Dominios y representaciones: ejemplos de la Física y la Matemática en la Física [1]

María Celia Dibar Ure - Silvia Margarita Pérez

CEFIEC - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. U.B.A. - Argentina
celiadibar@yahoo.com - silviamargaritaperez@yahoo.com.ar

En los últimos años se ha prestado mucha atención a la noción de la especificidad de dominios en el estudio del pensamiento humano. Es en esta línea que Karmiloff Smith (1992), situándose en una posición intermedia en la actualización del debate innatismo-constructivismo que este enfoque trae, presenta su modelo de Redescripción Representacional. Este modelo nos permite analizar, a través de algunos ejemplos, la relación entre los dominios de la física y la matemática, al mostrarnos una posible explicación de la pérdida de la "sensación de entender" al pasar a la formulación matemática de la Física.
Palabras clave: dominios, representaciones, redescripción representacional, lenguaje matemático, Mecánica.

Much attention has been given during the last years to the subject of domain specificity in the study of human thought. This approach, among other results, actualizes the debate between innate and constructed knowledge. Karmiloff Smith (1992) proposes a position that lies between these two extremes and proposes a model: Representational Redescription., which it allowed us to analyze the relation between the domains of Physics and Mathematics in problem solving. We could find a possible explanation for the difficulties students find when formulating problems using mathematics, and their feeling of "not understanding" in this situation.
Keywords: domains, representations, representational redescription, mathematical language, Mechanics.

Introducción

El renacimiento del debate innatismo - constructivismo, con el aporte de datos muy actuales que provienen de las neurociencias, de los estudios sobre comportamiento animal, la antropología y las nuevas formas de medición de la actividad cerebral (Hirschfeld y Gelman, 1994), es un tema que está penetrando poco a poco en el área, y puede aportar a la visión de la didáctica de la física a través del modo en que se adquieren nuevos conocimientos (Dibar et al, 2000).

Discutiremos la propuesta de uno de los autores de esta línea (Karmiloff Smith, 1992) analizando algunos ejemplos de modelización en física usando la matemática como lenguaje.

Karmiloff Smith, situándose en una posición intermedia entre el innatismo y el constructivismo, presenta su modelo de Redescripción Representacional (RR). Este modelo nos permite analizar la relación entre los dominios de la física y la matemática al mostrarnos una posible explicación de las dificultades de los alumnos al pasar a la formulación matemática de la física. Este es un problema que suele aparecer en la práctica docente, donde para hacer avanzar el conocimiento intuitivo, el alumno debe traducirlo en forma cuantitativa y luego algebraica. Se crean así nuevos problemas cognitivos, que sólo serán resueltos en la medida que el conocimiento físico pueda ponerse en relación con el conocimiento matemático. El modelo RR propone que, siendo

1 Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio "Dominios y desarrollo: experimentación y conceptualización en ciencias naturales a través de diferentes perspectivas", subsidiado por UBACyT

distintos los códigos en que están representados ambos tipos de conocimiento, sólo podrán vincularse entre sí cuando las representaciones sean definidas en forma explícita en los dominios físico y matemático.

El debate actual sobre innatismo y constructivismo

Conciliar estas dos posiciones teóricas posibilita una visión del desarrollo más amplia. Karmiloff Smith propone una perspectiva que las articula, desarrollando un modelo para explicar "la manera en que funciona la mente en calidad de sistema que se organiza y se redescribe a sí mismo, desde la infancia y a lo largo del desarrollo" (op. cit., p. 203, versión en castellano).

El innatismo sostiene que el conocimiento está preestablecido en muchos casos: en la actualidad está asociado a dominios específicos – áreas específicas de conocimiento- y deja relegados el aprendizaje y el desarrollo a un lugar menos importante. Fodor (1983) sostiene que los módulos o sistemas de entradas de datos, especialmente los sensoriales, están genéticamente especificados y se caracterizan por su encapsulamiento informativo, su independencia, sus fines específicos y una arquitectura nerviosa fija. Karmiloff aclara que no comparte totalmente esta visión innatista pues, para ella, la mente humana posee tanto "una determinada cantidad de cosas especificadas en detalle" como algunas predisposiciones guiadas de dominio específico; propone, además, la hipótesis de que si la mente termina teniendo una estructura modular, ésta se va construyendo durante el desarrollo a través de un proceso gradual de modularización, durante el cual se seleccionan progresivamente circuitos cerebrales para diferentes computaciones de dominio específico que en ciertos casos forman módulos relativamente encapsulados. Mientras Fodor se concentra en los sistemas de entrada de estímulos, teniendo poco que decir sobre los procesos centrales, la autora sostiene que estos procesos de desarrollo son la clave para comprender la mente. El desarrollo implica un proceso de interacción entre la mente y el ambiente más dinámico de lo que supone una postura innatista estricta. En sus trabajos posteriores, Karmiloff Smith profundiza la investigación en los mecanismos que puedan explicar el "conocimiento innato" y enfatiza el papel del desarrollo en la comprensión de los procesos de cambio representacional (Karmiloff Smith, 1998 a y 1998 b).

