

## La aerodinámica de la pelota de fútbol<sup>1</sup>

Carlos E. Aguiar - Gustavo M. Rubini

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil  
carlos@if.ufrj.br

*Se estudian las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre una pelota de fútbol. Analizando el video de una jugada famosa de Pelé mostramos que un fenómeno curioso (la crisis del arrastre), la transición de régimen laminar a turbulento, influyó significativamente en el movimiento de la pelota. El efecto Magnus, asociado a la rotación de la pelota, también se reveló importante para el fracaso de la jugada. Usando un programa de computadora que simula el movimiento de las pelotas pateadas en diferentes condiciones, discutimos varios aspectos de la jugada de Pelé y de la Física del fútbol, en particular las pelotas con efecto y la “hoja seca” de Didi.*

**Palabras clave:** Física de los deportes, fútbol, crisis del arrastre, efecto Magnus.

*We study the aerodynamic forces acting on a soccer ball. Analyzing the video of a famous shot by Pelé, we show that a curious phenomenon, the drag crisis, greatly influenced the motion of the ball. The Magnus effect, caused by the rotation of the ball, was also important to the outcome of the kick. Using a computer code that simulates the flight of balls we discuss several aspects of Pelé’s shot and of soccer physics, in particular bending kicks and Didi’s “dry leaf”.*

**Keywords:** physics of sports, soccer, drag crisis, Magnus force.

### Introducción

La física de los deportes es un área de estudios fascinante, con aplicaciones prácticas evidentes y un gran potencial pedagógico (Laroy, 1977; Gomes y Partelli, 2001; Armenti, 1992). El fútbol, en particular, tal vez el deporte más popular del mundo, puede brindar una motivación especial para el aprendizaje de muchos tópicos de Física.

En este trabajo estudiamos las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre una pelota de fútbol. Mostramos que un fenómeno notable, la *crisis del arrastre*, desempeña un papel importante en situaciones normales de juego. La *crisis del arrastre* es la reducción abrupta que la resistencia del aire sufre cuando la velocidad de la pelota aumenta más allá de un cierto límite. Este es un fenómeno bien conocido en la dinámica de los fluidos, aunque con frecuencia no se trata en cursos de Física Básica (una excepción es Feynman, Leighton y Sands,

1964). Demostramos la importancia de la *crisis del arrastre* para el fútbol analizando un lance famoso, el gol que Pelé logró en la Copa de 1970, en el partido de Brasil con Checoslovaquia. Para ello, digitalizamos un video de la jugada, y obtuvimos la trayectoria de la pelota con un programa de análisis de imágenes desarrollado por nosotros. Un segundo programa simula el movimiento de la pelota teniendo en cuenta las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre ella. La comparación de estos cálculos con los datos extraídos de la filmación muestra que no es posible describir el movimiento de la pelota pateada por Pelé sin tener en cuenta la *crisis del arrastre*. Otro fenómeno aerodinámico importante para la comprensión de la jugada es el efecto Magnus, causado por la rotación de la pelota. Nuestro análisis de la trayectoria muestra que Pelé aumentó significativamente el alcance de la pelota pateando con “efecto”.

Este trabajo está organizado de la siguiente

<sup>1</sup> Traducción autorizada por los autores del artículo “A aerodinâmia da bola de futebol”, publicado en la Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol. 26 N° 4.

manera: discutimos en primer lugar la resistencia del aire y la *crisis del arrastre*. Abordamos luego la relación de la crisis con la turbulencia de la capa límite y, a continuación, la importancia de la *crisis del arrastre* en diferentes deportes y la relación entre la rotación de la pelota y el efecto Magnus. En las secciones siguientes describimos el análisis del video con la jugada de Pelé y la obtención de la trayectoria de la pelota. Mostramos que tanto la *crisis del arrastre* como el efecto Magnus son esenciales para la descripción de esa trayectoria. Presentamos un programa de simulación que permite estudiar de forma muy sugestiva varios aspectos de la Física del fútbol, entre ellos el papel desempeñado por la *crisis* y el efecto Magnus. Con el programa exploramos la dinámica de los tiros con efecto, y discutimos la famosa *hoja seca* de Didi. La última sección contiene nuestras conclusiones y algunos comentarios finales.

### La fuerza de arrastre

Una pelota de fútbol en movimiento en el aire está sujeta a fuerzas aerodinámicas causadas por la presión y viscosidad del medio. La fuerza resultante puede ser descompuesta en dos componentes: la de arrastre, antiparalela a la velocidad, y la de sustentación, perpendicular a la velocidad. En esta sección vamos a discutir las propiedades de la fuerza de arrastre. La fuerza de sustentación que surge cuando la pelota está girando (efecto Magnus) será tratada más adelante.

La fuerza de arrastre depende fuertemente de la velocidad  $V$  con que la pelota se mueve

$$F_A = \frac{1}{2} C_A \rho A V^2, \quad (1)$$

en relación al aire. Es conveniente parametrizar esa dependencia introduciendo el coeficiente de arrastre  $C_A$ , en términos del cual la fuerza de arrastre  $F_A$  se escribe donde  $\rho$  es la densidad del aire ( $1,224 \text{ kg/m}^3$  al nivel del mar) y  $A$  es el área de la sección transversal de la pelota. El coeficiente de arrastre es una magnitud adimensional, y por lo tanto sólo puede depender de magnitudes

igualmente adimensionales. Para una pelota con velocidad mucho menor que la del soni-

$$Re = \frac{\rho D V}{\eta}, \quad (2)$$

do, la única magnitud de este tipo es el número de Reynolds,

donde  $D$  es el diámetro de la pelota y  $\eta$  la viscosidad del aire ( $1,83 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ). El número de Reynolds mide la razón entre las fuerzas inerciales y viscosas que actúan en la pelota, e indica el tipo de régimen del fluido; valores pequeños de  $Re$  corresponden a régimen laminar, mientras que valores grandes están asociados a formación de turbulencias. La línea llena de la Figura 1 muestra el coeficiente de arrastre determinado experimentalmente para una esfera lisa en función del número de Reynolds (Landau y Lifshitz, 1987).

