

Determinación de la fuerza de roce con el aire usando nuevas tecnologías

Silvia E Calderon¹ - Silvia López González² - Salvador Gil³

¹ Instituto Superior del Profesorado J.V. González. Ciudad de Buenos Aires

² Instituto Ballester. Villa Ballester. Buenos Aires

³ Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, San Martín Buenos Aires.

scald@2vias.com.ar, fliaram@arnet.com.ar, sgil@unsam.edu.ar,

En este trabajo presentamos un experimento de bajo costo para estudiar la caída de los cuerpos cuando los efectos del roce con el aire son significativos. Este experimento permite determinar la cinemática de un cuerpo que cae en el aire y “descubrir” las leyes que rigen el roce de un objeto en un medio fluido y su dependencia con la velocidad del mismo. El dispositivo experimental hace uso de una cámara digital comercial en modo vídeo. Se analiza la caída de filtros de café y globos cargados con diferentes pesos. Nuestro estudio revela que en su caída, estos objetos alcanzan rápidamente una velocidad constante que es proporcional al peso de los mismos. Usando las leyes de Newton podemos inferir que esta fuerza de roce es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Palabras clave: Física, experimentos, nuevas tecnologías, video, rozamiento del aire.

In this work we present a low cost experiment to study the fall of objects when the effects of air resistance are important. This experiment allows us to determine the kinematics of a body that falls through air and “discover” how the air resistance depends on its velocity. The experimental setup makes use of a commercial digital camera in video mode. We studied the fall of coffee filters and balloons, loaded with different weights. Our study reveals that these objects rapidly reach a constant speed that is proportional to their weights. Using Newton’s laws we can infer that the air resistance is proportional to the square of the velocity.

Keywords: Physics, experiments, new technologies, video, air friction.

Introducción

Esta actividad es un ejemplo de una aproximación constructivista para el estudio físico de un fenómeno utilizando Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC). Por una parte esta tecnología permite un estudio detallado y preciso, difícil de lograr con herramientas tradicionales. Por otra, los alumnos están sumergidos en un mundo informatizado y en general están preparados y motivados para su uso. Además la mayor parte de los trabajos prácticos mejoran en cuanto a la precisión de los resultados y profundidad del análisis de los mismos.

Nuestra propuesta consiste en el uso de la cámara digital en modo video para determinar la posición de caída de un objeto en función del tiempo. En particular se describe un experimento donde se dejan caer filtros de café de

papel conocidos como “tipo canasta” y se analiza la relación entre la fuerza de rozamiento y la velocidad de caída. El mismo estudio puede realizarse usando globos inflados, con pequeñas cargas colgadas del mismo. El experimento consiste en filmar la caída con una cámara digital. El video así adquirido consiste en una serie de imágenes digitales tomadas en una secuencia conocida de tiempo, por ejemplo 30 cuadros por segundo (30 fps). En cada una de las imágenes digitales, que forma el vídeo, es simple determinar la posición de cualquier objeto en la misma, relativa a un sistema de referencia (Gil, Reisin y Rodríguez, 2006). Si se visualiza una imagen digital en una computadora, prácticamente todos los programas de visualización de imágenes (Photoedit, Corel Draw, etc.) dan las coordenadas en píxel de la posición del puntero del “mouse”. Por lo tanto si en la imagen

se introduce un objeto de dimensión conocida, es posible transformar las coordenadas en píxel a coordenadas convencionales. De este modo con el vídeo podemos conocer la posición del objeto en el tiempo, lo que nos permite reconstruir la cinemática del mismo.

Existen varios programas comerciales y sharewares que permiten reconstruir la cinemática de un objeto a partir de un vídeo, tal como *Videopoint Capture II*¹, *Logger Pro 3* Vernier software ² y *Data Point*³ (Laws y Pfister, 1998).