El constructivismo de Piaget, por su parte, acepta una base innata mínima en la que se basan los aprendizajes subsiguientes de dominio general. Para Piaget, ni el procesamiento de la información ni el almacenamiento son de dominio específico. El desarrollo implica cambios que afectan a las estructuras operatorias, generales y simultáneas para todos los dominios y que operan sobre todos los aspectos del sistema cognitivo de manera similar.

Karmiloff Smith sostiene que existen algunas predisposiciones de dominio específico innatamente guiadas, pero también algunos mecanismos de dominio general que operan de forma equivalente en diferentes dominios, a lo largo de todo el desarrollo y que no implican la existencia de estadios. Sin embargo no descarta la posibilidad de que se produzcan cambios transversales de dominio general que afecten a varios dominios simultáneamente, aunque sus efectos serían diferentes en cada uno de ellos pues tendrían que interactuar con restricciones de dominio específico. Las restricciones están relacionadas directamente con las predisposiciones de dominio específico innatamente guiadas que permiten seleccionar las informaciones dentro de la inundación de estímulos en que está inmerso un bebé, y que hace posible dar sentido a este "caos". El desarrollo, según la autora, es mucho más de dominio general de lo que suponen la mayoría de los enfoques innatistas/modularistas del desarrollo, pero también mucho más de dominio específico de lo que contempla la teoría piagetiana. La mente humana no se limitaría a explotar la información que le brinda el ambiente sino que es capaz de enriquecerse desde adentro aprovechando el conocimiento ya almacenado para establecer relaciones representacionales intra e inter dominios.

El modelo RR

En su libro de 1992, Karmiloff Smith propone el modelo de Redescripción Representacional[2] (RR), que "pretende explicar de qué manera se hacen progresivamente más manipulables y flexibles las representaciones de los niños, cómo surge el acceso conciente al conocimiento y cómo los niños construyen teorías" (op. cit., p. 37).

La redescripción representacional es un proceso mediante el cual la información que se encuentra implícita en la mente llega a convertirse en conocimiento explícito para la mente, primero dentro de un dominio y, posteriormente, a veces a lo largo de diferentes dominios. Este es en sí un proceso de dominio general, pero que no implica cambios simultáneos en todos los dominios sino que, dentro de cada uno de ellos, el proceso de redescripción representacional es el mismo. En cambio, los modelos de estadios, como el de Piaget implican cambios simultáneos que, por lo tanto, afectan al sistema cognitivo como un todo.

La hipótesis de Karmiloff Smith es que el proceso de redescripción representacional ocurre en forma recurrente dentro de microdominios[3] a lo largo del desarrollo, así como en la edad adulta en algunas clases de aprendizaje nuevo. Este proceso se ve influido por la forma y el nivel de explicitación de las representaciones sobre las que se apoya en un momento dado un conocimiento de dominio específico determinado.

Iremos describiendo el modelo RR con un ejemplo de equilibración de bloques tomado de un trabajo de Karmiloff Smith e Inhelder (1974 y 1975) ampliamente discutido (Casávola et al., 1984) cuando aún la autora abrevaba en las aguas del lago de Ginebra. Este artículo, sin polemizar abiertamente con las posturas piagetianas, estudia las "teorías" de los niños. Desde el punto de vista de la lógica sólo se podría hablar de teorías en el nivel formal. Pero flexibilizándolo, se reconocen en su funcionamiento fuertes rasgos de contenido que guían el razonamiento, la predicción y la propia acción, aunque formalmente sean más parecidos a hipótesis sobre contenidos con cierto grado de coherencia. Este reconocimiento de que los niños más pequeños tienen teorías ya plantea una posición más asociada a los contenidos que a la lógica. Los piagetianos incorporaron, como un complemento, estos aspectos funcionales que pueden ser diferentes en niños con el mismo nivel estructural.

