

Momento de inercia en el nivel básico universitario: su presentación en textos impresos y electrónicos

Moment of inertia at basic university level: its presentation in traditional and electronic texts

Elena Hoyos^{1*}, Cecilia Pocoví²

¹Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, Avenida Bolivia 5150, CP 4400, Salta, Argentina.

²Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avenida Bolivia 5150, CP 4400, Salta, Argentina.

*E-mail: hoyosele@gmail.com

Resumen

En el presente trabajo se realiza un análisis de la presentación del concepto de momento de inercia en libros (impresos y electrónicos) de nivel universitario básico. Se desarrolla un estudio de caso, enfocando el análisis en la detección de simplificaciones o limitaciones en los abordajes, que podrían instalar entre los alumnos ideas sobresimplificadas del concepto. Estas sobresimplificaciones suelen afectar la comprensión de textos más avanzados. Se concluye que existen cuatro simplificaciones de este tipo: 1) en la mayoría de los textos básicos no se explicita el paso de un sistema de partículas discretas a un cuerpo rígido continuo; 2) se presenta al momento de inercia como un escalar sin explicar cuándo es válida esta situación; 3) no se da la relevancia suficiente a los ejes de referencia y ; 4) no se definen estrictamente los ejes principales de inercia.

Palabras clave: Momento de inercia; Aprendizaje avanzado; Sobresimplificaciones; Nivel universitario.

Abstract

This paper presents an analysis of the presentation of the concept of moment of inertia in books (printed and electronic) at the basic university level. A case study is developed, focusing the analysis on the detection of simplifications or limitations in the approaches, which could install oversimplified ideas of the concept among students. These oversimplifications often affect the understanding of more advanced texts. It is concluded that there are four simplifications of this type: 1) in most of the analyzed basic texts; the transition from a system of discrete particles to a continuous rigid body is not explicitly made; 2) the moment of inertia is presented as a scalar without explaining when this situation is valid; 3) the axes of reference are not given sufficient relevance and; 4) the axes of inertia are not strictly defined.

Keywords: Moment of inertia; Advanced learning; Oversimplifications; University level.

I. INTRODUCCIÓN

La dinámica del cuerpo rígido constituye uno de los temas principales en el desarrollo de un curso de Mecánica Clásica tanto a nivel universitario básico como avanzado. En particular, en carreras universitarias como la de Licenciatura en Física, este tópico se suele desarrollar con distintos niveles de profundización, en concordancia con el nivel de matemática alcanzado por los alumnos previamente. Así, generalmente se lleva a cabo una primera aproximación a la dinámica de cuerpo rígido en cursos que cuentan con las herramientas del Análisis Matemático en una variable (derivación e integración); en adelante, nos referiremos a este tipo de cursos como de nivel universitario básico. Una vez que los alumnos aprenden a resolver ecuaciones diferenciales, las asignaturas de Mecánica presentan un estudio

www.revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF

más profundo de la dinámica del cuerpo rígido en la que se incorpora también el análisis variacional; en adelante, estos cursos serán denominados como de nivel universitario superior. Dada esta secuenciación establecida en el currículo que asegura un incremento en la complejidad en la presentación del tema de dinámica del cuerpo rígido, resultaría indispensable una excelente coordinación entre el conocimiento presentado de manera más básica y aquel más avanzado. Así, resulta de utilidad analizar qué aspectos del abordaje básico en libros de texto podría influir la comprensión de textos más avanzados.

En los textos de Mecánica de nivel universitario básico, el estudio de la dinámica se inicia con el caso de una partícula. Si bien este planteo resulta fundamental para introducir a los estudiantes a las leyes de la dinámica, se deben dejar en claro los límites de validez impuestos por el modelo de partícula para evitar su uso en situaciones en las que no resultaría una buena aproximación a la realidad analizada. Generalmente, se avanza en la asignatura mediante la presentación de la dinámica de un sistema de partículas y, finalmente, se llega al modelo con el que se aborda la descripción del movimiento de un cuerpo rígido y al análisis de por qué se producen los distintos tipos de movimiento, es decir se plantea la Cinemática y Dinámica de un sólido rígido. En el estudio de la Dinámica de cuerpo rígido uno de los conceptos centrales es el de Momento de Inercia. Este concepto es retomado en los cursos de Mecánica de nivel avanzado y su presentación muestra aspectos más complejos que no han sido introducidos en los cursos anteriores.

