

## **Explorando la potencialidad de las simetrías en el mundo de los modelos físicos. Primera parte: Leyes de flujo y circulación.**

*Carlos Alejandro Paola - Nieves Noemí Baade - Fabiana Prodanoff*

Facultad Regional La Plata, Universidad Tecnológica Nacional.  
nbaade@frlp.utn.edu.ar

*En este trabajo se presentan lineamientos generales para tratar algunos problemas de simetría inherentes a los campos, electrostático y magnetostático. Se plantea que, conociendo la simetría de ciertas distribuciones de cargas y corrientes, es posible inferir la simetría de los campos asociados a dichas distribuciones, a través de un tratamiento matemático de las geometrías más sencillas. El objetivo que se persigue consiste en contribuir a la formación docente mediante la incorporación de una herramienta que facilite la presentación de la aplicación de las leyes de Gauss y Ampere para el cálculo de campos estáticos. La estrategia propuesta permite el abordaje del nuevo conocimiento con simplicidad y coherencia, premisa fundamental para contribuir a un aprendizaje significativo.*

**Palabras claves:** simetrías, distribuciones de carga, campo magnetostático, campo electrostático, saber docente.

*In this paper we present general guidelines to address some problems inherent symmetry electrostatic and magnetostatic fields. It argues that knowing the symmetry of certain distributions of charges and currents, it is possible to infer the symmetry of the fields associated with these distributions, through a mathematical treatment of simple geometries. The objective pursued is to contribute to teacher training by adding a tool to facilitate the filing of the application of Gauss and Ampere laws for the calculation of static fields. The proposed strategy allows the boarding of new knowledge with simplicity and consistency, a fundamental premise to contribute to meaningful learning.*

**Keywords:** symmetries, charge distributions, magnetostatic fields, electrostatic field, namely teachers

### **Introducción**

Cuando el docente planifica su clase, combina recursos tendientes a facilitar el abordaje del nuevo conocimiento. La simplicidad y coherencia son premisas básicas en su estrategia, la que nunca estará exenta de condicionamientos (Moreira, 2005). ¿Qué tener en cuenta al momento de planificar? Veamos algunos aspectos importantes:

- Recordar que la física se desarrolla sobre un lenguaje matemático. Por tanto, el nivel de manejo matemático del estudiante constituye una limitación en sus posibilidades de comprensión de la física.

- Disponer de un currículo epistemológicamente sustentado que responda a un modelo constructivista, para facilitar el anclaje de los nuevos conocimientos.

- Conocer las dificultades que afronta el estudiante en el abordaje del tema para facilitar la conceptualización.

- Reconocer que el conocimiento del docente es un factor primordial, que le permite recorrer los diversos enfoques posibles del tema, escogiendo el que considere didácticamente más adecuado.

La investigación educativa, sin lugar a dudas, es la herramienta que se utiliza para

indagar en cada uno de estos factores como así también para encontrar nuevos materiales que permitan diseñar estrategias innovadoras al momento de la planificación de la tarea docente. También, en una perspectiva más amplia, estas investigaciones deben orientarse para mejorar, utilizando estas mismas innovaciones, la capacitación docente (Ceberio, 2008), (García Carmona, 2009)

Esta tarea de investigación, presenta múltiples complicaciones ya que en ellas interactúan muchas variables que no permiten un estudio preciso y exacto. En el entramado educativo entran en juego los sentimientos, las intenciones, las creencias, etc. Son magnitudes que no son ni conmensurables ni directamente observables mediante una experimentación repetible y sistemática. La conducta es una parte esencial del proceso educativo.

### **Síntesis de lo actuado por el grupo**

Nuestro grupo investiga, entre otros temas, sobre la enseñanza del electromagnetismo en los primeros años de las carreras de Ingeniería.

La metodología de investigación utilizada se esquematiza de acuerdo con líneas de trabajo que conllevan núcleos solapados de estudio debido a la intersección múltiple de la tríada alumno – docente – material. Toda la labor investigativa se ha realizado dentro del marco de referencia inicial del aula para luego trasladarla a marcos más generales que contribuyan a mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje.

En este contexto resulta oportuno destacar que no se define una metodología de acuerdo a presupuestos teóricos-epistemológicos concretos, ya que se intenta encontrarlos o basarse en algunos existentes como podrían ser las metodologías inductivas-deductivas y la dialéctica.

Se han utilizado diseños metodológicos

por abordaje múltiple donde se han combinado los cualitativos y los cuantitativos dependiendo de la línea de investigación que el docente investigador desarrollará.

Las líneas de investigación fueron variadas, abarcando casi todo el espectro de factores planteados en la introducción. Los resultados de dichas investigaciones fueron transferidos al aula, produciendo modificaciones paulatinas en el dictado de la materia. Mediciones posteriores nos permitieron verificar que estas innovaciones contribuyeron a que un buen porcentaje de alumnos alcanzaran un aprendizaje más significativo y adquirieran competencias ligadas a la experimentación que antes no poseían.

Destacamos entre las modificaciones propuestas la reorganización de la curricula alrededor de núcleos temáticos, sobre la base de identificar conceptos troncales, a partir de los cuales se desarrollan los otros contenidos programáticos. Por ejemplo, uno de los núcleos es el concepto de campo vectorial, tratando los eléctricos y magnéticos estáticos en forma consecutiva, marcando en cada caso las similitudes y diferencias entre ellos, conduciendo a los estudiantes a la incorporación de la existencia del campo electromagnético a través del acoplamiento de los mismos en las ecuaciones de Maxwell. Uno de los temas troncales seleccionado son los conceptos de flujo y circulación.

Otra innovación muy importante fue la incorporación de las NTICs a la enseñanza, muy especialmente a través del diseño de clases teórico – práctico – experimentales donde se plantea la enseñanza con fuerte basamento experimental, incorporando laboratorios con toma de datos y análisis de los mismos con PC, simulaciones y laboratorios virtuales en caso de ser necesario. En esta área, algunos de nuestros trabajos se presentan en las referencias (Baade, 2000a y b), (Prodanoff, 2009), (Zerbino, 2006 y 2008).

### Propuesta

Continuando con la línea de investigación expuesta, enfocamos este trabajo como una contribución al saber docente. En esta primera parte, presentamos una discusión integral acerca de la forma en que las simetrías de las distribuciones de carga y de corriente hacen posible la utilización de las leyes de Gauss y Amper en la determinación de los respectivos campos. Después de tratar aspectos generales, centramos la atención en los sistemas simples más frecuentemente abordados en cursos básicos. En una segunda parte, avanzaremos sobre sistemas más complejos, como el caso de los toroides.