El modelo RR propone tres fases recurrentes que se apoyan en formatos de representación interna que la autora ha llamado Implícito (I), Explícito 1 (E1), Explícito 2 (E2) y Explícito 3 (E3), que no constituyen estadios de desarrollo dependientes de la edad, sino partes de un ciclo repetitivo que ocurre una y otra vez en diferentes microdominios a lo largo del desarrollo.

Durante la primera fase, representada en el nivel I, en cualquier microdominio, el niño se centra en datos externos para crear "adiciones representacionales". Este nivel es implícito y la información contenida no está disponible para otros operadores del sistema cognitivo. En la tarea de equilibrar un bloque sobre otro, se observa a los niños de cuatro y cinco años equilibrarlos fácilmente desplazándolos, haciendo uso de la información propioceptiva, sintiendo la dirección en que se produce el desequilibrio. Pero cada bloque es para ellos una tarea nueva. Se adicionan así informaciones del mundo exterior sin relacionarse entre ellas, almacenándose independientemente. Los niños equilibran los bloques como si fuera una serie de problemas aislados. Sus acciones están mediadas por el esfuerzo de lograr maestría conductual en la tarea.

Los niños de seis y siete años colocan todos los bloques en su centro geométrico, y sólo parecen capaces de equilibrar aquellos que tienen su peso distribuido uniformemente. La conducta de los niños de seis años está mediada por lo que la autora llama una "teoría en acción", representada en el nivel E1. Las representaciones E1 son descripciones reducidas

2 Karmiloff Smith no ha retomado en sus investigaciones la redescripción representacional como modelo, con sus fases y niveles.

3 Un ejemplo de microdominio sería el de la gravedad dentro del dominio de la física.

que pierden muchos detalles de la información codificada procedimentalmente. Son abstracciones en un lenguaje de nivel superior y, a diferencia de las representaciones de nivel I, no están entre paréntesis sino abiertas a potenciales vínculos representacionales intra e inter dominios. Mediante redescripciones de las representaciones almacenadas en el nivel I, sobre cómo se equilibran los objetos, los niños extraen una característica común, válida para muchos objetos del mundo (pero no todos): son simétricos y se equilibran en su centro geométrico. Es sugestivo que la simetría aparece ya en los bebés como una restricción de dominio, es decir una característica de los objetos que aparece innatamente especificada (Baillargéon y Hanko Summers, 1990). Ésta es la esencia de la representación reducida que ha producido el proceso de redescripción: los detalles propioceptivos se omiten. Cuando al tratar de equilibrar un bloque de apariencia simétrica, pero con un peso adicional en un extremo, éste se cae al ponerlo en el centro geométrico, el niño lo pone con más cuidado, pero nuevamente en el centro geométrico. El niño se enfrenta a la información contradictoria como si el problema fuera de él y no de la teoría (no lo puso con el suficiente cuidado). La serie de anomalías es descartada, dejando a un lado los bloques que no consigue equilibrar. Los mismos datos observables que tan útiles les fueron a los niños de cuatro y cinco años, son desechados por irrelevantes por los de seis y siete. Esta sencilla teoría del centro geométrico no será abandonada sino cuando el niño pueda considerar estas anomalías. La teoría deberá consolidarse, al igual que logró la maestría conductual en el nivel implícito.

Cuando se toma conciencia de los contraejemplos se necesita otra teoría, que aparecerá alrededor de los ocho años, cuando el conocimiento explícito sobre el centro geométrico y una teoría intuitiva del equilibrio produzca una conducta nuevamente exitosa. Estas serán representaciones en formato E2/3, a las cuales se accede conscientemente, donde la verbalización tiene un papel preponderante. En este nivel, el niño puede separarse de su teoría, ver los datos anómalos, y articularlos para acceder a una nueva teoría. El modelo separa el nivel E2 del E3. En el formato E2 las representaciones son conscientes, pero en un código similar a las representaciones de nivel E1 (por ejemplo una representación espacial que no es necesariamente verbalizable). Es en el nivel E3 donde el conocimiento se recodifica mediante un formato común a todos los sistemas, suficientemente parecido al lenguaje natural como para ser expresado verbalmente. Sin embargo la autora destaca que la investigación, al centrarse en la expresabilidad verbal, no permite por ahora observar esa separación. Es así que para la aplicación en ejemplos hablaremos del nivel E2/3.