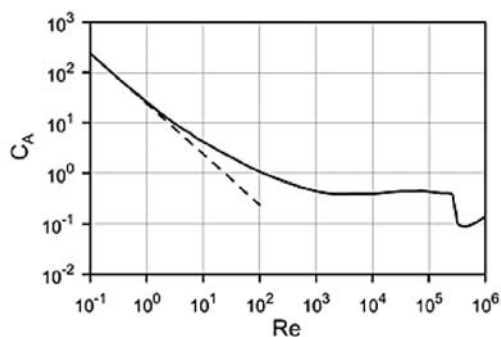


Figura 1. Coeficiente de arrastre de una esfera lisa, en función del número de Reynolds. La línea llena es el resultado de medidas realizadas en túneles de viento. La línea de trazos corresponde a la fórmula de Stokes (fuerza de arrastre proporcional a  $V$ )

Para pequeños números de Reynolds,  $Re \ll 1$ , el coeficiente de arrastre está dado por la fórmula de Stokes,

$$C_A = 24/Re. \quad (3)$$

En este caso, la fuerza de arrastre es linealmente proporcional a la velocidad. La línea de trazos en la Figura 1 muestra los valores de la fórmula de Stokes, y vemos que se ajusta a los valores medidos hasta  $Re \approx 1$ . Para una am-

plia zona de valores de  $Re$ , entre aproximadamente  $10^3$  y  $3 \times 10^5$ , el coeficiente de arrastre es prácticamente constante, manteniéndose en torno de  $C_A = 0,5$ . Consecuentemente, en esta región la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad. El aspecto más curioso de la Figura 1 es la caída abrupta de  $C_A$  (en un factor del orden de 5) en torno de  $Re = 3 \times 10^5$ . Esta reducción drástica de la resistencia del aire se llama *crisis del arrastre*.

La pelota de fútbol tiene un diámetro  $D = 22$  cm. Por lo tanto, la relación entre la velocidad de la pelota y su número de Reynolds es

$$V = (6,7 \times 10^{-5} \text{ m/s}) \times Re. \quad (4)$$

Con esta expresión es fácil verificar que el arrastre lineal ( $Re \ll 1$ ) sólo ocurre para velocidades irrisorias, muy por debajo de 0,1 mm/s. O sea, la “resistencia proporcional a la velocidad”, tan popular en los textos de Física Básica, no tiene ninguna importancia para el fútbol, ni para cualquier objeto razonablemente grande moviéndose en el aire. Vemos también que para una pelota de fútbol (supuesta una esfera lisa) la *crisis del arrastre* ocurre en  $V \approx 20$  m/s. La región donde la resistencia del aire es proporcional a  $V^2$  corresponde a velocidades entre 0,1 m/s y 20 m/s.

La velocidad máxima que los jugadores profesionales consiguen dar a una pelota de fútbol es del orden de 30 m/s. Quienes mejor patean llegan a 35 m/s. Por lo tanto, durante un partido de fútbol la pelota debe pasar varias veces por el punto de crisis. En este trabajo investigaremos cómo la *crisis* afecta de forma perceptible el movimiento de la pelota. Pero antes vamos a ver un poco más sobre este fenómeno.

### La crisis del arrastre y la capa límite

La crisis del arrastre está directamente asociada al comportamiento de la “capa límite” de aire que se forma en torno de la pelota. La capa límite tiene origen en la adherencia de las moléculas del aire a la superficie de la pelota.

La viscosidad transmite parcialmente esta adherencia a las moléculas más distantes, formando una región que tiende a moverse con la pelota. Esta región es la capa límite, o capa de Prandtl. Es por esto que las aspas de un ventilador quedan sucias; las partículas de polvo acumuladas sobre su superficie están dentro de la capa límite, donde no hay viento para barrerlas.

Para números de Reynolds aproximadamente menores que 20, la capa límite envuelve completamente a la pelota. El régimen del aire es laminar, y el arrastre está dominado por la viscosidad. Para valores mayores de  $Re$  la capa límite se separa de la esfera en la parte posterior, generando una estela como la mostrada en la parte superior de la Figura 2. La separación causa una disminución significativa de la presión en la parte de atrás de la esfera, y la diferencia entre las presiones delantera y trasera pasa a dominar el arrastre.

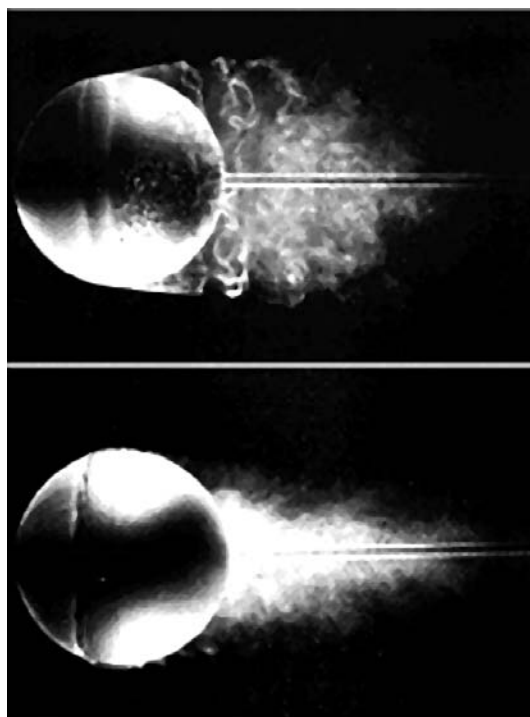


Figura 2. Separación de la capa límite en una esfera (foto ONERA, Werlé, 1980). Arriba, capa laminar; debajo, capa turbulenta

La crisis del arrastre se produce cuando la capa límite se torna turbulenta. La turbulencia permite que la capa resista mejor la tendencia a la separación (Shapiro, 1961), y con eso el punto de escurrimiento se mueve más hacia atrás de la esfera, disminuyendo el área de la estela. La parte inferior de la Figura 2 muestra la separación de una capa límite turbulenta. Ahí se encuentra el origen de la crisis: la contracción de la estela reduce el área de la esfera sometida a bajas presiones y causa una disminución de la resistencia del aire.