En realidad, conocer a priori la simetría de "los campos" es indispensable para la elección de las superficies gaussianas y de las curvas amperianas que permitan el cálculo. Sin embargo, los textos universitarios no prestan demasiada atención a estas cuestiones, suponiendo que son intuitivamente accesibles. Es quizás el momento de preguntarnos, ¿con qué recursos contamos para determinar la configuración de los campos a partir de la simetría de la distribución de fuentes (cargas o corrientes)? ¿Tal vez una estrategia basada en observaciones experimentales? ¿O acaso trabajar desde las propiedades geométricas del modelo? ¿O bien propiedades integrales o diferenciales que describen la física de los respectivos campos?

Con respecto a estos interrogantes, podemos decir que la simetría de los campos puede deducirse de muchas formas. Nosotros trataremos brevemente algunas de ellas, pero centraremos nuestra atención en las que operan sobre el modelo, y son predominantemente geométricas. Sin embargo, algunas veces recurriremos a propiedades físicas que complementan o facilitan el análisis.

Antes de abordar la propuesta mencionada, daremos un repaso de las leyes físicas que describen el campo electromagnético,

como así también los conceptos geométricos de rotación, traslación y simetría, (Rey pastor, 1963), (Matemática, 2006), (Balderrama, 2012).

### Recordando algo de teoría

#### *Las leyes del campo electromagnético*

El núcleo de la teoría electromagnética lo constituyen las ecuaciones de Maxwell. Sean:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \text{ y } \vec{B}(\vec{r}, t)$$

el campo eléctrico y el campo magnético respectivamente (admitiendo que ambos dependen de la posición y el tiempo). Entonces las formas diferenciales de las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

siendo  $\rho(\vec{r}, t)$  la densidad volumétrica de carga y definiendo  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  como la densidad superficial de corriente aún cuando las cargas se muevan en todo el volumen del conductor. Ambas magnitudes, además, son dependientes de la posición y del tiempo. En adelante nos referiremos a las cargas y corrientes como "fuentes", entendiendo que son de tipo escalar o vectorial respectivamente<sup>1</sup>.

Considerando el caso particular en que tanto los campos como las fuentes son independientes del tiempo (situación estática), las ecuaciones de Maxwell toman las formas desacopladas siguientes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2)$$

Obsérvese que en estas ecuaciones no se pone en evidencia la interdependencia entre los campos. Luego, se puede trabajar con los campos, electrostático y magnetostático, en forma independiente. Las mencionadas ecuaciones nos dicen que el campo electrostático es conservativo (irrotacional), mientras que el campo magnetostático no posee fuentes escalares (solenoidal).

Dado que nuestro trabajo está orientado a la enseñanza básica, y teniendo en cuenta las limitaciones matemáticas del estudiante, consideramos conveniente reemplazar las formas diferenciales de las ecuaciones de Maxwell por sus formas integrales equivalentes. Nosotros sugerimos que estas ecuaciones sean construidas siguiendo la línea tradicional. Esto es, a partir de las evidencias experimentales, que contribuyen a la comprensión de la matemática y a la claridad conceptual.

Sea  $S$  una superficie cerrada arbitraria (con  $d\vec{s}$  normales exteriores) y  $V$  el volumen limitado por ella. Por otra parte, sea  $C$  una curva cerrada arbitraria (orientada según  $d\vec{l}$ ) y  $S'$  la superficie limitada por ella (con  $d\vec{s}$  cumpliendo la regla de la mano derecha respecto de  $d\vec{l}$ ), (Figura 1).

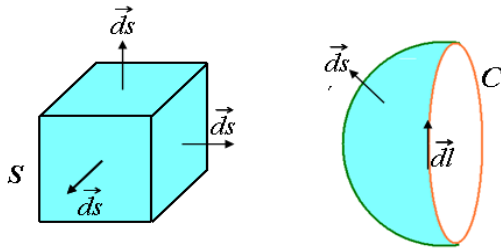


Figura 1. Orientación de superficies y curvas cerradas

Entonces tenemos:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dv$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3a)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oiint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3b)$$

Estas formas integrales contienen la misma información que las correspondientes ecuaciones diferenciales. Sin embargo son operativamente diferentes. Ellas involucran campos y fuentes extendidos en regiones macroscópicas del espacio, mientras que las formas diferenciales relacionan campos y fuentes en un punto, o más precisamente en un entorno local del punto.

Para determinadas simetrías la Ley de Gauss (en el caso electrostático) y la Ley de Ampere (en el caso magnetostático) nos permiten la determinación de los respectivos campos. Estas leyes por sí solas no son suficientes; siempre se debe tener un conocimiento previo de las características geométricas de los campos, para luego elegir (si existen) la superficie gaussiana o la curva amperiana que respete la simetría del problema.

#### Rotaciones, traslaciones y simetrías.

Consideremos una figura plana  $S$  y un punto  $P$  del plano contenido en la figura (Figura 2). Para definir el proceso de rotación, imaginemos que cada punto de la figura se transporta sobre un arco de circunferencia centrado en  $P$ , de modo que todos los arcos subtendan el mismo ángulo  $\alpha$  visto desde  $P$ . La figura  $S'$  que surge del conjunto de todos los puntos transportados se dice que es la imagen de  $S$  a través de una rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor de  $P$  (Figura 3).

Por su parte, las traslaciones requieren la introducción de un vector  $\vec{A}$  contenido en el plano de la figura. Supongamos ahora que cada punto de la figura se transporta una medida equivalente a  $\vec{A}$ , tanto en magnitud como en dirección y sentido. La figura  $S'$  formada por todos los puntos

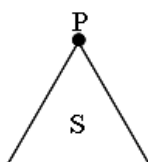


Figura 2

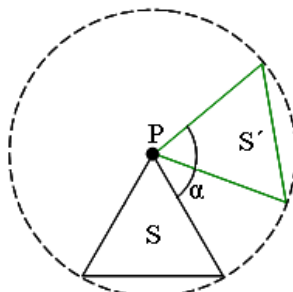


Figura 3: Rotación

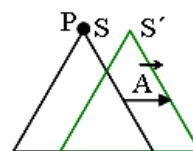


Figura 4: Traslación

transportados se dice que es la traslación de  $S$  a través de  $\vec{A}$  (Figura 4).

En el terreno matemático, se dice que las rotaciones y las traslaciones son aplicaciones que, para este caso bidimensional, transforman figuras en figuras.

Algunas veces, la figura  $S'$  transformada por una rotación de  $S$  alrededor de  $P$ , coincide exactamente con  $S$ . Por ejemplo, si  $S$  es un cuadrado y  $P$  es su centro, cuando se hace una rotación de ángulo  $\alpha = \pi/2$  alrededor de  $P$ , se obtiene un nuevo cuadrado  $S'$  que coincide exactamente con  $S$ . Siempre que ocurre esto, decimos que por  $P$  pasa un eje de simetría. En el ejemplo propuesto, decimos que el eje es discreto, debido a que existe un número finito de ángulos para los cuales coinciden las figuras  $S'$  y  $S$ . También existe el caso continuo; por ejemplo si  $S$  es una circunferencia y el punto  $P$  es su centro, decimos que por  $P$  pasa un eje continuo. Esto es, cualquiera sea el ángulo  $\alpha$ ,  $S'$  coincide con  $S$ .