Hemos visto que existen múltiples niveles en los que un conocimiento puede representarse. Es importante destacar que estas codificaciones coexisten en la mente, de manera que podemos apelar a ellas si es necesario: los niños de seis años, con los ojos cerrados, pueden equilibrar los bloques sin dificultad.

El modelo RR postula que estas fases y las redescripciones en que se representan describen el proceso del conocimiento ante cada nuevo aprendizaje. No es un modelo de estadios, sino de fases recurrentes, en cada dominio y a lo largo del tiempo. Es por esto que su aplicación a distintos ejemplos no está ceñida a una edad determinada, sino más bien a la adquisición de un tipo de conocimiento particular. Pensando en alumnos de nivel secundario, en el camino a la comprensión acabada del momento de las fuerzas, aún falta la formulación en ecuaciones. El dominio de la matemática, sus propias representaciones y la codificación común necesaria para que se interrelacione con el dominio de la física, jugarán un papel central en la comprensión del proceso.

Un ejemplo en el dominio del mundo físico

Un niño juega a tirar al blanco con una piedra atada a un piolín. Para esto revolea la piedra por sobre su cabeza de forma que ésta sigue una trayectoria circular, en un plano paralelo al piso. Al tirarla hacia el blanco, suelta el piolín que sale junto con la piedra. Como en el caso de otras acciones físicas, el niño en su juego repetido o una persona interesada en perfeccionarse, puede entrenarse y mejorar mucho su puntería logrando maestría conductual en la tarea. Las representaciones motoras sobre los pasos seguidos para lograr dar en el blanco, seguirán siendo implícitas, aún cuando se haya desarrollado especialmente esa habilidad. Si se plantea al sujeto la pregunta "¿en qué lugar de la trayectoria suelta la cuerda?" es posible que se obtengan respuestas propias de las nociones alternativas, por ejemplo que lo hace en el momento en que la piedra está delante de él. Aún cuando sea un experto tirador, o sea que suelte la cuerda con la piedra antes de este momento, cuando el vector velocidad apunte hacia el blanco, las representaciones sensorio motoras no se vuelven explícitas solamente por repeticiones exitosas. La maestría conductual lograda en la tarea, mientras esta conserve su objetivo original de dar en el blanco, no llevará a la posibilidad de explicitar los movimientos que efectivamente se han realizado. Piaget (1974) también se interesó por éste y otros ejemplos de "toma de conciencia", estudiando las etapas en la dificultad de explicitar las representaciones de las tareas tal como han sido llevadas a cabo y, en este caso también cómo se llegan a resolver las contradicciones que plantean las predicciones erradas[4].

Matemática en la Física

El problema del lenguaje matemático en la física es bien conocido por los docentes. La necesidad de cuantificar para avanzar en la comprensión y resolución de problemas, presenta dificultades asociadas tanto al álgebra en sí como a la comprensión del significado de las variables que intervienen en las fórmulas. Aún cuando los alumnos puedan comprender un concepto físico, e incluso puedan relacionarlo con su experiencia en el mundo natural, la aparición del lenguaje matemático suele funcionar como obstáculo. Aunque los alumnos dominen el álgebra elemental, la "traducción" al mundo de la física no es de ninguna manera espontánea. La cuestión de los dominios y el modelo RR pueden ayudarnos a describir estas dificultades. Contar al menos con una descripción del proceso será útil para desarrollar estrategias didácticas para su superación.

El caso de la velocidad media

Para analizar el problema de la velocidad media y su algebrización, recordemos primero que Karmiloff Smith plantea la existencia de diferentes dominios, y dentro de cada uno de ellos diferentes fases en las que se va redescribiendo la información. Para que la información de dos dominios pueda interactuar, en cada uno de ellos las representaciones deben haber llegado a un nivel explícito (E1 o E2/3). Además debemos recordar que los procesos serán puestos en marcha ante cada nuevo aprendizaje, dadas las diferencias naturales entre ellos.