La textura de la superficie también afecta el escurrimiento de la capa límite. Una esfera rugosa sufrirá la crisis con un número de Reynolds de valor inferior al de una esfera lisa. La rugosidad precipita la turbulencia en la capa límite y, consecuentemente, disminuye la resistencia del aire a altas velocidades. Parece extraño que una pelota áspera ofrezca menos resistencia al aire que una lisa, pero eso es exactamente lo que ocurre. Es por esa razón que las pelotas de golf tienen orificios cavados en toda su superficie; así ellas llegan más lejos. Y es interesante ver en la Figura 3 como algunas pelotas de fútbol modernas se inspiran en las de golf, presentando las mismas cavidades características.

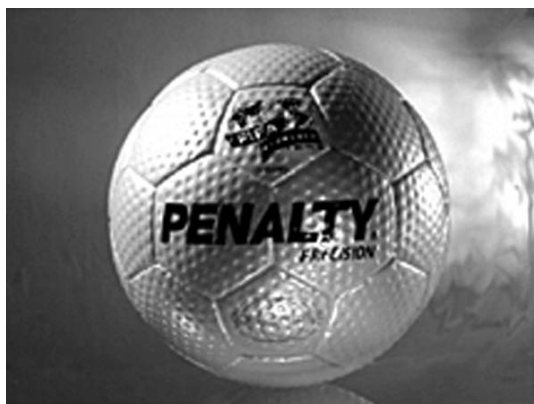


Figura 3. Pelota de fútbol con cavidades semejantes a las de una pelota de golf

Es difícil decir exactamente dónde ocurre la crisis para una pelota rugosa, porque eso depende no sólo de su grado de irregularidad, sino también de su distribución en la superficie.

De todos modos, una indicación puede encontrarse en la Figura 4, que muestra el coeficiente de arrastre para pelotas con varios grados de aspereza (Achenbach, 1974). Vemos que la crisis puede ocurrir para valores bien diferentes de  $Re$ , dependiendo de la rugosidad de la superficie. Nótese que las pelotas de golf sufren la crisis con un valor del número de Reynolds particularmente bajo, gracias al cuidadoso diseño de las cavidades de su superficie. Las pelotas de fútbol comunes pueden ser consideradas como razonablemente lisas, pero no se sabe con certeza dónde está su punto de crisis (Asai et al, 1998; Carré et al, 2002). Otra complicación es el grado de turbulencia ya existente en el aire, que puede disparar antes la crisis. La localización ligeramente diferente de la crisis para esferas lisas en las Figuras 1 y 4 probablemente se deba a distintos niveles de turbulencia en los túneles de viento donde se realizaron las mediciones.

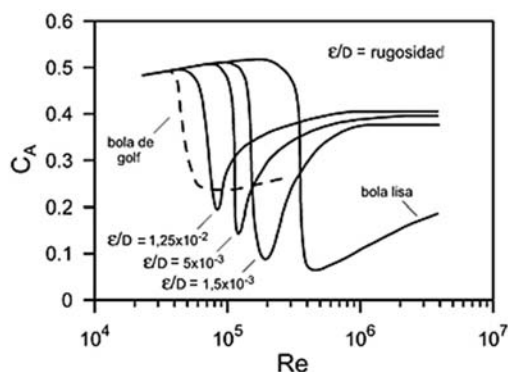


Figura 4. Coeficiente de arrastre para diferentes grados de rugosidad  $\epsilon/D$ , donde  $\epsilon$  es la altura típica de las irregularidades y  $D$  el diámetro de la bola

### La crisis en otros deportes

Es interesante investigar en qué otros deportes se puede manifestar la *crisis del arrastre*. Calculando el número de Reynolds para el diámetro de la pelota en cuestión y para una (alta) velocidad típica del juego, obtuvimos los resultados de la Tabla 1.

Tabla 1. Características de la pelota en diferentes deportes: velocidad (alta), diámetro, masa y número de Reynolds

Deporte	Vel. (m/s)	Diam. (cm)	Masa (g)	Re/10 <sup>5</sup>
Fútbol	30	22,2	454	4,4
Voley	30	21,0	270	4,2
Tenis	45	6,5	58	2,0
Béisbol	40	7,3	145	1,9
Golf	60	4,3	46	1,7
Básquet	10	24,3	600	1,6
Tenis de mesa	5	3,8	25	0,13

Vemos que el fútbol y el voley están entre los deportes que alcanzan los mayores números de Reynolds y en los que la velocidad de crisis se alcanza con facilidad. La velocidad de crisis también es ampliamente superada por la pelota de golf, debido a su diseño especial. En el caso del béisbol no está claro, pero hay evidencias de que la crisis ocurre tanto en pelotas lanzadas como en las bateadas (Frohlich, 1984; Sawicki et al., 2003). Para la pelota pequeña y lisa del tenis de mesa no parece haber muchas chances de pasar la crisis. En el tenis y en el básquet, cuyas pelotas son bastante rugosas, es posible que la crisis ocurra con frecuencia.