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Así como se traza una distinción entre el contenido del nivel básico y el avanzado en cursos de Mecánica, también existe una distinción en la manera en la que aprenden los alumnos que cursan uno y otro nivel. Esta diferenciación fue bien señalada por Spiro, Coulson, Feltovich y Anderson (2006) indicando que en los cursos avanzados se producen situaciones de “aprendizaje avanzado”, en las cuales los estudiantes logran una comprensión profunda a partir de razonamientos en los que intentan utilizar, de modo flexible, los conceptos adquiridos en cursos anteriores en contextos nuevos. Se considera que en un curso de Mecánica de nivel superior, tal como el descrito antes, y en particular en el estudio de la dinámica de cuerpo rígido, el aprendizaje que deben lograr los estudiantes tiene las características propias de un “aprendizaje avanzado”. Entre los aspectos característicos de este tipo de aprendizaje, resaltados por Spiro *et al.* (2006), se encuentra que es muy común que las concepciones iniciales de los estudiantes en el aprendizaje avanzado sean consecuencia de la forma en la que los estudiantes incorporan los tratamientos simplificados del material estudiado anteriormente en el nuevo contexto más complejo. Considerando la propuesta de Spiro *et al.* (2006), los estudiantes de un curso de nivel superior de Mecánica contarán con preconcepciones desarrolladas durante su aprendizaje de la Mecánica básica, que deberán aplicar en nuevos contextos. Si las limitaciones de las versiones simplificadas no han sido bien aclaradas y trabajadas en los cursos básicos, difícilmente los alumnos las tendrán en cuenta como limitaciones para realizar análisis más complejos y avanzados. Spiro *et al.* (2006) también advierten sobre el uso de analogías para presentar un tema complejo a nivel básico, dado que los estudiantes pueden recurrir a ellas cuando ya no son válidas, mostrando un exceso de confianza en estructuras de conocimiento estudiadas en cursos anteriores. En este sentido, un estudio acerca de las características de las presentaciones de un concepto en cursos básicos, debería incluir la identificación de analogías utilizadas.

La mayor parte de los estudiantes universitarios utiliza la lectura de textos como una de las estrategias de aprendizaje más comunes e importantes (Alexander y Jetton, 2000). La importancia de los textos en el proceso enseñanza-aprendizaje trasciende su influencia sobre los estudiantes, dado que también son utilizados por los profesores como una guía en la elección de qué y cómo enseñar. Además, la utilización de los textos se extiende a lo largo de toda la vida académica de los estudiantes; en particular, son usados tanto en cursos básicos de Mecánica como en los de nivel avanzado. Siendo los textos una de las herramientas de aprendizaje más generalizadas entre los alumnos, no es extraño suponer que también resultan ser una fuente para las preconcepciones que los estudiantes poseen cuando comienzan a cursar las asignaturas más avanzadas; en particular, esto podría darse también para el caso del tema de cuerpo rígido.

En las últimas décadas la masificación del uso de redes ha alcanzado al ámbito universitario, esto se ve reflejado tanto en los trabajos de investigación como en la docencia. En este último ámbito, es posible mencionar algunas herramientas accesibles a los estudiantes mediante la conexión a internet; por ejemplo, páginas vinculadas a distintos temas, videos mostrando clases o desarrollos de tópicos específicos, laboratorios remotos, inteligencia artificial como recurso didáctico y de aprendizaje, entre otras. La cantidad de información en la red, excede la capacidad de análisis de los usuarios, sin embargo, a medida que los temas a tratar se hacen más específicos, se reduce la cantidad de información de calidad disponible. Cuando los estudiantes y profesores universitarios hacen uso de las redes, gran parte del material al que acceden son textos. En otras palabras, tanto los textos impresos (tradicionales) como los electrónicos siguen constituyendo un recurso muy importante en el aprendizaje de los alumnos. Así, el análisis no se

limitará a los libros de texto impresos, sino que también abarcará algunos encontrados en páginas específicas en las redes.