En el dominio de la física, el concepto de velocidad media es fácil de relacionar intuitivamente para los alumnos con la experiencia cotidiana de un auto, por ejemplo, al ir de un punto a otro de una ruta. Ante el problema de calcular velocidades medias, planteado en forma coloquial, los adolescentes (especialmente de clase media[5]) son capaces de resolverlo sin utilizar fórmulas. Contamos con el apoyo de la operación de división aprendida en la escuela, sumada a la familiaridad de la situación. Estos conceptos que se acumularon aditivamente en un nivel implícito, se redescribieron en un nivel más avanzado, dejando de lado las particularidades de cada movimiento para que tome cuerpo el concepto más abstracto de velocidad media. Aunque no puedan explicitar cómo lo hacen, los niños mayores, como ya dijimos, pueden hacer uso del concepto y calcularla (Pérez y Dibar Ure, 2004).

En el dominio matemático, el álgebra elemental de las cuatro operaciones básicas, suele estar disponible para los alumnos de nivel medio. Las representaciones son explícitas,

4 Estamos en la actualidad trabajando en temas relacionados con la gravedad, en adultos y también en niños de alrededor de 2 años (Vasconcelos et al, 2005)

5 La situación de ir en un vehículo por la ruta y que el adulto plantee como problema el de calcular cuál fue la velocidad promedio en algún tramo recorrido, no es necesariamente habitual para todos los grupos sociales.

aunque no puedan verbalizar sobre ellas.

¿Qué procesos queremos lograr, cuando la escolarización intenta utilizar las representaciones disponibles en ambos dominios para llegar a la correcta utilización de las ecuaciones de la cinemática, con un uso algebraico que permita avanzar en dirección de una mayor abstracción? Intentemos describir lo que hacen los alumnos.

Como ya dijimos ante el problema presentado en un ejemplo cercano a la experiencia de los alumnos, pueden sin dificultad hacer uso de sus representaciones del espacio recorrido, tanto como del tiempo empleado y de las cuentas elementales para dar un número como respuesta. La intervención didáctica que comienza a emplear el concepto de posición, y presenta la velocidad media como $v_m = \Delta x/\Delta t$, y en particular al explicitar Δx como $x_f - x_i$, hace que los alumnos empeoren su desempeño. Pasarán a decir "ya no entiendo". No son capaces de reconocer en esta fórmula lo mismo que antes hacían. ¿Por qué parece que esto ya no es lo mismo? Cuando lo logran, aún falta el paso de llegar a entender el significado de $x=x_0+v(t-t_0)$, o sea trabajar con condiciones iniciales y comprender el grado de previsión de tal ecuación. El uso de la ecuación para poder resolver problemas sin apelar a la mera sustitución mostrará la maestría conductual a la que habrán llegado en el tema. A partir de allí, las ecuaciones tomarán otro significado, y poder hacer uso del lenguaje matemático para describir situaciones modelizadas estará disponible para nuevos problemas (si se parecen lo suficiente).

Trataremos de pensar en el proceso de matematización de la física desde la perspectiva del modelo RR, en la tarea de calcular velocidades medias. ¿Cuál es el nivel implícito? Si bien sabemos que las representaciones matemáticas y físicas deben estar en nivel explícito para relacionarse, no necesariamente el proceso de modelización de la matemática comienza desde ese nivel. La intervención de la cultura (los padres, la escuela, etc.) es la que posibilita la primera síntesis. Pero debemos reconocer una fase previa donde aún las cuentas no se hacen presentes. Un niño puede reconocer cualitativamente si "va más rápido" o "tardó menos tiempo", pero la cuenta no tendrá todavía significado para él. Tomaremos esta fase como el nivel implícito, sin referirnos a los niños más pequeños aún, para quienes la velocidad se relaciona con "llegar primero"o "adelantarse". En este nivel, los alumnos pueden "hacer las cuentas", aunque no verbalizar pertinentemente el proceso que les permitió llegar al resultado.

La presentación de la fórmula produce un descenso en las producciones y un aumento en la "sensación" de no entender. Para aprender a modelizar la situación presentada, será deseable que los alumnos comiencen a familiarizarse con el lenguaje matemático. Una primera estrategia posible sería hablar sobre las situaciones usando pertinentemente las magnitudes involucradas. Una intervención didáctica que presente la posición como magnitud cinemática y la referencia a las situaciones cotidianas ya descriptas en un lenguaje pertinente a la física, ¿permitirá el paso a una situación intermedia donde la verbalización no es aún en lenguaje matemático? Otro paso intermedio posible sería usar simples sustituciones en fórmulas para permitir avanzar a los alumnos en la solución del problema, mostrando el acuerdo entre los primeros resultados y los que predicen las ecuaciones presentadas.