### El efecto Magnus

Cuando la pelota de fútbol gira en torno de su centro, una fuerza de sustentación (perpendicular a la velocidad) pasa a actuar sobre ella: la fuerza de Magnus. Esta fuerza puede escribirse como (Alaways, 1998):

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} C_S \rho A V^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}}{|\vec{\omega} \times \vec{V}|}, \quad (5)$$

donde  $\omega$  es el vector velocidad angular. Puede observarse que la fuerza de Magnus es perpendicular a la velocidad y al eje de rotación. El coeficiente de sustentación  $C_S$  desempeña un papel semejante al coeficiente de arrastre discutido en la sección anterior. Es una magnitud adimensional, y por lo tanto sólo puede ser

función del número de Reynolds  $Re$ , del “parámetro de rotación”  $S = \omega r/V$  ( $r$  es el radio de la pelota), y del ángulo  $\zeta$  entre la velocidad y el eje de rotación. Es útil definir el coeficiente de Magnus  $C_M = C_S / (S \text{ sen } \zeta)$  (Adair, 1995), en términos del cual la fuerza de Magnus toma la forma

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} C_M \rho A r \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (6)$$

Medidas de la fuerza de Magnus en pelotas de béisbol y fútbol (todas rotando con el eje de rotación perpendicular a la velocidad, o sea  $\zeta = \pi/2$ ) parecen indicar que  $C_M \approx 1$ , dependiendo francamente de  $S$ , y en menor medida de  $Re$  (Carre et al., 2002; Sawicki et al., 2003; Alaways, 1998; Adair, 1995; Briggs, 1959; Wats y Ferrer, 1987). Hay también alguna evidencia de que  $C_M$  es independiente de  $\zeta$  (Alaways, 1998). Por esto se puede considerar  $C_M(Re, S, \zeta) = 1$  como una aproximación razonable para el coeficiente de Magnus. Pero es importante resaltar que en algunas situaciones esta aproximación puede fallar. En esferas muy lisas, por ejemplo, el coeficiente de Magnus puede ser incluso negativo –efecto anti-Magnus– (Briggs, 1959).

La explicación del efecto Magnus en las pelotas deportivas está dada por el comportamiento de la capa límite sobre las rotaciones. La Figura 5 muestra el flujo de aire en torno de una pelota que gira en sentido horario. Puede observarse que la separación de la capa límite está anticipada en la parte de abajo de la pelota, en la que la rotación se opone al flujo de aire, y demorada en la parte de arriba, donde la rotación acompaña el paso del aire. La asimetría en la separación de la capa límite empuja el aire de atrás de la pelota para abajo. Por la 3ª ley de Newton, la pelota sufre una fuerza en sentido contrario, hacia arriba, que da origen al efecto Magnus.

### El gol que Pelé no hizo

“Por un momento, nadie entendió. ¿Por que Pelé no pasó? ¿Por que pateaba desde tan espantosa distancia? Y al arquero le costó per-

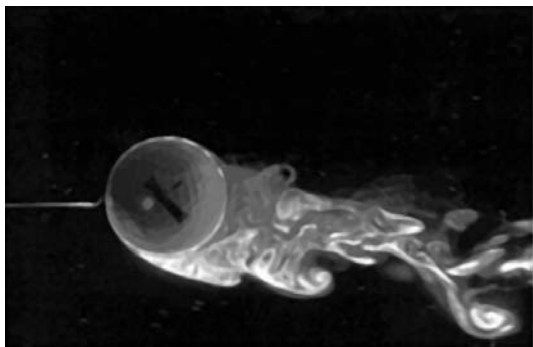


Figura 5. Separación de la capa límite en una pelota girando en sentido horario. Foto por H. Higuchi e M. van Rooij, Dpt. of Mechanical, Aerospace and Manufacturing

*cibir que él era la víctima. Su horror tuvo algo de cómico. Comienza a correr, con pánico. De vez en cuando, para y mira. Allí venía la pelota. Parecía una escena de los Tres Chiflados. Y por un pelo, no entra el más fantástico gol de todas las Copas pasadas, presentes y futuras. Los checoslovacos parados, los brasileños parados, los mexicanos parados.... Fue un increíble milagro que no se consumara ese gol tan merecido. Aquel fue, sí, un momento de eternidad del fútbol.”*

En el texto anterior, Nelson Rodrigues (1993) describe el “gol que Pelé no hizo” en el partido de Brasil con Checoslovaquia por la Copa del Mundo de 1970, en Guadalajara. Analizamos esta jugada célebre a partir de un video, y obtuvimos la trayectoria de la pelota pateada por Pelé. Para ello, el tramo de video conteniendo la escena fue digitalizado y guardado en formato AVI en una computadora. Cada cuadro de video (son 29,7 por segundo) fue guardado como una imagen individual en formato BMP. Dos de esos cuadros (el inicio y el final de la jugada) se muestran en la Figura 6.

Las imágenes se analizaron con un programa escrito en Logo que, con técnicas de geometría proyectiva, extrajo la posición de la pelota en cada cuadro. La obtención de las 3 coordenadas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) de la pelota a partir de la información bidimensional disponible y la filmación exige algunas hipótesis suplementarias sobre la trayectoria: supusimos que la pelota se movió en un plano vertical. La locali-



Figura 6. Arriba: el tiro de Pelé. Debajo: la pelota pasa frente al travesaño.

zación de ese plano en relación al piso se determinó por la posición inicial de la pelota, que estaba en el suelo en el momento del disparo, y por el hecho que la trayectoria pasó frente al poste izquierdo del arco checo. Con esa hipótesis pudimos calcular la “tercera” dimensión que falta en la película. Es interesante indicar que, si Pelé hubiese acertado y realizado el gol, nuestro análisis hubiese sido mucho más difícil, porque no se disponía de esa segunda referencia para determinar el plano de la trayectoria.