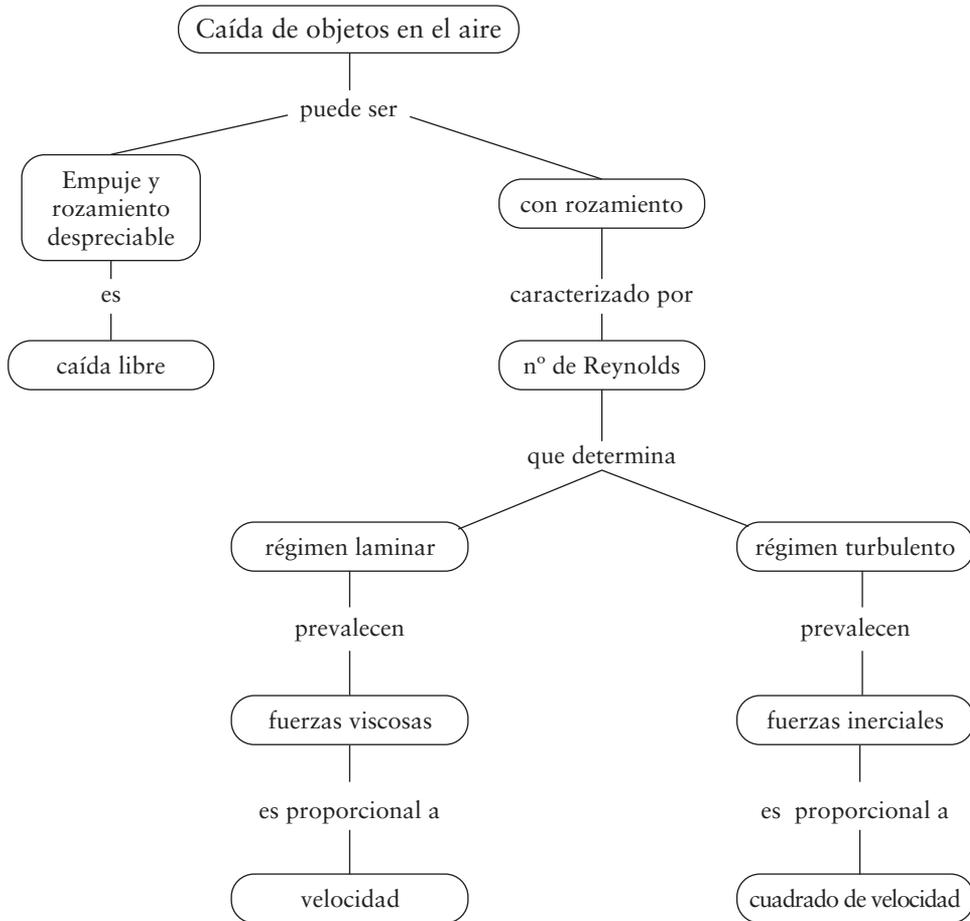


Figura 1. Esquema ilustrativo de las características de la caída de un cuerpo en el aire.

El estudio del efecto de la resistencia del aire en objetos que caen es importante porque es parte de nuestra experiencia diaria. Las hojas de los árboles o las gotas de lluvia no parecen tener aceleración al caer (Gluck,

2003). En la figura 1 se muestra la relación entre la velocidad de caída de un cuerpo y las fuerzas ejercidas considerando diferentes situaciones físicas.

1 www.Pasco.com

2 www.vernier.com

3 <http://www.stchas.edu/faculty/gcarlson/physics/datapoint.htm>

Consideraciones teóricas

Cuando el objeto cae, las fuerzas ejercidas sobre el mismo son: el empuje del aire (E), la fuerza de rozamiento con el aire (F_{roce}) y el peso (P). Si utilizamos un sistema de referencia positivo orientado hacia abajo, de la segunda ley de Newton, tenemos:

$$P - E - F_{roce}(v) = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

definimos el *peso efectivo* del objeto como $P_{ef} = P - E$. Su valor es el que se mide directamente con una balanza.

Nuestra hipótesis consiste en suponer que la fuerza de roce depende de la velocidad v elevada a una potencia n desconocida, es decir F_{roce} es proporcional a v^n . De la expresión (1) se ve que al acelerarse, la fuerza de roce aumenta hasta que la misma iguala el peso efectivo. En ese punto el objeto se mueve con velocidad constante o sea alcanza la velocidad límite v_{fin} . Según la ec.(1) tenemos:

$$F_{roce}(v) = k \cdot v_{fin}^n = P_{ef} \quad (2)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Como los filtros de café pueden acumularse uno dentro de otros, es posible variar su peso efectivo sin modificar significativamente su forma. Por lo tanto midiendo v_{fin} para distintos grupos de filtros (varios P_{ef}) y graficando P_{ef} en función de v_{fin} , es posible verificar si la expresión (2) efectivamente se cumple y de los mismos gráficos obtener n .