Cuando la situación pueda ser redescripta totalmente en lenguaje matemático, la comprensión de la ecuación de la posición en función del tiempo permitirá su uso en problemas nuevos. La mera sustitución habrá dejado paso al uso de una ecuación con todas sus implicaciones. Cambiar las condiciones iniciales, usar la misma ecuación para distintos tramos de un mismo recorrido, explorar los límites e interpretar resultados serán reflejos de maestría conductual en un nivel de representación más avanzado.

Algunas precisiones

• Estamos hablando de alumnos que van desde la escuela media al ingreso a la universidad.

• El proceso descrito se da únicamente en relación con la cultura. La matemática y la modelización de la física utilizando lenguaje matemático son producciones culturales.

• Cuando aquí hablamos de lenguaje y de

posibilidad de verbalización, nos estamos refiriendo al lenguaje pertinente de la física (definido con precisión) como paso intermedio para el lenguaje lógico matemático a utilizar en física. Es decir que la mera verbalización del proceso no indica la presencia del nivel E3. Reconocemos la presencia del nivel E2, pero no E3, cuando la representación es explícita en un lenguaje que no es el de la matemática.

• Otro problema a abordar será el del uso de gráficos, como un nuevo nivel de lenguaje. Pensemos en el desconcierto que produce en los alumnos un gráfico en función del tiempo, y la enorme dificultad que plantea su lectura. Todos hemos visto un móvil uniformemente acelerado "subiendo" por la parábola de x(t), o la recta v(t) ¡con una flecha marcando la dirección del móvil! Es difícil para los alumnos abandonar la redundancia de información y la imprecisión del lenguaje natural para ceñirse a la dureza del lenguaje algebraico y de gráficos.

El problema de los resortes

Si planteamos a los alumnos el problema de un resorte colocado verticalmente con una carga, y les presentamos la ley de Hooke es probable que no tengamos problema en que sustituyan los términos y lleguen a calcular fuerzas, estiramientos o constantes de resortes. Incluso podremos recurrir al trabajo en laboratorio para dar sentido a esa magnitud "extraña" que asigna un número a cada resorte y que comparte con otras magnitudes la dificultad de estar asociada a la pendiente de una recta. Pero el planteo de un problema donde a dos resortes puestos en serie (ver Anexo) se le aplica una fuerza dada y pedimos calcular el estiramiento del resorte, revelará las dificultades de matematizar la situación que subyacen a la resolución (Dibar Ure, 1984 y 1995). En términos del modelo físico, la solución puede hallarse desde el planteo de condiciones de contorno, o desde la mecánica racional que tiene la virtud de la elegancia, si bien no de la aplicabilidad para alumnos de nivel medio o primer año de la universidad.

¿Qué hacen los alumnos? Las estrategias más comunes pasan por diferentes sustituciones en la fórmula. Se trata de la utilización productiva de una fórmula que predijo bien lo que "vieron" en el laboratorio o por lo menos cualitativamente fácil de imaginar. Pero el nuevo problema tiene más datos de los que "entran" en la escueta ley de Hooke. Aparecen distintas estrategias, entre quienes no lo resuelven correctamente:

• El k es reemplazado por k_1+k_2, o por $(k_1+k_2/2)$, cuentas que en matemática les han resultado exitosas para diversas situaciones, y que revelan que no distinguen entre hipótesis y demostración

• Usan la longitud total, en lugar del estiramiento, y el k del último resorte (la proximidad del último resorte parece guiar la elección)

• Reemplazan alguna fuerza o alguna longitud enredándose en caminos que no conducen a la solución.

Para la traducción al lenguaje matemático de la nueva situación ya no alcanza con sustituir. La situación requiere de una intervención didáctica que señale la presencia de dos subsistemas donde también se cumple la ley y el estiramiento total "x" escrito matemáticamente como la suma de los estiramientos parciales "$x_1 + x_2$". Este no es un paso trivial. Requiere de precisión en los términos lingüísticos, la comprensión de sistemas equivalentes y una traducción matemática que apela a la comprensión de la fórmula más allá de la simple sustitución.