La extensión al caso tridimensional es inmediata. Los objetos son cuerpos en el espacio y las rotaciones ocurren alrededor de ejes que son rectas en el espacio. Como en el caso bidimensional, aquí también existen ejes de simetría discretos y continuos.

También existe la simetría traslacional. Como ejemplo consideremos directamente un caso tridimensional. Imaginemos una hélice infinitamente larga (piense en el

filete de un tornillo, y luego suponga que el mismo es infinitamente largo). Una traslación paralela al eje de la hélice tal que la longitud de la traslación coincida con el paso de la hélice, reproduce el mismo objeto. En este caso, decimos que la traslación es discreta porque los vectores involucrados forman un conjunto discreto. También existe el caso continuo; por ejemplo un cilindro infinitamente largo con vectores de traslación paralelos al eje.

*Rotaciones y traslaciones de distribuciones y campos.*

Consideremos dos cuerpos rígidos idénticos, y supongamos que poseen idénticas distribuciones de carga firmemente sostenidas

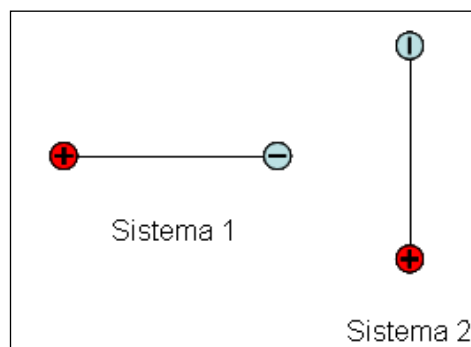


Figura 5: Considerar que las cargas de cada dipolo están rígidamente sostenidas por una varilla no conductora.

nidas. Es decir que una distribución de carga y su *estructura resistente* es una réplica exacta de la otra. Supongamos ahora que un único observador inercial ve ambos cuerpos en reposo, de modo que la posición del segundo cuerpo (sistema 2) puede pensarse como una rototraslación de la posición del primero (sistema 1). Para fijar ideas, consideremos el caso simple en que las distribuciones son dipolos eléctricos (Figura 5).

Supongamos ahora que queremos determinar el campo electrostático producido por cada una de las distribuciones. Procedemos en forma idéntica en ambos casos; comenzamos por situar el origen de coordenadas en el centro del dipolo; luego orientamos el eje  $x$  a lo largo de la recta que une las partículas, con el sentido positivo hacia la partícula positiva. En estas condiciones, el cálculo es completamente análogo en ambos casos. Si se quiere justificar, correspondería decir que se debe a la homogeneidad e isotropía del espacio. Tales conceptos están intuitivamente arraigados en el estudiante, aunque desconozca tal terminología. En prueba de esto último observemos un ejemplo elocuente: cuando el profesor dibuja un dipolo en el pizarrón incluyendo la estructura de sus líneas de campo, el estudiante lo copia en su carpeta. En este proceso intuitivo podría argumentarse que la estructura dibujada en el pizarrón (plano vertical) está rotada y trasladada respecto de la carpeta (plano horizontal). Pero tal detalle suele pasar inadvertido, tanto para el profesor como para el estudiante. Lo que ambos entienden es que la estructura de líneas de campo está rígidamente anclada en la distribución de cargas (o en la estructura resistente que la sostiene).

Pero volvamos al análisis de nuestros dipolos. Observemos que las líneas de campo del dipolo 2 podrían obtenerse rotando y trasladando las líneas del dipolo 1, con la misma transformación que vincula las posiciones de los cuerpos (Figura 6).

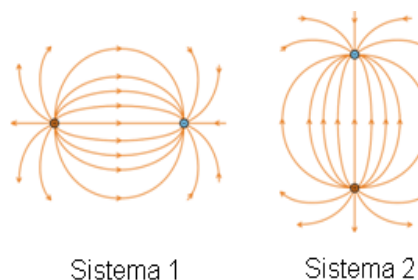


Figura 6: Vista de las líneas de campo electrostático del sistema rotado y trasladado.

En tal sentido, la rototraslación del campo del primer dipolo hasta alcanzar la posición y orientación del segundo, puede reemplazar el cálculo del campo del segundo. En síntesis, lo que resulta relevante en sentido práctico es que el campo electrostático calculado para uno de los cuerpos, vale también para el otro. Una forma de pensar intuitivamente en este proceso consiste en suponer que el campo está "atado" a la distribución y en consecuencia "rota y se traslada" con ella<sup>2</sup>. En adelante, y con vistas a interiorizarnos en el análisis de simetrías, utilizaremos los conceptos de "rotación" y "traslación" en el sentido aquí expuesto.

#### *Simetría de distribuciones y campos*

Supongamos ahora que cierta distribución de cargas posee un eje de simetría. Entonces existirá un ángulo  $\alpha$  tal que la distribución rotada coincidirá con la original. Aquí nos preguntamos, ¿Qué ocurrirá con el campo asociado a la distribución? Vemos que:

- al girar la distribución, el campo gira rígidamente con ella.
- como las dos posiciones de la distribución (original y rotada) coinciden, sus campos también coinciden.

Entonces el campo tiene la misma simetría que la distribución. En otras pala-

bras, si cierta recta es un eje de simetría de la distribución, también es eje de simetría del campo que ella produce.

Esta propiedad permite extraer conclusiones acerca del campo sin necesidad de calcularlo, a partir de la simetría de la distribución de fuentes que le da origen. Por ejemplo, si suponemos que una distribución de carga posee simetría esférica, se puede probar que el campo electrostático que produce tendrá sólo componente radial. Esta condición de simetría puede ser deducida de varias maneras, algunas combinan recursos geométricos y leyes físicas, y otras son netamente geométricas.

Examinemos tres formas posibles considerando en todos los casos un punto P genérico, donde tratamos de probar que la componente no radial del campo electrostático es nula. Definimos un eje  $u$  que pasa por el centro de simetría y el punto P. Entonces probaremos en todos los casos que la componente de  $\vec{E}$  perpendicular a  $u$  es nula.

#### *Tres caminos para el análisis de las simetrías*

a) Utilizando la Ley de Coulomb y el principio de superposición

Consideremos dos elementos de carga situados simétricamente a cada lado del eje  $u$  (ver Figura 7a).