Método experimental

El método experimental propuesto hace uso de una cámara digital en modo vídeo. Las cámaras digitales se han convertido en dispositivos muy accesibles y resulta interesante utilizarlas para realizar experimentos cuantitativos. Es precisamente en el uso de este dispositivo en lo que el presente trabajo innova respecto de otros similares (Takahashi y Thompson, 1999).

En modo vídeo, las cámaras digitales registran fotografías de un objeto en intervalos iguales y conocidos de tiempo. En general una cámara comercial opera en 15, 25 o 30 cuadros por segundo (*fps*) según sea su especificación. De este modo cada fotograma está asociado a un tiempo bien definido. Un ejemplo servirá para aclarar estas ideas. Si la cámara digital graba 15 cuadros por segundo el intervalo de tiempo entre cuadro y cuadro es: $1/15 \text{ s} = 0.066 \text{ s}$. Por otra parte, cada fotograma digital contiene información de la posición del objeto en estudio. La calibración de los píxeles a escala real puede lograrse fácilmente con un objeto de dimensiones conocidas. Por ejemplo usando las dimensiones reales de una ventana del fotograma es posible obtener la posición real del objeto que se mueve en función del tiempo. A partir de esta información se puede reconstruir el movimiento del objeto en estudio. En la figura 3 se presentan dos fotogramas capturados durante la caída de un filtro de café.

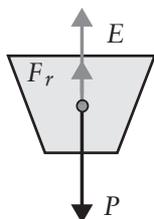


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de un filtro de café cuando cae en el aire.

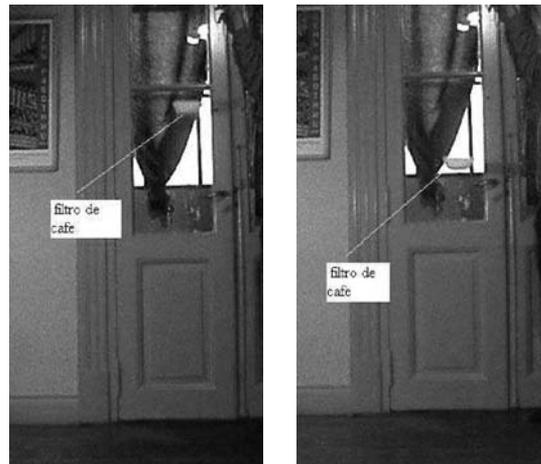


Figura 3. Izquierda: imagen capturada con la cámara digital en modo video a intervalos de 0,033 s. Derecha: imagen tomada 0,3 s después. Las dimensiones de la puerta son los datos conocidos que se usan para transformar de píxel a coordenadas convencionales.

En nuestro experimento se dejaron caer filtros de café y globos de una altura conocida y se filmó mientras caían cargados con distintos pesos. En el caso de los filtros, se dejaron caer apilados de modo que la forma del cuerpo que cayera fuese siempre la misma pero su peso se incrementara. Con este procedimiento, se preservan las formas geométricas de los cuerpos pero se varían sus masas. En el caso de los globos se sujetaron con un hilo diferentes cantidades de arandelas para variar el peso.

Se utilizó una cámara digital FujiFilm

S5100 que toma 30 cuadros por segundo. El análisis de los videos se realizó con el programa Data Point, que puede bajarse de Internet como “shareware”. Con este programa se obtienen las coordenadas de posición en píxel y en cada instante de tiempo correspondiente a cada cuadro o sea la tripla (t,x,y) , en nuestro caso $x=constante$. Los valores de (t,x,y) se exportaron a una hoja de Microsoft®Excel. Utilizando las dimensiones conocidas de una puerta, se reconstruyó el movimiento de los objetos en estudio.