La expresión algebraica $x = x_1 + x_2$, toma su significado de la situación física de los resortes en serie. Pero su poder matemático reside en la capacidad de divorciarse de esa situación. Si la situación a la que está referida esa expresión proviene del mundo físico (natural), el proceso de redescripción en el dominio de la matemática deberá estar en un nivel explícito para comenzar a interactuar con otro dominio.

Mirando el proceso a la luz del modelo RR, podemos describir la sustitución en las fórmulas como un nivel implícito. Es explícito el poder usar cuentas, incluso se llega a la maestría conductual que permite aplicarlo a diferentes problemas. Nuevamente es índice de no haber alcanzado la redescripción en formato Explícito 2 el hecho que la fórmula no es leída conceptualmente como una función sino como incógnitas a ser despejadas.

Ante la presentación de un nuevo problema con dos resortes en serie, ¿apenas? más complicado que el de un único resorte, un alto porcentaje de los alumnos no llega a la solución correcta. La ley física es la misma, y al alumno le es dada ya formulada en términos matemáticos. Las estrategias de adaptación al problema anterior nos están mostrando que la aplicación a una situación física particular no resulta fácil.

El nivel Explícito 2/3 será alcanzado cuando la redescripción de la fórmula pase de un conjunto de variables a reemplazar por números, a un conjunto de variables relacionadas entre sí que funcionan para ambos subsistemas y para el sistema total. Para resolver el problema, será necesario plantear la suma de los estiramientos (suma de segmentos) disponible en el dominio matemático pero como hemos visto, no es fácil de relacionar con el contenido físico.

La estrategia didáctica, que en el caso de la velocidad media era volver a la experiencia anterior de ir en auto necesitará, por ejemplo, del laboratorio. La predicción que en un principio fallará puede ser productiva para el cambio. La retroalimentación negativa puede proveer de contraejemplos. Con una teoría que se está consolidando, la ley de Hooke, la retroalimentación positiva luego del éxito de las predicciones puede hacer consolidar el cambio, lográndose una maestría conductual en el uso de la ley para diferentes casos.

A manera de conclusiones

Si bien es factible la aplicación del modelo a situaciones diversas, la riqueza no surge de una clasificación posible en los distintos niveles de representación sino de la amplitud del marco teórico, que abarca desde el nacimiento hasta los aprendizajes socioculturales. Con respecto a la didáctica, su aplicación es productiva por sus implicancias: una descripción minuciosa en un marco teórico general nos alerta sobre los posibles orígenes de obstáculos clásicos. Puede ser éste un posible camino para diseñar estrategias didácticas que permitan superar esos obstáculos.

La relación interdominios puede ser descripta por el mismo modelo, y las dificultades clásicas de la relación entre la matemática y la física pueden ser vistas a la luz del cambio representacional que ellas implican. El estudio del dominio del lenguaje será una fuente de la que surgirán investigaciones pertinentes a los problemas planteados en el aprendizaje. Las categorías de lenguaje coloquial, lenguaje pertinentemente definido y lenguaje lógico matemático parecen describir adecuadamente las representaciones de los alumnos. Una investigación acerca del lenguaje en la enseñanza de las ciencias, y sus diferentes niveles, puede enriquecer la comprensión de estas representaciones.

Aunque no se han tocado explícitamente ejemplos de ideas previas, una pregunta que ronda en nuestras investigaciones pone el acento en la frecuencia con la que aparece el peso en las explicaciones desde edades tempranas. La consideración de las restricciones de dominio específico a través de la investigación con bebés puede ser una contribución para las investigaciones sobre las ideas previas (Pozo y Gómez Crespo 1998 y Pozo 1999).

Referencias

Baillergéon, R. y Hanko-Summers, S. (1990). Is the top object adequately supported by de bottom object? Young infants' understanding of support relations. *Cognitive Development*, 5 pp. 29-53.

Casávola, H. et al. (1984). El rol constructivo de los errores en la adquisición de los conocimientos. En J. A. Castorina et al. *Psicología Genética. Aspectos metodológicos e implicancias pedagógicas*. Bs. As.: Miño y Dávila, pp. 43-61.