Las contribuciones en el punto P serán.  $d\vec{E}$  y  $d\vec{E}'$  que, en virtud de la Ley de

Coulomb, tienen el mismo módulo

La construcción geométrica muestra que las componentes perpendiculares al eje  $u$  se cancelan. Siguiendo esta lógica, todos los elementos de la distribución de carga pueden organizarse en pares simétricos, con lo que cabe concluir que no habrá componente perpendicular a  $u$  en el punto P. Como P fue elegido arbitrariamente el resultado puede extenderse a todos los puntos del espacio.

b) Mediante el carácter conservativo del campo electrostático

Como el campo electrostático es conservativo, cumple que su circulación sobre cualquier curva cerrada C es nula. Esto es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4)$$

Supongamos que existe cierta componente de  $E$  perpendicular al eje  $u$  en el punto P (ver Figura 7b). Trazamos una circunferencia que pase por P, cuyo centro coincide con el centro de simetría y es tangente a la componente mencionada. La rotación de la distribución esférica alrededor del eje de la circunferencia debe dejar invariante el campo electrostático, por lo que la componente debe ser tangente a la circunferencia en todos sus puntos.

Entonces, la integral del primer miembro de la ecuación (4) con los elementos de longitud  $d\vec{l}$  elegidos como indica la figu-

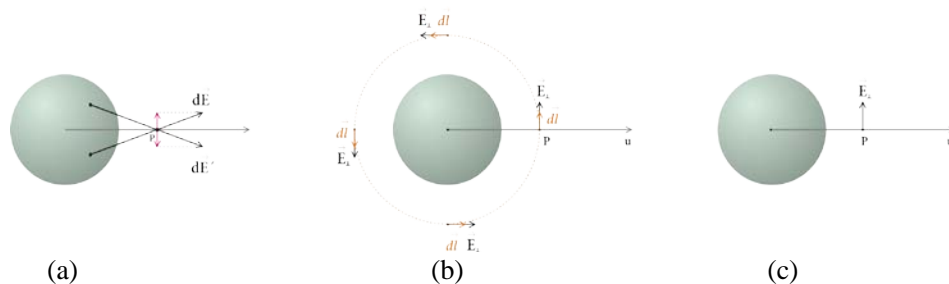


Figura 7. Tres formas posibles de probar que la componente radial del campo electrostático es nula

ra 7b, resultará estrictamente positiva en clara contradicción con el segundo miembro. Entonces la componente propuesta no puede existir.

c) Mediante consideraciones geométricas Consideremos una rotación alrededor del eje  $u$  (ver Figura 7c) Si la componente indicada existe, está obligada a girar con la distribución. Pero un observador situado en P no puede notar cambios en el campo electrostático por rotación de la distribución. Entonces tal componente no puede existir.

### Tratamiento matemático de las geometrías más sencillas

En este trabajo mostramos cómo pueden obtenerse las propiedades de simetría de los campos, a partir de la simetría de la distribución de fuentes. La metodología que proponemos a tal fin, como hemos visto, no es única, por lo que sólo debe ser considerada como alternativa. La misma está basada, en principio, en operaciones de simetría estrictamente geométricas, que se apoyan en un observador físico como recurso intuitivo.

Desde el punto de vista matemático, la simetría surge cuando las soluciones de un

conjunto de ecuaciones permanecen inalteradas, a pesar de que alguna de las características del sistema físico que esas ecuaciones describen se haya alterado.

Por ejemplo, volviendo a la distribución de carga esféricamente simétrica, nos preguntamos ¿si la distribución gira cierto ángulo alrededor de un eje que pasa por su centro, se modificará el campo electrostático que detecta un observador fijo? Ante la evidente respuesta negativa, podemos concluir que dicho campo no puede depender de una coordenada angular que describe el giro propuesto.

Estos razonamientos son muy útiles, más allá de su aplicación en las leyes de Gauss y Ampere. Los mismos permiten la reducción de complejidad en muchísimos casos, aún cuando se utilicen las leyes de Coulomb o Biot – Savart. Además constituyen herramientas muy potentes en áreas más avanzadas de la Física. (Valdés, 2011)

Antes de comenzar con el desarrollo matemático de las ideas centrales, introducimos las notaciones que utilizaremos en el mismo. Denotaremos por  $\rho(\vec{r}')$  a la densidad volumétrica de carga, y por  $\vec{J}(\vec{r}')$  a la densidad de corriente.  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  serán los campos electrostático y de inducción magnética respectivamente. El vector  $\vec{r}'$  representa la posición donde



reside la fuente (punto fuente), mientras que el vector  $\vec{r}$  indica la posición donde se evalúa el campo (punto campo).

El resumen de contenidos siguiente, responde a los casos más frecuentemente tratados en la bibliografía básica. En todos los casos mostramos la simetría de la distribución de fuentes y las propiedades del campo que producen. Analizaremos las siguientes situaciones:

a) Distribuciones de carga con simetría esférica.

En la sección “Simetría esférica en dis-

tribuciones de carga” probaremos que estas distribuciones presentan campos centrales. Utilizando coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , Figura 8 a, probaremos que si:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta', \phi') = \rho(r')$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r, \theta, \phi) = E_r(r) \hat{r} \quad (5)$$

donde se ha especificado en cada caso la notación compacta.

Veremos además que este resultado es compatible con líneas de campo radiales, que favorecen la utilización de la Ley de

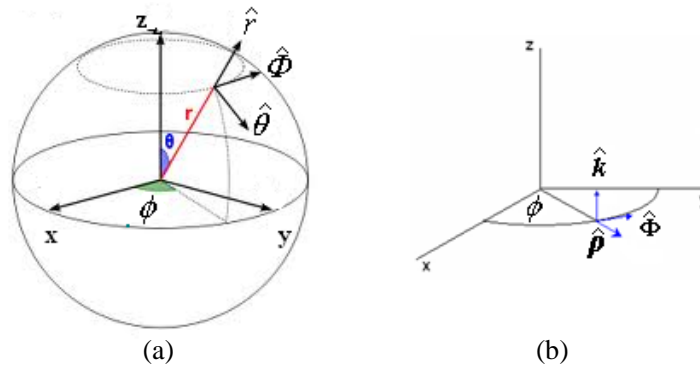


Figura 8: a) Coordenadas esféricas. b) Coordenadas cilíndricas

Gauss con superficies esféricas para la determinación del campo electrostático.

b) Distribuciones de carga con simetría cilíndrica (aproximación de sistemas infinitamente largos).

Usando coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ , figura 8 b, tenemos que si:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r', \phi', z') = \rho(\rho')$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(\rho, \phi, z) = E_\rho(\rho) \hat{\rho} \quad (6)$$

c) Distribuciones de carga con simetría plana (aproximación sistemas infinitamente extendidos en planos perpendiculares al eje  $z$ ).

En coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tenemos:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(x', y', z') = \rho(z')$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = E_z(z) \hat{k} \quad (7)$$

d) Distribuciones de corriente con simetría cilíndrica (aproximación sistemas infinitamente largos).

En coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$  tenemos:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}(\rho', \phi', z') = J_z(\rho') \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho) \hat{\Phi} \quad (8)$$

y:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}(\rho', \phi', z') = J_\phi(\rho') \hat{\Phi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \phi, z) = B_z(\rho) \hat{k} \quad (9)$$

Con el fin de trabajar con la máxima sencillez, en cada caso introduciremos un prototipo elemental de cada distribución. Por prototipo entendemos el objeto más sencillo posible que posee las propiedades de simetría requeridas. Luego, cualquier distribución que pueda descomponerse como una colección (discreta o continua) de estos elementos, tendrá la misma simetría que cada uno de ellos<sup>3</sup>. Entonces, la construcción de un "modelo" con cierta simetría consiste en la unión de objetos elementales, y el campo total producido será la suma vectorial de todas las contribuciones. Dicho campo resultante tendrá las mismas propiedades de simetría que el prototipo.

Esta consecuencia del principio de superposición suele ser muy útil al momento de evaluar la simetría del campo producido por una distribución, en vistas a la utilización de leyes tales como la de Gauss o Ampere. Tal propiedad puede sintetizarse como sigue: el campo producido por una distribución de fuentes posee la misma simetría que el prototipo elemental correspondiente a dicha distribución.

### Simetría esférica en distribuciones de carga.

El prototipo más simple de una distribución de carga con simetría esférica es un casquete de radio  $r'$  y espesor despreciable, que aloja una carga  $Q$  uniformemente distribuida. Ahora cabe hacerse la siguiente pregunta, ¿Qué podemos inferir acerca de la geometría del campo electrostático a partir de la simetría esférica? Para contestarnos esta pregunta procedemos de la siguiente manera. En primer lugar elegimos un sistema de coordenadas esféricas,

cuyo origen coincide con el centro del casquete. Luego elegimos un punto arbitrario del espacio, que puede ser tanto interior como exterior al casquete. Sin pérdida de generalidad, podemos imaginar el punto en el plano del papel (Figura 9). En dicho punto, la forma más general que podría requerir la descripción del campo es:

$$\begin{aligned} E_r &= E_r(r, \theta, \phi) \\ E_\theta &= E_\theta(r, \theta, \phi) \\ E_\phi &= E_\phi(r, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  representan las coordenadas esféricas habituales, y  $E_r$ ,  $E_\theta$  y  $E_\phi$  son las componentes esféricas del hipotético campo electrostático. Ahora estamos en condiciones de aplicar criterios de simetría.

Cada paso será identificado con un número para reconocerlo luego en un es-

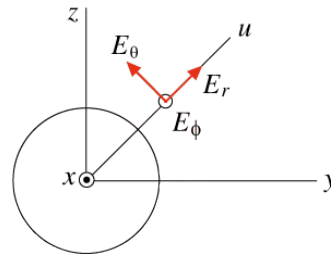


Figura 9. Prototipo de fuentes escalares con simetría esférica

ma general.

En todos los pasos imaginamos un detector situado en el punto de observación sensible a cualquier variación del campo electrostático.

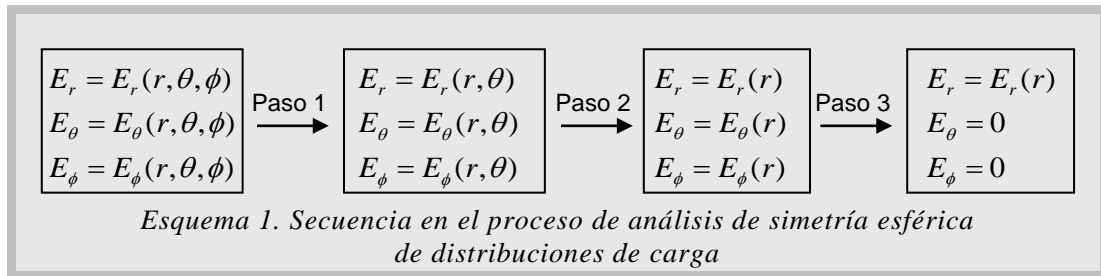
1) si el casquete gira un ángulo arbitrario alrededor del eje z, el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $\phi$ .

2) si el casquete gira un ángulo arbitrario alrededor del eje x, el detector no observa

cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $\theta$ .

3) si el casquete gira un ángulo arbitrario alrededor del eje u, el detector no observa cambios. Pero si existiera una componente perpendicular al eje u, ella debería girar alrededor del eje u, y dicho cambio sería registrado por el detector. Entonces no pueden existir las componentes  $E_\theta$  y  $E_\phi$ .

En el esquema 1 se muestra la secuencia de conclusiones.



Entonces concluimos que el campo electrostático producido por el casquete es un campo central, es decir que sólo tiene componente radial y la misma sólo depende de la coordenada radial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r} \quad (11)$$

Es conveniente enfatizar aquí, que, aunque hayamos elegido el punto de observación fuera del casquete, el análisis es válido en todas partes, incluyendo naturalmente la región interior. Esto es así en virtud de no haber utilizado en los razonamientos, argumentos dependientes de la localización del punto de observación.

Ahora estamos en condiciones de aplicar la Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{IS}}{\epsilon_0} \quad (12)$$

donde S es una superficie cerrada,  $d\vec{S}$  representa los vectores normales exteriores asociados a cada elemento de superficie, y  $Q_{IS}$  es la carga neta alojada en la

región interior a la superficie S. La superficie S que permite la resolución es una esfera de radio r concéntrica con el casquete, entonces tenemos que:

$$d\vec{S} = dS \hat{r} \quad (13)$$

con lo que el primer miembro de la ecuación (12) puede tratarse como sigue:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oiint_S E_r(r)\hat{r} \cdot dS\hat{r} = \\ &= E_r(r)\hat{r} \cdot \hat{r} \oiint_S dS = 4\pi r^2 E_r(r) \quad (14) \end{aligned}$$

El segundo miembro de la ecuación (12) debe evaluarse según corresponda para puntos interiores o exteriores. Así concluimos que:

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_r(r) &= 0 && \text{si } r < r' \\ 4\pi r^2 E_r(r) &= \frac{Q}{\epsilon_0} && \text{si } r > r' \end{aligned} \quad (15)$$

Entonces:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < r' \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > r' \end{cases} \quad (16)$$

El análisis se completa observando el resultado (11)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < r' \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r > r' \end{cases} \quad (17)$$

Cualquier objeto cuya distribución de carga pueda considerarse como una colección de casquetes esféricos concéntricos uniformemente cargados, puede ser tratado en virtud del principio de superposición.