La trayectoria encontrada se presenta en la Tabla 2. La parte intermedia del movimiento no fue filmada (el camarógrafo debió estar tan sorprendido como el arquero) y, por lo tanto, no se tienen las posiciones más altas de la pelota. El sistema de referencia que utilizamos tiene origen en el centro del campo ( $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ ). El eje  $X$  se encuentra a lo largo del

campo en dirección de la meta adversaria, Y está en la dirección del ancho del campo alejándose de la cámara, y el eje Z da la altura de la pelota.

Tiempo (s)	X (m)	Y(m)	Z(m)
0.034	-4.3	-2.9	0.3
0.067	-3.4	-2.9	0.6
0.101	-2.4	-3.0	0.8
0.135	-1.5	-3.0	1.2
0.168	-0.6	-3.0	1.5
0.202	0.4	-3.0	1.7
0.236	1.2	-3.0	2.0
0.269	2.1	-3.0	2.3
0.303	2.9	-3.0	2.6
0.337	3.9	-3.0	2.8
0.370	4.7	-3.0	3.1
0.404	5.5	-3.1	3.4
0.438	6.2	-3.1	3.6
0.471	7.1	-3.1	3.8
0.505	7.7	-3.1	4.0
2.862	49.0	-3.6	2.8
2.896	49.6	-3.6	2.6
2.929	50.1	-3.6	2.2
2.963	50.6	-3.6	1.9
2.997	51.2	-3.6	1.7
3.064	52.2	-3.7	1.2
3.098	52.8	-3.7	0.9
3.131	53.1	-3.7	0.6
3.165	53.8	-3.7	0.3

Tabla 2. Trayectoria de la pelota obtenida a partir del video.

Para obtener las “condiciones iniciales” del tiro de Pelé, se ajustaron líneas rectas a los cuatro primeros puntos de la Tabla 2. Así encontramos el instante y la posición de disparo, y la velocidad inicial de la pelota. (Definimos como condición inicial el punto en que la pelota tenía  $Z = 0$ .) Los resultados se muestran en la Tabla 3. La velocidad inicial de la pelota es  $V = 29,1$  m/s, muy por sobre el punto en que se produciría la crisis del arrastre. El ángulo entre la velocidad inicial y el plano del piso es  $\theta = 17,6^\circ$ . Un procedimiento semejante se aplicó al final de la trayectoria, mostrando cuándo y dónde cae la pelota, y con qué velocidad. Los números están en la última línea de la Tabla 3. La pelota toca el suelo con  $V =$

17,6 m/s, y la caída es bastante más vertical que el lanzamiento, pues el ángulo entre la velocidad final y el plano de la cancha es  $\theta = -30,2^\circ$ . De los resultados de la Tabla 3, vemos que la pelota permaneció 3,20 segundos en el aire y cayó a 59,5 metros del punto de disparo.

t	X	Y	Z	$V_X$	$V_Y$	$V_Z$
(s)		(m)			(m/s)	
0,003	-5,2	-2,9	0,0	27,8	-0,4	8,8
3,200	54,3	-3,7	0,0	15,2	-0,2	-8,9

Tabla 3. Posición y velocidad de la pelota pateada por Pelé al comienzo ( $t=0,003$  s) y final ( $t=3,200$  s) de la trayectoria

### La crisis del arrastre y el efecto Magnus en el tiro de Pelé

Para investigar cómo la *crisis del arrastre* y el efecto Magnus desempeñaron un papel importante en la jugada de Pelé, calculamos numéricamente la trayectoria de la pelota, partiendo de las condiciones iniciales de la Tabla 3. Para simplificar el cálculo, consideramos que el coeficiente de arrastre es  $C_A = 0,5$  para  $V < V_{crisis}$  y  $C_A = 0,1$  para  $V > V_{crisis}$ . Como no conocemos bien el efecto de la rugosidad de la pelota de fútbol sobre la velocidad de crisis, dejamos  $V_{crisis}$  como un parámetro libre del modelo. Debemos notar, sin embargo, que la forma específica que adoptamos para el coeficiente de arrastre presupone que la pelota de fútbol es razonablemente lisa; si es muy áspera deberíamos considerar una dependencia más complicada de la velocidad, como las mostradas en la Figura 4. El valor de la densidad del aire que usamos fue  $\rho = 1,05$  kg/m<sup>3</sup>, apropiado para los 1600 metros de altitud de Guadalajara. Tomamos para el coeficiente de Magnus el valor constante  $C_M = 1$  discutido anteriormente. Supusimos además que el eje de rotación de la pelota apunta siempre en la dirección Y, y que la velocidad de rotación no disminuyó apreciablemente a lo largo de la trayectoria. Con esto quedamos con apenas dos magnitudes indeterminadas: la velocidad de crisis,  $V_{crisis}$ , y la frecuencia de rotación de

la pelota,  $f$ . Atribuyendo valores a esos parámetros tenemos una trayectoria bien definida, que puede ser comparada con los datos obtenidos del video.

Una medida de la diferencia entre la trayectoria calculada  $\mathbf{r}(t)$  y los resultados experimentales está dada por la ecuación

$$L^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{\mathbf{r}}(t_i) - \bar{\mathbf{r}}_i]^2 \quad (7)$$

donde  $t_i$  y  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) son los  $N$  puntos medidos. El valor de  $L$  da la distancia media (cuadrática) entre las posiciones observadas y las calculadas con el modelo. La velocidad de crisis y la frecuencia de rotación de la pelota pueden ser obtenidas determinando los valores de  $V_{crisis}$  y  $f$  que corresponden a la trayectoria que más se aproxima a los datos, o sea, que tiene el menor valor de  $L^2$ . Esos valores son:  $V_{crisis} = 23,8$  m/s;  $f = -6,84$  Hz.