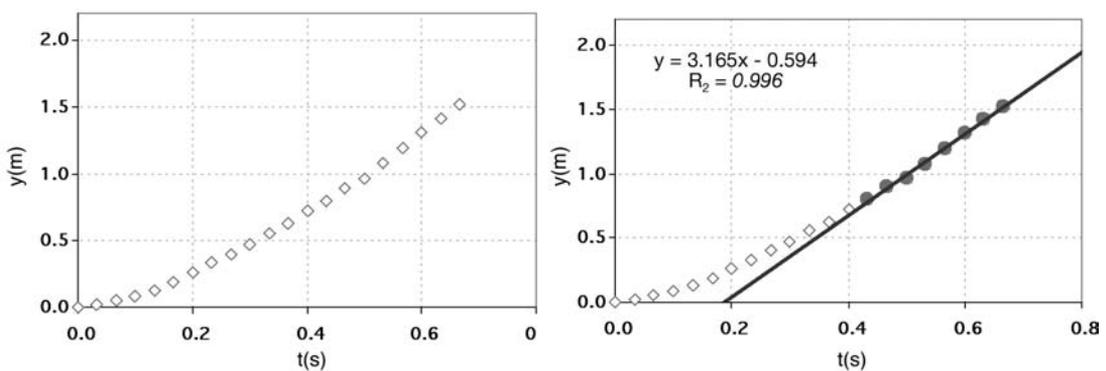


Figura 4. Izquierda: posición del filtro a medida que cae en función del tiempo. Derecha: se muestra con símbolos llenos los últimos valores de posición del cuerpo en función del tiempo. La relación posición y tiempo de estos últimos datos es lineal, indicando que la velocidad es constante. La pendiente de la recta que ajusta los últimos puntos (línea llena) nos da la velocidad límite.

Resultados y discusión

Estudio cinemático

Usando los datos de posición y tiempo obtenidos de cada cuadro del video podemos construir los gráficos de y en función de t como se ilustra en la figura 4. De esta figura se observa que para valores de $t > 0.4$ s, la dependencia de y con t es lineal, indicando que cuerpo se mueve con velocidad constante v_{fin} . De la pendiente de esta recta obtenemos el valor de v_{fin} para los distintos pesos.

Análisis de la fuerza de roce

Una vez obtenidas las velocidades límites para los diferentes pesos P_{ef} , se procedió a graficar P_{ef} en función de v_{fin} . En la figura 5 se presentan estos resultados. El hecho que la gráfica de P_{ef} en función de v_{fin} en escala log-log se linealice evidencia que la relación entre estas magnitudes es de tipo potencial corroborando la hipótesis expresada en la ec.(2) (Gil y Rodríguez, 2001). Del ajuste de estos datos podemos obtener los parámetros k y n de la misma.

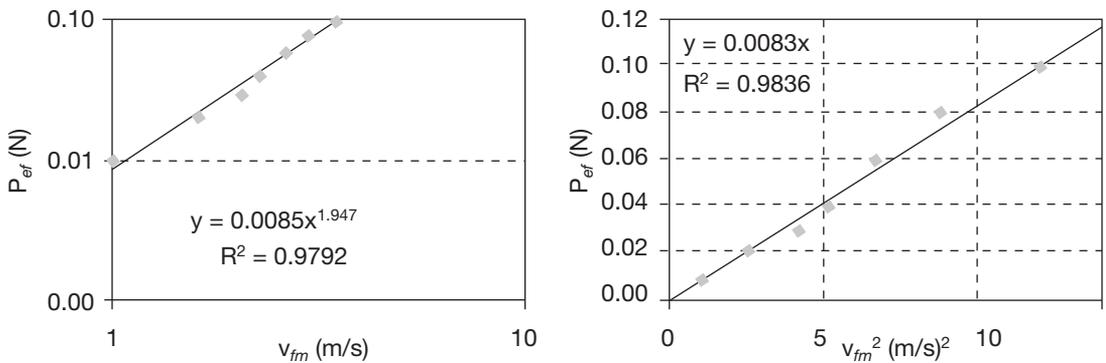


Figura 5. A la izquierda, se representa P_{ef} en función de v_{fin} en escala log-log. A la derecha se representa P_{ef} en función de v_{fin}^2 en escala lineal. Nuestros datos son consistentes con una fuerza de roce proporcional al cuadrado de la velocidad, o sea $n \approx 2$.