El cálculo de campos, aplicando Gauss para distintas simetrías, sigue un desarrollo similar al tratado aquí. En el texto sólo se resalta, en cada caso, la correcta elección de las superficies de integración.

### Simetría cilíndrica en distribuciones de carga.

El objeto genérico elemental para esta simetría es un casquete cilíndrico de radio  $\rho'$ , longitud infinita y espesor despreciable, sobre el cual se distribuye uniformemente una carga eléctrica cuya densidad superficial es  $\sigma$ . Para analizar la simetría del campo situamos el origen de coordenadas en el eje del casquete.

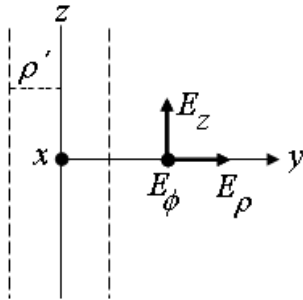


Figura 10. Prototipo de fuentes escalares con simetría cilíndrica

Elegimos coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  y  $z$ , tal que el eje  $z$  coincida con el eje del casquete.

Sin pérdida de generalidad, elegimos un punto P situado en el plano del papel (Figura 10).

En dicho punto, las formas más generales posibles para las componentes del campo electrostático serán:

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho(\rho, \phi, z) \\ E_\phi &= E_\phi(\rho, \phi, z) \\ E_z &= E_z(\rho, \phi, z) \end{aligned} \quad (18)$$

Para encontrar la simetría del campo realizamos las siguientes consideraciones geométricas:

1) si el casquete se traslada una distancia arbitraria a lo largo del eje  $z$ , el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $z$ .

2) si el casquete gira un ángulo arbitrario alrededor del eje  $z$ , el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $\phi$ .

3) si el casquete gira un ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $y$ , el detector no observa cambios. Pero si existiera una componente perpendicular al eje  $y$ , ella debería girar alrededor del eje  $y$ , y dicho cambio sería registrado por el detector. Entonces no pueden existir las componentes  $E_\phi$  y  $E_z$ .

La secuencia puede resumirse como se muestra en el esquema 2.

Entonces concluimos que el campo electrostático es de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho) \hat{\rho} \quad (19)$$

La superficie S que permite la resolución, aplicando Gauss, es un cilindro de radio  $\rho$  coaxial con el casquete y con bases planas perpendiculares al eje.

**Simetría plana en distribuciones de carga.**

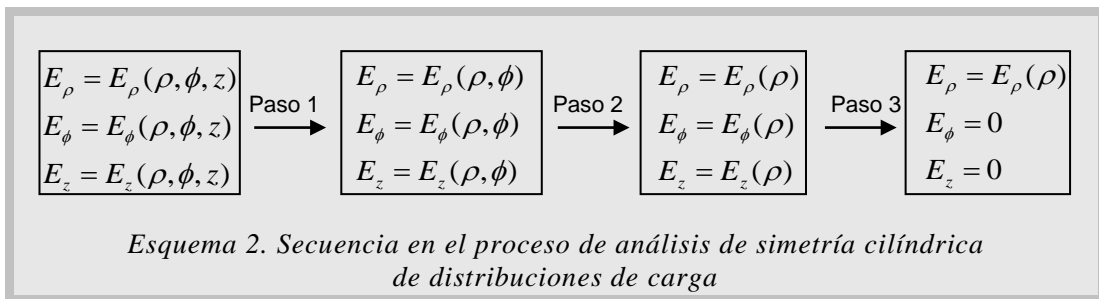
El objeto elemental en esta simetría lo constituye una lámina infinitamente extendida de espesor despreciable, sobre la que reside carga eléctrica de densidad superfi-

cial uniforme  $\sigma$ . Para tratar la simetría del campo, situamos el origen de coordenadas en un punto exterior a la lámina eligiendo coordenadas cartesianas  $x, y, z$  de modo que el eje  $x$  sea perpendicular a la lámina (Figura 11).

Elegimos un punto P arbitrario que, sin pérdida de generalidad, lo situamos en el plano del papel.

Entonces las componentes del campo en sus formas más generales serán:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x, y, z) \\ E_y &= E_y(x, y, z) \quad (20) \\ E_z &= E_z(x, y, z) \end{aligned}$$



Esquema 2. Secuencia en el proceso de análisis de simetría cilíndrica de distribuciones de carga

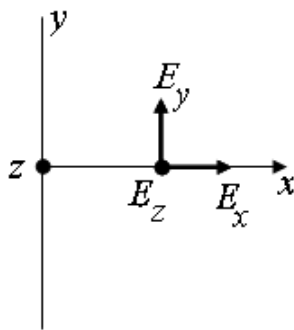


Figura 11. Prototipo de fuentes escalares con simetría plana

Para determinar la simetría del campo realizamos las siguientes consideraciones geométricas:

- 1) si la lámina se traslada una distancia arbitraria a lo largo del eje  $z$ , el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $z$ .
- 2) si la lámina se traslada una distancia arbitraria a lo largo del eje  $y$ , el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $y$ .
- 3) si la lámina gira un ángulo arbitrario alrededor del eje  $x$ , el detector no observa cambios. Pero si existiera una componente perpendicular al eje  $x$ , ella debería girar alrededor del eje  $x$ , y dicho cambio sería registrado por el detector. Entonces no pueden existir las componentes  $E_y$  y  $E_z$ . La

secuencia se resume en el esquema 3.

Entonces concluimos que el campo electrostático es de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x) \hat{i} \quad (21)$$

La superficie S que permite la resolución, aplicando Gauss, es un cilindro con el eje paralelo al eje x y bases paralelas al plano.

### Simetría cilíndrica en distribuciones de corrientes axiales.

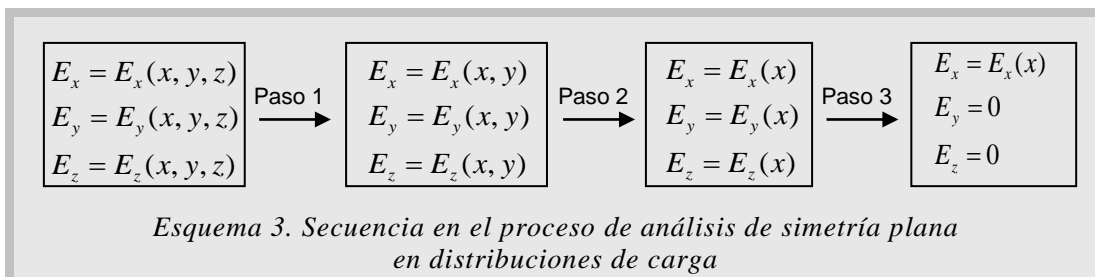
El objeto elemental para este caso tiene la misma geometría que el correspondiente al caso de distribuciones de carga con simetría cilíndrica (casquete cilíndrico de radio  $\rho'$ ). Supongamos que sobre él circula una corriente estacionaria y uniformemente distribuida de densidad superficial  $\vec{k}$  en dirección paralela al eje del casquete definida como una corriente por una unidad de longitud perpendicular a la dirección de circulación. Para analizar la simetría del campo situamos el origen en un punto del eje del casquete y proponemos coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  y  $z$ , con el eje  $z$  coincidente con el eje del casquete.