El signo negativo de  $f$  corresponde a un *backspin*, o sea, una rotación con sentido negativo de  $Y$ . Eso significa que Pelé “pegó abajo” al patear la pelota, lo cual, como veremos, fue fundamental para el desarrollo de la jugada. El ajuste obtenido de la  $L = 28$  cm, un resultado muy aceptable considerando la simplicidad del modelo: la distancia media entre los puntos medidos y la trayectoria calculada es del orden del diámetro de la pelota (22 cm). La Figura 7 muestra la trayectoria calculada (en el plano  $Z - X$ ), juntamente con los puntos medidos.

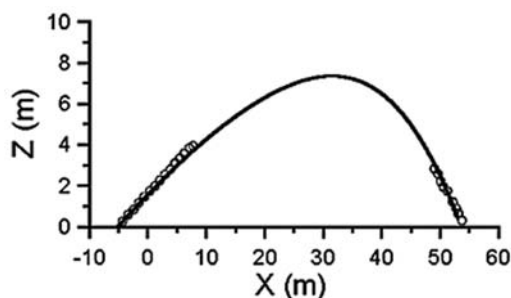


Figura 7. La trayectoria en el plano  $Z - X$  de la pelota pateada por Pelé. Los círculos son la medidas hechas a partir del video. La línea continua fue obtenida con el modelo descrito en el texto

La *crisis del arrastre* desempeñó un papel importante en la dinámica de la pelota pateada por Pelé. Sin la crisis, el arrastre posterior al tiro correspondería a aproximadamente dos veces el peso de la pelota. La crisis redujo ese valor a cerca del 40% del peso. Más aún, la baja resistencia del aire persistió durante casi la mitad del camino recorrido por la pelota. Por lo tanto, es claro que una disminución de esa magnitud, y que duró tanto tiempo, afectó profundamente la trayectoria de la pelota.

La relevancia del efecto Magnus para la jugada de Pelé puede ser evaluada a partir del valor encontrado para la frecuencia  $f$ . Esta rotación (cerca de 400 rpm) generó una fuerza de sustentación del orden de la mitad del peso de la pelota durante toda la trayectoria, lo que sin duda tiene un efecto significativo sobre el movimiento.

Podemos aún notar que el valor encontrado para  $V_{crisis}$  corresponde a un número de Reynolds  $Re = 3 \times 10^5$ , en la zona esperada para esferas lisas (ver las Figuras 1 y 4). Por lo tanto, la hipótesis de que la pelota de fútbol usada en la Copa del 70 era razonablemente lisa se muestra consistente con el resultado del ajuste.

Una cuestión que puede plantearse es si es posible describir el tiro de Pelé sin recurrir a la *crisis del arrastre*, usando sólo otra velocidad de rotación. Eliminamos la crisis, haciendo  $C_A = 0,5$  para todas las velocidades, y calculamos la frecuencia de rotación que concuerde con una mejor descripción de los datos. El resultado fue  $f = -9,0$  Hz, y el ajuste resultó muy malo: encontramos una distancia media  $L = 7,4$  m entre los datos y la trayectoria calculada. La comparación con el valor  $L = 0,28$  m obtenido teniendo en cuenta la crisis muestra la importancia que ella tiene en el movimiento de la pelota.

Otra cuestión, complementaria a la anterior, es si podemos describir la trayectoria sin el efecto Magnus, modificando algo la velocidad de crisis. Fijamos  $f = 0$  y encontramos que en este caso el mejor valor para la velocidad de crisis sería  $V_{crisis} = 24,8$  m/s. Nuevamente el ajuste resultó pésimo, con  $L = 9,3$  m. Por lo tanto, no es posible dejar de lado el efecto Magnus si queremos entender el tiro de Pelé.

Así, nuestra conclusión principal es que tanto la *crisis del arrastre* como el efecto Mag-



nus desempeñan un papel importantísimo en la dinámica de una pelota de fútbol. Es imposible tener una buena descripción del tiro efectuado por Pelé sin tener en cuenta esos aspectos de la aerodinámica de la pelota. Las simulaciones que mostraremos a continuación darán una visión más clara de lo que sucede.

### Fútbol en la computadora

Los resultados de la sección anterior proveen un modelo razonablemente realista para la dinámica de una pelota de fútbol en vuelo. Implementamos este modelo en un programa escrito en Logo, que simula el movimiento tridimensional de la pelota a partir de condiciones iniciales dadas (posición, velocidad y rotación). La versión de Logo que utilizamos fue el SuperLogo, producido por NIED/Unicamp en portugués, que es gratuito<sup>1</sup>. Los recursos gráficos en 3D del SuperLogo hacen particularmente simple la elaboración de un programa de simulación, pues el tratamiento de la perspectiva tridimensional es realizado automáticamente por el lenguaje. La trayectoria de la pelota fue obtenida numéricamente con el método de Euler, un procedimiento que puede ser entendido igualmente por alumnos que no conocen cálculo diferencial. El resultado es un programa simple, que puede ser explorado y modificado sin dificultades por profesores y alumnos con diferentes niveles de formación matemática y computacional<sup>2</sup>.

Un ejemplo de utilización del programa se muestra en la Figura 8, donde vemos la simulación del tiro de Pelé. La marca en el medio de la trayectoria indica el punto donde ocurrió la *crisis del arrastre*.