La incerteza del exponente n se puede calcular graficando $\log(P_{ef})$, en función de $\log(v)$. En este caso se obtuvo una dependencia lineal entre las variables, y usando los métodos estándares de ajuste, podemos obtener la incerteza de los parámetros del ajuste. El valor obtenido es: $n = 1,9 \pm 0.2$ ($\epsilon_n = 7\%$).

Como se discute en el apéndice B, esta dependencia de la fuerza de roce con la velocidad, es de esperar cada vez que el movimiento de un objeto en un medio fluido (aire) se realiza de tal modo que el número de Reynolds (Re) es mayor, aproximadamente, a 4000 (Feynman et al., 1964; Aguiar y Rubini, 2006; Munson et al., 1994). El número de Reynolds relaciona el cociente entre las fuerzas inerciales y viscosas, ver apéndice B. Más propiamente definimos Re como:

$$Re = \frac{\rho_{medio} \cdot v \cdot d}{\eta_{medio}} \quad (3)$$

donde ρ_{medio} es la densidad del medio, η_{medio} su viscosidad, v es la velocidad del objeto y d representa su dimensión característica, en nuestro caso el diámetro de los globos o filtro de café. En todos los casos estudiados, Re era del orden del 20000, consistente con el resultado obtenido. Es interesante señalar, que para objetos macroscópicos (de algunos centímetros) moviéndose en el aire, como por ejemplo pelotas, globos, etc. la fuerza de roce es casi siempre proporcional al cuadrado de la velocidad. Sólo en casos excepcionales de movimiento muy lentos se obtiene fuerzas de roce proporcionales a la velocidad, como es usual encontrar en los textos convencionales.

Es posible presentar un argumento teórico simple que permite comprender el resultado logrado (Goff, 2004). Imaginemos que tenemos un objeto de área transversal A que se

mueve en un medio fluido con velocidad v y cuya densidad es ρ , como se muestra en la figura 6.

En un tiempo dt , el objeto barrerá un volumen $A \cdot v \cdot dt$. A las moléculas o partículas de fluido se le imprimirá una velocidad $\varepsilon \cdot v$, siendo ε un coeficiente del orden de la unidad que depende del tipo de choque, elástico, inelástico, etc. El momento adquirido por estas partículas de fluido en dt será:

$$dp = \rho \cdot (A \cdot v \cdot dt) \cdot \varepsilon \cdot v \quad (4)$$

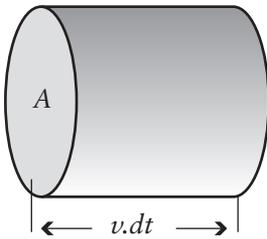


Figura 6. Volumen barrido por un objeto de área transversal A que se mueve en un medio fluido con velocidad v .

Por lo tanto la fuerza de reacción contra el objeto que se mueve será:

$$F = \frac{dp}{dt} \varepsilon \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \propto v^2 \quad (5)$$

Este resultado es compatible con el obtenido en este trabajo. A propósito, esta fuerza debido al cambio de momento lineal que se imprime a las partículas de fluido, se denomina en mecánica de fluidos fuerza inercial.

Finalmente es interesante destacar que la relación encontrada, $F \propto v^n$, es similar a la "ecuación de movimiento" de Aristóteles (Lombardi, 1998), es decir que la velocidad depende monótonamente de la fuerza aplicada. Sin embargo, nuestro estudio muestra que este resultado es totalmente compatible con las leyes de Newton, mostrando así que este

tipo de dependencia de la fuerza con la velocidad ($F \propto v^n$) es un caso particular de un paradigma mayor $F = m \cdot a$.

Es importante señalar que con las leyes de Newton es posible comprender tanto la caída de los cuerpos cuando el roce es despreciable, como cuando no lo es. El hecho que los cuerpos que caen, con roce despreciable y tienen una aceleración independiente de su peso, es inconsistente con las leyes de movimiento de Aristóteles.

Por último destacamos, que la ecuación de movimiento (2) de caída con roce proporcional a v^2 , puede ser resuelta analíticamente y su resultado servir para encontrar el valor de v_{fin} a partir de los valores medidos. Este procedimiento, algo más elaborado teóricamente, se describe en el apéndice A.