Dibar Ure, M. C. (1984). A study of Brazilian University students to a problem in Mechanics. En *GIREP 84; The many Faces of Teaching and Learning Mechanics.*

Dibar Ure, M. C. (1995). Comentarios y un ejemplo sobre la dificultad de aprender a usar la matemática en la modelización. En *Propuesta Educativa*, 12, pp. 45-47.

Dibar Ure, M.C. et al. (2000). *Génesis* del concepto Vivo – No Vivo: esbozo de discusión teórica con ejemplos extraídos de entrevistas. *Actas del II Congreso Iberoamericano de Ciencias Experimentales*. Córdoba, Argentina.

Fodor, J.A. (1983). *The Modularity of Mind* MIT Press. Traducción al castellano (1986) *La modularidad de la mente*. Madrid: Morata.

Hirschfeld, L. A. y Gelman, S. (1994). *Mapping the Mind, Domain Specifity in Cognition and Culture*. Cambridge: Univ. Press.

Karmiloff Smith, A. e Inhelder, B. (1974) y (1975). If you want to get ahead, get a theory. *Cognition*, 3: pp. 195-212.

Karmiloff Smith, A.(1992). *Beyond Modularity. A developmental Perspective on Cognitive Science* . Cambridge, Mass: MIT Press. Versión en castellano *Más allá de la modularidad. La ciencia cognitiva desde la perspectiva del desarrollo*. Madrid: Alianza Editorial, 1994.

Karmiloff Smith, A. (1998a). Alternatives to Innate Knowledge: Why Development is Crucial to Understanding Human Representational Change. *Cognitive Studies* Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society, 5 (2), pp. 25–32.

Karmiloff Smith, A. (1998b). Development itself is the key to understanding development disorders. *Trends in Cognitive Sciencies*, 2 (10), pp 389-398.

Perez, S. M. y Dibar Ure, M.C. (2004). El lenguaje matemático en cinemática elemental: una mirada desde el cambio representacional. *Actas del SIEF VII*. La Pampa. Argentina.

Piaget, J. (1974). La Prise de Conscience, PUF, Paris. Traducción (1976) *La toma de conciencia*. Madrid: Morata.

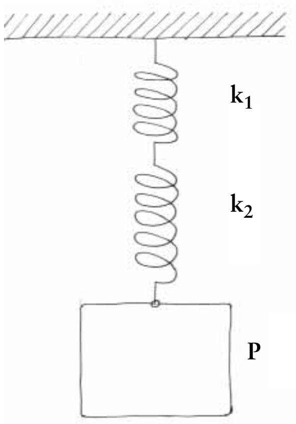
Pozo, J. I. y Gómez Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Ediciones Morata.

Pozo, J. I. (1999). Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), pp. 513-520.

Vasconcelos, V.; Colinvaux, D.; Dibar Ure, M.C. y Cafferata, M. T. (2005). Diálogo teórico acerca del desarrollo del niño en una guardería. Mesa Redonda a desarrollarse en el SIP 2005. Buenos Aires, Argentina.

ANEXO

Problema de dos resortes en serie



Imaginemos que nos interesa estudiar dos resortes, uno colgado en el extremo del otro, con una pesa que los estira.

El resorte 1 (cuando no cuelga de él ninguna pesa) mide 20 cm de largo y tiene una constante $k_1 = 3\ k\vec{g}/cm$.

El resorte 2 (sin pesa) mide 30 cm de largo y tiene una constante $k_2 = 2\ k\vec{g}/cm$.

Queremos saber qué peso habrá que colgar en el extremo de los dos resortes para que el conjunto se estire 10 cm.

Resolución

Se plantea la Ley de Hooke para ambos resortes:

1) $F_1 = k_1 \cdot x_1$

2) $F_2 = k_2 \cdot x_2$

El estiramiento total como la suma de los estiramientos de ambos resortes:

3) $x = x_1 + x_2$

Igualando F_1 y F_2 a P, por la 3ª ley de Newton aplicada a un sistema en equilibrio, y luego usando la ecuación 3) se obtiene:

$$x_1 = \frac{k_2 x}{k_1 + k_2}$$

y reemplazando en la ecuación 1) se obtiene:

$$P = \frac{-k_1 \cdot k_2 x}{k_1 + k_2}$$

Finalmente, usando los datos:

$P = 12\ k\vec{g}$