 201-219.
- Fuertes, J.F. (1990). El modesto péndulo; *Revista Española de Física*; 4(2) pp. 43-44.
- Fuertes, J.F. (1997). Fenómeno y experimento. *Didáctica de las Ciencias*, 11, pp. 113-119.
- Fuertes, J. F. (2001). El mito de Prometeo: versión adolescente de la Termofísica”. *Ludus Vitalis*, IX(16), pp. 181-195.
- Fuertes, J. F. (2004). El problema de la especialización: una visión clásica en el diálogo platónico de ‘El Protágoras’; *Revista de Investigaciones UNAD*; III(1) pp.115-124.
- Fuertes, J.F. y Alonso, M. (1995). Medida de densidades: una sencilla práctica para la iniciación en la metodología experimental. *Revista de Enseñanza de la Física*, 8(2), pp. 51-63.
- Fuertes, J.F. y Pérez, G. (1996). Regreso al plano inclinado. *Revista de Enseñanza de la Física*, 9(2), pp.93-108.
- Fuertes, J.F. y Pérez, G. (1998). Sobre la medida gráfica del número π . *INNO*, 14, pp.116-125.
- Fuertes, J.F. y Santos, D. (2004). La densidad es una propiedad intensiva de la materia (pero su medida no). *Revista Mexicana de Física*, 50(6), pp. 81-87.
- Gálvez, E. y Singh, C. (2010). Introduction to the Theme issue on experiments and laboratories in Physics Education. *Am. J. Phys.*, 78(5), pp. 453-454.
- Gil S. y Rodríguez E. (2001). *Física re-Creativa*. Ed. Prentice-Hall. Buenos Aires.
- McDermott, L.C. (2001). Physics Educational Research –The key to student learning. *Oersted Medal Lecture 2001: Am. J. Phys.*, 69 (11) pp. 1127-1137.
- Kung, R. L. (2005). Teaching the concepts of measurements: An example of concept-based laboratory course. *Am. J. Phys.*, 73(8), pp. 771-777.
- Mattheus, M. (1991). Un lugar para la historia y la filosofía en la enseñanza de las ciencias. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12 pp.141-155.
- Montino M., Petrucci D., Ure J.E., Aleman A. y Pérez S.M. (2011). Una propuesta de trabajos prácticos de laboratorio que favorece el aprendizaje de conceptos. *Ciencia & Educación*, 17(4), pp.823-833.
- Mungan C.E. (2010); Volume of a hypersphere. <http://usna.edu/Users/physics/mungan/Scholarship/HypersphereVolume.pdf>.
- Niaz, M. (2010). Are we teaching science as practiced by scientists? *Am. J. Phys.*, 78(1), p.5.
- Petrucci D., Ure J. y Salomone H.D. (2006). Como ven a los trabajos prácticos de laboratorio de Física los estudiantes universitarios. *Revista de Enseñanza de la Física*, 19(1), pp.7-20.

- Reif, F. (1995). Understanding and teaching important scientific thought processes.(Millikan Lecture 1994). *Am. J. Phys.*, 63 (1), pp.17-32.
- Romer, R.H. (1993). Reading the equation and confronting the phenomena -The delights and dilemmas of physics teaching-; *Am. J. Phys.* 61(2). pp.128-142
- Suchster E.F (1974). Buffon's needle experiment. *Amer. Math. Monthly* , 81 pp.157-163.