Conclusiones

En este trabajo presentamos un experimento simple y de bajo costo susceptible de ser implementado en los cursos de física de las escuelas medias, que permite estudiar la cinemática de caída de un cuerpo en el aire cuando el roce no es despreciable.

A partir del mismo es posible, usando una aproximación constructivista, determinar la relación de la fuerza de roce con la velocidad. Los resultados obtenidos concuerdan con las expectativas teóricas consistentes con el número de Reynolds para el objeto que se estudió.

En el ejemplo desarrollado aquí se aprecia un posible uso de las TIC en el ámbito escolar. A través de su análisis se muestra que la incorporación de las TIC pueden generar un nuevo entorno para la adquisición y el manejo de la información en el ámbito educativo. Además destacamos que para un adolescente resulta estimulante utilizar nuevas tecnologías que le son familiares en un nuevo contexto, como es la adquisición de datos que permitan analizar el movimiento de objetos en condiciones reales.

ANEXO 1

Movimiento de caída en un medio fluido con roce proporcional a v^2

La ecuación de movimiento de un cuerpo de masa m que cae en un medio fluido con velocidad proporcional al cuadrado de la velocidad, tomando la dirección de eje y apuntando hacia abajo es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m_a \quad g - \beta \quad \rho \quad v^2 = m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) \quad g - b \quad A \quad r \quad v \tag{A1}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, A es el área que barre el cuerpo al desplazarse, ρ la densidad del medio, ρ_c la densidad del cuerpo y β una constante de proporcionalidad. Esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dv}{v_f^2 - v^2} = \frac{g}{v_f^2} \quad dt \tag{A2}$$

con $v_f = m_s o (1 - \rho / \rho_c) / (\beta A \rho)$ Integrando esta expresión obtenemos:

$$v(t) = v_f \cdot \tanh \left[\frac{g}{v_f} \cdot t + c \right] \tag{A3}$$

Si para $t=0$, $v(t)=0$, la constante de integración $c=0$. Integrando una vez más esta última expresión, obtenemos:

$$y(t) = y_0 + \frac{v_f^2}{g} \cdot \ln \left[\cosh \left[\frac{g}{v_f} \cdot t \right] \right] \tag{A4}$$

aquí y_0 es la posición del cuerpo para $t=0$. Como nuestro experimento mide justamente $y(t)$, la expresión (A4) puede contrastarse directamente con los datos experimentales. Como el único parámetro desconocido de esta expresión es la velocidad límite o final v_f , del ajuste de la curva teórica a los datos puede obtenerse su valor. La figura A1 muestra la comparación de los resultados experimentales de $y(t)$ con los predichos por la ec.(A4).

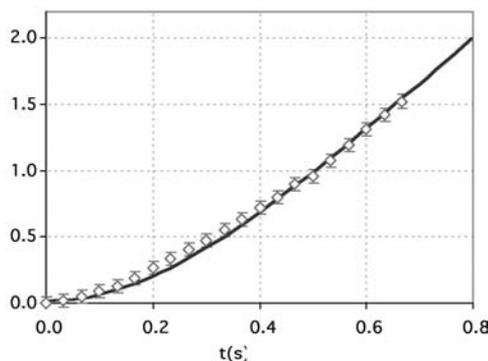


Figura A1. Variación de la posición y como función del tiempo. Los símbolos representan los datos medidos y la curva continua la predicción de la expresión teórica (A4).

La figura A1 indica que efectivamente la expresión (A4) es una descripción adecuada de los datos experimentales. Además este procedimiento permite obtener el valor de la velocidad límite v_f usando todos los datos medidos y no sólo aquéllos que muestran una relación lineal.

ANEXO 2

Régimen laminar y turbulento

Una característica importante de los fluidos reales es que tienen viscosidad. Una consecuencia notable de esta propiedad de los fluidos es que la capa de fluido adyacente al sólido no se mueve respecto de éste. Este efecto se evidencia en las aspas de un ventilador o hélice que permanecen con una capa de polvo, aún cuando las mismas giran a gran velocidad. La acumulación de polvo en las aspas es consecuencia de que el aire en contacto con la misma está siempre en reposo respecto del aspa. Esta capa de fluido que se adhiere a la superficie del sólido se conoce como *capa límite* o *capa de Prandtl* (Feynman et al, 1964; Aguiar y Rubini, 2006; Munson et al, 1994). La viscosidad también es responsable de que para arrastrar un objeto en el seno de un fluido, sea necesaria una fuerza.