Sin pérdida de generalidad elegimos un punto P arbitrario situado sobre el plano del papel (Figura 12). La forma más general posible para el campo magnético en P será:

$$B_\rho = B_\rho(\rho, \phi, z)$$

$$B_\phi = B_\phi(\rho, \phi, z) \quad (22)$$

$$B_z = B_z(\rho, \phi, z)$$



Para determinar la simetría del campo realizamos las siguientes consideraciones

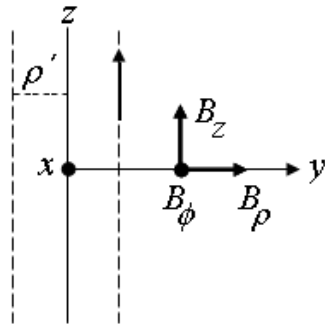


Figura 12. Prototipo de fuentes vectoriales axiales con simetría cilíndrica

geométricas:

- 1) si el casquete se traslada una distancia arbitraria a lo largo del eje z, el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada z.
- 2) si el casquete gira un ángulo arbitrario  $\phi$  alrededor del eje z el detector no observa cambios. Entonces las componentes del campo no pueden depender de la coordenada  $\phi$ .
- 3) En este punto necesitamos de un recurso físico que puede obtenerse por simple observación de la Ley de Biot-Savart.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \quad (23)$$

Si la densidad de corriente  $\vec{J}(\vec{r})$  se invierte sobre todo el dominio V, entonces el campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  se invierte en todo el espacio. Teniendo en cuenta esta propiedad, giramos el casquete un ángulo  $\pi$  alrededor de un eje que pasa por P y es perpendicular al eje z. La distribución de corrientes se invierte pero la componente  $B_\rho$  no, por lo tanto la componente  $B_\rho$  no puede existir.

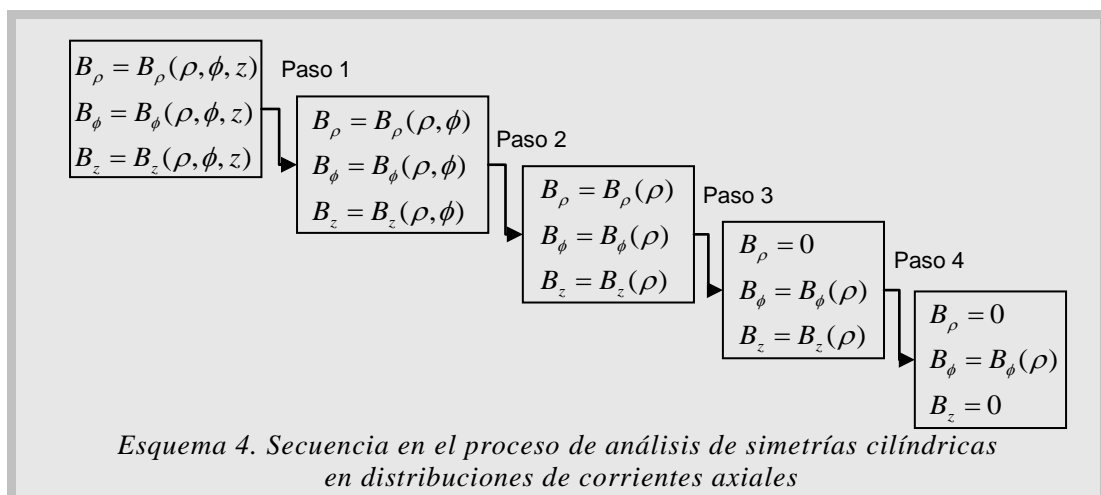
4) Reconociendo que el vector  $\vec{J}$  es paralelo al eje z en toda la distribución, observemos nuevamente la Ley de Biot-Savart. Observando el producto vectorial se concluye que el campo no puede tener componente  $B_z$ .

La secuencia puede resumirse como muestra el esquema 4.

Concluimos, entonces, que el campo magnético para distribuciones con esta simetría es de la forma:

$$B(\vec{r}) = B_\phi(\rho)\hat{\Phi} \quad (24)$$

En este caso las curvas de integración que respetan la simetría, son circunferencias concéntricas con el casquete.



**Simetría cilíndrica en distribuciones de corriente azimutales**

La figura 13 muestra un esquema de esta distribución.

En esta geometría se repiten todas las condiciones y elecciones propuestas en la sección

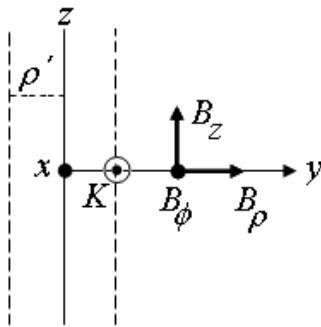


Figura 13. Prototipo de fuentes vectoriales azimutales con simetría cilíndrica

anterior.

La única diferencia consiste en suponer que la densidad superficial de corriente  $\vec{K}$  esta orientada en cada punto del casquete paralela al versor  $\hat{\Phi}$ , manteniendo su módulo constante.

La forma más general del campo y los tres primeros pasos del análisis de simetría son los

mismos que en la sección anterior, por lo que aquí sólo discutiremos el paso 4.

En este punto nos remitiremos a la Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (25)$$

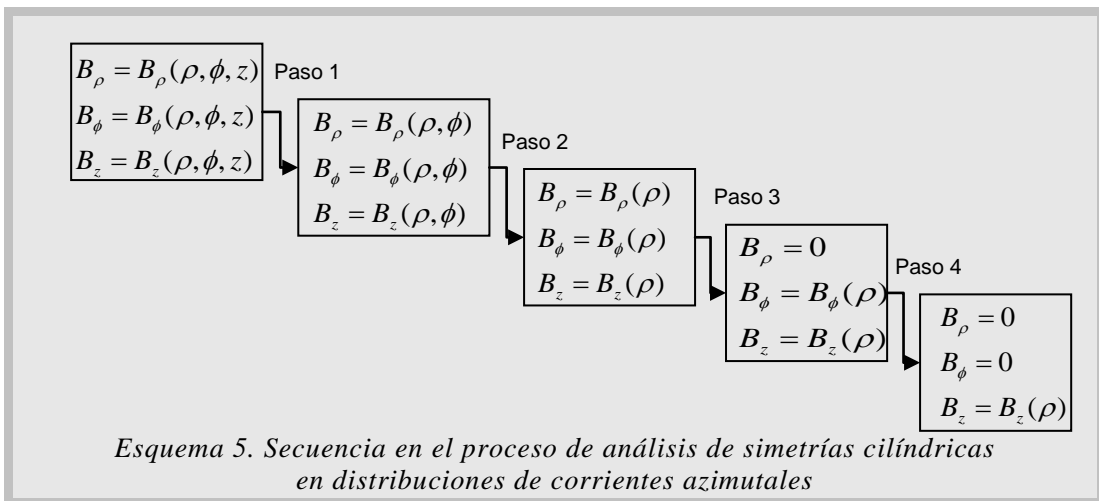
donde C es cualquier curva cerrada y S una superficie limitada por ella.