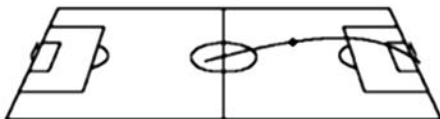


Figura 8. Simulación del tiro de Pelé. La crisis del arrastre se produce en el punto marcado de la trayectoria

Podemos investigar la importancia de la *crisis del arrastre* para la jugada de Pelé, no considerándola, o sea haciendo  $C_A = 0,5$  para todas las velocidades. Lo que ocurriría con la pelota en caso que la crisis no redujese la resistencia del aire está mostrado en la Figura 9: ella no llegaría ni siquiera al área grande.

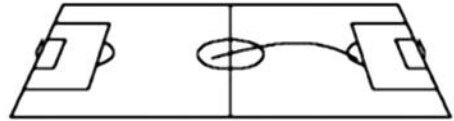


Figura 9. Lo que sucedería con la pelota pateada por Pelé de no existir la crisis del arrastre.

La importancia del efecto Magnus puede ser evaluada del mismo modo. Si la pelota pateada por Pelé no tuviera rotación, su trayectoria sería la mostrada en la Figura 10. No llegaría al área grande, esta vez por la ausencia de la fuerza de sustentación creada por el efecto Magnus.

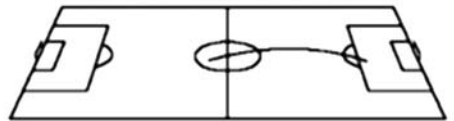


Figura 10. Lo que sucedería con la pelota pateada por Pelé sin el efecto Magnus

Pero tal vez lo más sorprendente es lo que ocurriría si no existiesen ni el arrastre ni la fuerza de Magnus (o sea, si la pelota hubiese sido pateada en el vacío). La parábola descrita por la pelota se muestra en la Figura 11. Vemos que ella caería bastante antes del arco, a pesar de no haber resistencia del aire. Eso muestra una vez más cuán importante es la sustentación aerodinámica creada por el efecto Magnus.

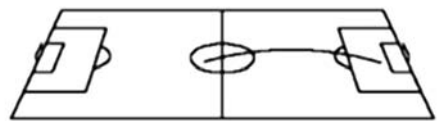


Figura 11. Lo que sucedería con la pelota pateada por Pelé en el vacío

Muchos otros aspectos interesantes del juego de fútbol pueden ser explorados con el programa de simulación. Los tiros con “efecto”, por ejemplo, revelan algunas de las consecuencias más espectaculares de la fuerza de Magnus. En la Figura 12 vemos la trayectoria de pelotas pateadas desde un mismo punto, con la misma velocidad, y con diferentes rotaciones en torno del eje vertical (0, 5 y 10 Hz). La pelota sin rotación (0 Hz) pasa lejos del poste mientras las pelotas con efecto van en la dirección del arco.

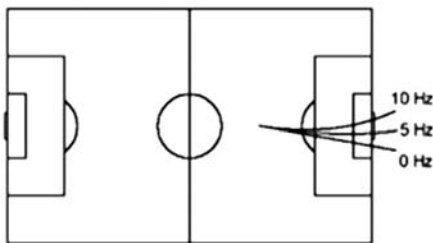


Figura 12. Trayectorias de pelotas con rotación en torno al eje vertical

Por último, vamos a discutir una jugada casi mitológica del fútbol brasileño: la *hoja seca* de Didi. Una de las dificultades es definir claramente qué es la *hoja seca*. Algunos la describen como un “tiro que sube y cae inesperadamente como una hoja seca” (Mattos, 2002). Otros dicen que la pelota “daba volteretas y cambiaba de rumbo como una hoja seca perdida en el viento” (Galeano, 1995). Didi afirmó haber inventado la jugada en un partido de Botafogo con América en el Campeonato Carioca de 1956, cuando el dolor en un tobillo lastimado por repetidas faltas lo obligó a patear la pelota de forma inusitada. Al notar que la pelota tomaba un rumbo sorprendente, Didi pasó a practicar esos tiros, perfeccionándolos tanto que hizo de esa manera goles que entraron en la historia del fútbol, como contra Perú en las eliminatorias de la Copa de 1958, y contra Francia en la semifinal de la misma Copa.

En un artículo muy interesante, Leroy intenta dar una explicación para el “efecto hoja seca”. El autor está entre los que dicen que la *hoja seca* es un súbito cambio de rumbo de la pelota. Según Leroy, Didi era capaz de patear

la pelota de manera de producir una rotación en torno de un eje casi paralelo a la velocidad inicial. Si esto ocurre, inmediatamente después del disparo no hay fuerza de Magnus sobre la pelota (obsérvese el producto vectorial en la Ecuación 6). Luego a lo largo del camino la fuerza gravitacional va cambiando la dirección de la velocidad, y el ángulo entre ésta y el eje de rotación deja de ser nulo. Esto hace que al final de la trayectoria una fuerza lateral bastante intensa esté actuando sobre la pelota. La Figura 13 muestra un tiro con esas características. Vemos que la pelota, cuya dirección parecía estar bien definida, súbitamente hace una curva acentuada para la izquierda.

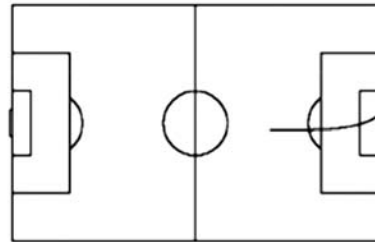


Figura 13. La hoja seca según Leroy (1977). La velocidad inicial de la pelota es 25 m/s, con un ángulo de  $37^\circ$  en relación a piso. La frecuencia de rotación es 10 Hz en torno de un eje paralelo a la velocidad inicial.