En la mecánica de los fluidos se distinguen dos regímenes de movimiento, el *flujo laminar* y el *flujo turbulento*. En el *flujo laminar* las partículas de fluido se mueven ordenadamente siguiendo trayectorias estables y aproximadamente paralelas entre sí. Éste es el régimen que se observa en el flujo de un canal en el que el fluido se mueve lentamente. En el *régimen turbulento*, las partículas de fluido se mueven de un modo desordenado, cambiando su trayectoria en forma irregular o en torbellinos (desordenadamente), de modo que la velocidad del fluido en un dado punto de espacio parece variar constantemente en el tiempo. Estos dos regímenes se pueden observar fácilmente en el humo de un cigarrillo encendido. Al principio el flujo es laminar, pero al ir ascendiendo se va transformando en turbulento en forma paulatina. Se observa que la transición entre estos dos regímenes puede estimarse en buena medida por el valor que tiene una cantidad adimensional, conocida como el número de Reynolds (Re). El Re representa el cociente entre las fuerzas inerciales y viscosas.

Imaginemos un flujo de fluido alrededor de una esfera de diámetro d , si la velocidad media del flujo lejos de la esfera es v y su viscosidad η , la *fuerza viscosa* producirá una fuerza de arrastre (roce) sobre la esfera en la dirección de flujo, que podemos estimarla del siguiente modo (Munson et al, 1994):

$$F_{visc} \approx \eta A \frac{v}{d} \approx \eta \pi d^2 \frac{v}{d} \approx \eta \pi d v \quad (B1)$$

Aquí, hemos supuesto que el gradiente de velocidad es del orden de v/d y que el área transversal de la esfera es πd^2 .

Por otro lado, al impactar el fluido contra la esfera, hay un cambio de momento en las partículas de fluido, que requiere de una fuerza, que es ejercida por la esfera. Por acción y reacción, sobre la esfera se ejercerá una reacción igual y contraria. La resultante de la reacción tiende a mover la esfera en la dirección del flujo. Esta es la fuerza inercial, que podemos estimar del siguiente modo. Si suponemos que las partículas de fluido después de impactar contra la esfera salen en una dirección perpendicular a la que traían, el cambio de momento de un elemento de volumen de espesor dx y área A , igual a la sección transversal de la esfera será:

$$F_{visc} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \varepsilon \cdot \frac{(\rho A v) \Delta x}{\Delta t} \approx \varepsilon \cdot \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2 \quad (B2)$$

Aquí, ε un coeficiente del orden de la unidad que depende del tipo de choque, elástico, inelástico, etc. y $\Delta x/\Delta t=v$. El cociente entre las fuerzas inerciales y viscosa, da una idea de la importancia relativa de cada una de ellas y determina el valor del número de Reynolds:

$$\frac{F_{inerc}}{F_{visc}} \approx \frac{\varepsilon \cdot \rho \frac{\pi}{4} d^2 \cdot v^2}{\eta \pi \cdot d \cdot v} \approx \frac{\varepsilon}{4} \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\eta} = \frac{\varepsilon}{4} \cdot Re \quad (B3)$$

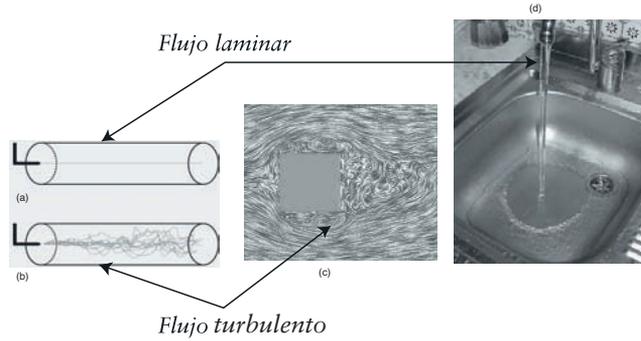


Figura B1. Ejemplos de flujos laminares (a) y (d) y flujos turbulento (b) y (c).