Elegimos como C a la circunferencia con centro en el eje z, contenida en un plano perpendicular a dicho eje y que pase por el punto P. Luego, la superficie S puede elegirse como el círculo contorneado por C.

Entonces, la superficie S no es atravesada por corrientes, por lo que el segundo miembro de la Ley de Ampere resulta nulo. Por otra parte, dado que  $B_\phi$  sólo depende de  $\rho$ , tendrá módulo y orientación constantes sobre C, por lo que la única posibilidad de anulación de la integral del primer miembro es que se anule la componente  $B_\phi$ . Entonces  $B_\phi$  debe ser nula. La secuencia se resume en el esquema 5.

Entonces podemos concluir que el campo magnético es de la forma:

$$B(\vec{r}) = B_z(\rho)\vec{k} \quad (24)$$



Esquema 5. Secuencia en el proceso de análisis de simetrías cilíndricas en distribuciones de corrientes azimutales



### Discusión y Perspectivas.

En este trabajo se presentan lineamientos generales para tratar algunos problemas de simetría inherentes a los campos electrostático y magnetostático. Se ha visto que, conociendo la simetría de ciertas distribuciones de cargas y corrientes, es posible inferir la simetría de los campos asociados a dichas distribuciones. Aunque nosotros hemos fundamentado con cierta rigurosidad formal cada una de las alternativas de simetría más simples, nuestra intención no es complejizar aspectos matemáticos. Los recursos propuestos no requieren un procedimiento matemático formal cada vez que se los utiliza. Por el contrario, lo que pretendemos es instalar nuevas herramientas en el terreno de la intuición y la creatividad, con el fin de multiplicar la capacidad operativa con rapidez y eficacia.

En realidad, el contenido de este trabajo puede extenderse a situaciones físicas muy diversas, de las que la electrostática y la magnetostática constituyen ejemplos sencillos (acaso los más trillados). Tal vez las extensiones más inmediatas sean las siguientes:

a) Las conclusiones obtenidas para los problemas electrostáticos con distintas simetrías en la distribución de carga son válidas para cualquier campo con fuentes escalares. Como ejemplo podemos citar el campo gravitatorio, cuyas fuentes son las masas gravitatorias, y el campo de excitación magnética producido por imanes permanentes, que admiten ser tratados a partir de fuentes escalares conocidas como polos magnéticos.

b) Las conclusiones obtenidas para campos magnetostáticos a partir de la simetría de la distribución de corrientes pueden extenderse a cualquier campo producido por fuentes vectoriales. Por ejemplo el potencial vector (de uso habitual en electromagnetismo), cuyas fuentes vectoriales son las corrientes eléctricas.

Nuestras intenciones con vistas a futuros trabajos incluyen la extensión de las técnicas propuestas a sistemas con simetrías más complicadas. Hasta el momento hemos trabajado en la simetría del toroide y en la familia de sistemas topológicamente equivalentes. Estos resultados serán reportados a la brevedad.

### Notas:

<sup>1</sup> En cierto sentido más general, se dice que la divergencia de un campo vectorial es proporcional a la densidad de fuentes escalares del mismo. Análogamente el rotor será proporcional a la densidad de fuentes vectoriales. Así tendremos que, además de las fuentes  $\rho$  y  $\vec{J}$ , las variaciones temporales de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  también pueden considerarse “fuentes vectoriales”, aunque de naturaleza no estacionaria

<sup>2</sup> Nótese que este procedimiento no es necesariamente una rototraslación real o física, sino que también puede utilizarse como una forma de economizar el pensamiento. A veces, la rototraslación ocurre en nuestra mente, y es equivalente a un procedimiento matemático que, a menudo, no será necesario resolver. Aquí resulta oportuno explicar que procesos físicos de rotación o traslación podrían tener efectos diferentes en la física de altas velocidades o para observadores lejanos. En tal caso, para que nuestro análisis sea correcto, debíamos imponer la condición de que la rotación o la traslación sean cuasiestáticas.

<sup>3</sup> Por supuesto que cada uno de los objetos elementales que forman las colecciones mencionadas deben poseer la misma posición y orientación características. Por ejemplo si se trata de elementos esféricos, deben ser concéntricos; mientras que si fueran cilíndricos, deben ser coaxiales.

### Referencias

- Baade, N.; Bordogna, C.; Prodanoff, F; Lavagna, M.E. (2000). Innovación y desarrollo curricular en electricidad y magnetismo. *Memorias SIEF VI*. Santa Fe. Tomo 2, pp. 60-6.
- Baade, N., Prodanoff, F.; Del Zotto, R. (2006a) Intentando generar competencias a través de una clase teórico experimental. *Actas 5º Congreso de Enseñanza en la Ingeniería (V CAEDI)*. Capítulo: Educación basada en Competencias. Septiembre. Tomo I, pp.49-55.
- Baade, N.N.; Lavagna, M.E.; Prodanoff, F. (2006b). Flujo y circulación de campos eléctricos y magnéticos estáticos. Evaluación de la apropiación conceptual. *Octavo Simposio de Investigadores en Educación en Física*. Edición electrónica, pp. 198-208.
- Balderrama, C. Transformaciones Geométricas Bidimensionales. Fecha de consulta octubre 2012. <http://www.sistemas.edu.bo/cbalderrama/sis%201201/LIBRO/tema%203.pdf>
- Ceberio, M.; Guisasola, J. y Almudí, J. M. (2008). ¿Cuáles son las innovaciones didácticas que propone la investigación en resolución de problemas de física y qué resultados alcanzan? *Enseñanza de las ciencias*. 26(3), pp. 419–430
- García Carmona, A. (2009) Investigación en didáctica de la Física: tendencias actuales e incidencia en la formación del profesorado. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 3(2).
- Matemática para todos*. (2006) Fascículo 4. Venezuela: Fundación POLAR <http://www.cienciaenlaescuela.acfiman.org/matematica/fasciculo4.pdf>