Se puede discutir que el modelo de Leroy para la *hoja seca* sea totalmente correcto, dada la obvia dificultad de imprimir a la pelota una rotación cuyo eje apunte hacia delante (debemos recordar, sin embargo, que ése era el tipo de cosas que hacían jugadores geniales como Didi). Otra posible explicación para el súbito desvío lateral es una transición entre efectos Magnus y anti-Magnus. Como ya mencionamos, este último corresponde a un coeficiente de Magnus negativo, y fue observado en algunas zonas de velocidad de rotación para esferas muy lisas (Briggs, 1959). Asimismo, con un eje de rotación vertical, la fuerza lateral podría cambiar de sentido en determinado punto de la trayectoria, generando un comportamiento aparentemente errático de la pelota. Una tercera posibilidad es que la fuerza de Magnus sufriese una crisis análoga a

la de la fuerza de arrastre. Un aumento abrupto del coeficiente de Magnus en la etapa final de la trayectoria también podría crear desplazamientos laterales sorprendentes.

### Comentarios finales

Existen muchos artículos sobre la Física del béisbol, del golf, del tenis, y poquísimos sobre el fútbol. Esperamos haber mostrado aquí que el deporte más popular del mundo tiene una Física interesante, no justificando tal abandono. Es fácil encontrar “datos experimentales” sobre el juego, en particular en la forma de videos que pueden ser digitalizados y analizados con programas relativamente simples. Con procedimientos de este tipo mostramos que dos fenómenos aerodinámicos, la crisis del arrastre y el efecto Magnus, desempeñan un papel central en el juego de fútbol. La relevancia del efecto Magnus para los deportes de pelota es bien conocida, y se acostumbra discutirlos cualitativamente en los cursos de Física Básica. Sin embargo, raramente se encuentra un tratamiento cuantitativo (así sea aproximado, como el presentado aquí). En cuanto a la crisis, se sabe muy poco sobre sus efectos en el fútbol y en la mayoría de los otros deportes (el

golf es tal vez la única excepción). Nuestro análisis del tiro de Pelé muestra que es imposible entender la dinámica de una pelota de fútbol sin considerar la crisis del arrastre.

También presentamos en este artículo un programa Logo que hace simulaciones muy sugestivas del movimiento de la pelota, aprovechando los recursos que ese lenguaje ofrece para diseñar en perspectiva. Con el programa de simulación discutimos la Física del tiro de Pelé, las pelotas de efecto, y la *hoja seca* de Didí. Muchos otros aspectos del fútbol se pueden explorar de la misma manera. Y, con algunas modificaciones, el programa se puede usar para simular otros deportes como el voley o el básquet, abriendo espacio para un gran número de interesantes proyectos.

### Agradecimientos

Agradecemos a Agostinho Mendes y a la LADIF-UFRJ por la ayuda en la digitalización del vídeo con la jugada de Pelé. Agradecemos también a Edson Arantes do Nascimento por haber leído una versión preliminar de este artículo y por los comentarios elogiosos. Este trabajo fue parcialmente apoyado por la Faperj, CNPq y Capes.

### Notas

<sup>1</sup> SuperLogo, <http://www.nied.unicamp.br>

<sup>2</sup> El programa está disponible en <http://www.if.ufrj.br/carlos/futebol.html>

### Referencias

- Achenbach, E. J. (1974). *Fluid Mech.* **65**, pp.113  
 Adair, R.K. (1995) *Physics Today*, 26.  
 Alaways, L.W. (1998) *Aerodynamics of the Curve-Ball: An Investigation of the Effects of Angular Velocity on Baseball Trajectories*. Ph.D. thesis, University of California – Davis.  
 Armenti, A. (Ed.), (1992) *The Physics of Sports*. Springer-Verlag.  
 Asai, T.; Akatsuka, T. ; Haake, S. (1998) The physics of football; *Physics World* , Disponible en: <http://physicsweb.org/article/world/11/6/8>. Acceso en: 15 de noviembre de 2003.  
 Briggs, L. J. (1959) Effect of Spin and Speed on the Lateral Deflection (Curve) of a Baseball; and the Magnus Effect for Smooth Spheres; *American Journal of Physics* **27** pp. 589 - 596.

- Carré, M. J. ; Asai, T. ; Akatsuka, T. *et al.* (2002) The curve kick of a football II: flight through the air; *Sports Engineering* 5, pp. 193 - 200.
- Feynman, R.P.; Leighton R.B.; Sands, M. (1964) *The Feynman Lectures on Physics* Addison-Wesley, v. II, cap. 41.
- Frolich, C. (1984) Aerodynamic drag crisis and its possible effect on the flight of baseballs; *American Journal of Physics* 52 (4) pp. 325 - 334, abril.
- Galeano, E. (1995) *El Fútbol a Sol y Sombra*. Ediciones del Chanchito, Montevideo.
- Gomes M.A.F.; Partelli, E.J.R. (2001) *Revista Brasileira de Ensino de Física* 23, 10.
- Landau L.D.; Lifshitz, E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, cap. IV.
- Leroy, B.(1977) O Efeito Folha Seca; *Revista Brasileira de Física* vol.7 n°3 pp.693 - 709.
- Mattos, A.(2002) *Enciclopédia do Futebol Brasileiro e Mundial* ; Belo Horizonte: Editora Lectura.
- Rodrigues, N. (1993) *À sombra das chuteiras imortais* ; São Paulo: Companhia das Letras.
- Sawicki, G.S.; Hubbard, M. Stronge, W.J. (2003) *Am. J. Phys.* 71, 1152.
- Shapiro, A.H. (1961) *Shape and Flow*. Doubleday.
- Watts, R.G.; Ferrer, R. (1987) *Am. J. Phys.* 55, 40.
- Werlé, H. (1980) *Rech. Aérop.* 5, 35.