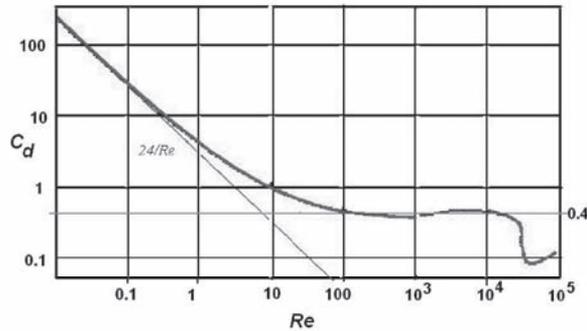


Figura B2. Variación del coeficiente de arrastre de una esfera lisa como función del número de Reynolds.

Para una esfera de diámetro d , moviéndose con una velocidad v en un medio viscoso de viscosidad dinámica η , la fuerza de arrastre viene dada en general por (Feynman et al., 1964; Munson et al, 1994)

$$F_{roce} = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \tag{B4}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v la velocidad y A el área transversal del cuerpo ($\pi \cdot r^2$, para una esfera) y C_d un coeficiente numérico cuyo valor depende de Re y la forma del objeto. El valor de C_d se determina experimentalmente. Para algunas geometrías simples, C_d puede obtenerse de tablas o gráficos como el de la figura B2. La variación de C_d con Re también puede aproximarse para el caso de una esfera con la expresión semiempírica:

$$C_d(Re) = \frac{24}{Re} + \frac{1}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4$$

válida en el caso en que $Re < 2 \cdot 10^5$. En partícula si: $Re < 1$ tenemos que $C_d = 24/Re = 24 \cdot \eta / \rho \cdot d \cdot v$. Por lo tanto la fuerza de arrastre será:

$$F_r = \frac{1}{2} \frac{24 \cdot \eta}{2 \rho \cdot d \cdot v} \cdot \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2 = 3\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v \tag{B5}$$

esta expresión se conoce como la fórmula de Stokes. Otra caso límite interesante ocurre cuando $3000 < Re < 10^5$. Según vemos en la Figura B2, en esta zona $C_d = 0.4$, por lo tanto la fuerza de arrastre será:

$$F_r \approx 0.2 \cdot \rho \cdot A \cdot v^2, \tag{B6}$$

y obtenemos una fuerza de roce proporcional al cuadrado de la velocidad. En la zona de $1 < Re < 3000$, el flujo es en general laminar o transicional, pero no es posible escribir una expresión cerrada del roce y la dependencia con la velocidad es intermedia entre la dependencia lineal y cuadrática.

Referencias

- Aguiar, C. y Rubini, G. (2006). La aerodinámica de la pelota de fútbol, *Rev. de Ens. de la Física* **19**, (1), pp. 71-82.
- Feynman, R.P.; Leighton, R.B.; and Sand, M. (1964). *Feynman Lectures On Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA, Vol. 2, Cap. 41.
- Gil, S. y Rodríguez, E. (2001) *Física re-Creativa*. Buenos Aires: Prentice Hall
- Gil, S.; Reisin, H. y Rodríguez, E. (2006). Using a digital camera as a measuring device. *Am. J. Phys.* **74** (9), pp. 768-775.
- Gluck, P. (2003). Air Resistance on falling Balls and Ballons. *The Physics Teacher*, **41**, 178-180.
- Goff, J. (2004). Heuristic model of air drag on sphere, *Physics. Educ.* **39** (6), pp. 496-499.
- Laws y Pfister, H. (1998). Using Digital Video Analysis in Introductory Mechanics Projects, *Phys. Teach.* **36**, pp. 282-287.
- Lombardi, O. (1998). La noción del modelo de ciencias. *Educación en Ciencias. Universidad Nacional de San Martín*, **2** (4), pp. 5-13.
- Munson, B.; Young, D. y Okiishi, T. (1994). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. New York: Wiley. 2nd ed.
- Takahashi, K y Thompson, D. (1999). Measuring air resistance in a computerized laboratory, *Am. J. Phys.* **67** (8), pp. 709-711.