En la dinámica de cuerpo rígido se aplican algunas leyes y conceptos estudiados en sistemas más sencillos (como ser en la dinámica de una partícula o en la de un sistema de partículas) y también se desarrollan nuevos conceptos, por ejemplo, el concepto de momento angular ya ha sido presentado en otros contextos, el concepto de momento de inercia se incluye por primera vez cuando se aborda la cinemática y la dinámica de los rígidos.

En este trabajo se realiza el estudio de la forma en la que se presentan los conceptos de momento de inercia y cuerpo rígido en textos impresos (tradicionales) y electrónicos de Mecánica de nivel universitario básico. El objetivo de dicho estudio es identificar algunos aspectos de estas presentaciones que podrían generar preconcepciones que, a su vez, podrían impedir o complicar el aprendizaje cuando estos temas son tratados nuevamente en cursos más avanzados.

Estudiar las dificultades que presenta el proceso de enseñanza y aprendizaje de la dinámica de cuerpo rígido es un trabajo complejo debido a que en su análisis se involucran una gran cantidad de conceptos aprendidos previamente. La importancia de la dinámica del cuerpo rígido en Mecánica Básica no se ve reflejada en el escaso número de investigaciones de educación en Física que tratan este tópico. Este trabajo es la continuación del artículo de Hoyos, Callojas y Pocovi (2021) en el que se realiza el estudio de la presentación del concepto de momento angular en los libros de texto universitarios.

En base a nuestra experiencia docente, podemos identificar algunas sobresimplificaciones que los alumnos utilizan cuando cursan asignaturas de Mecánica avanzada ya que, en carreras como las licenciaturas en Física, se retoman los conceptos aprendidos en Mecánica Básica, en cursos superiores. En particular, el concepto de momento de inercia es nuevamente estudiado en cursos de Mecánica Analítica; mientras que en Mecánica Básica el momento de inercia se presenta como una magnitud escalar, en el curso superior se demuestra que es un tensor de segundo orden. La presentación simplificada realizada en el curso básico es posible gracias a las condiciones físicas de los problemas estudiados a ese nivel: para calcular el momento de inercia se trabaja en un sistema de referencia fijo al cuerpo formado por tres ejes principales de inercia y la rotación del cuerpo tiene como dirección la de un eje principal de inercia y, por lo tanto, las ecuaciones involucran una sola componente del tensor. En los cursos de Mecánica básica, muchas veces, no se hace hincapié en estas condiciones. Así mismo, los ejes principales de inercia quedan relegados a su sola mención, constituyendo otra sobresimplificación que relega a un papel secundario a ejes que cumplen un rol importante en la dinámica del cuerpo rígido.

Los estudiantes de cursos de Mecánica Básica no tienen ni el conocimiento de las herramientas matemáticas, ni la madurez necesaria para trabajar con tensores, de manera que la introducción de un concepto como el de momento de inercia como un escalar está plenamente justificada. Sin embargo, queda claro que este tipo de presentación constituye una sobresimplificación, tal como las definidas por Spiro *et al.* (2006) y, en ese caso, deben establecerse claramente las condiciones bajo las cuales se verifica que el momento de inercia queda reducido a un escalar para evitar que los estudiantes utilicen esta sobresimplificación sin restricciones en cursos posteriores.

Otra sobresimplificación que podría causar problemas entre los estudiantes de cursos avanzados viene de la mano del análisis de la dinámica de un sistema de partículas estudiada previamente. Este caso corresponde a un análisis discreto, es decir, para llevarlo a cabo se plantean las ecuaciones correspondientes de cada una de las partículas que componen el sistema en forma individual. Mientras tanto, el análisis de un cuerpo rígido se realiza sobre una distribución continua de masa. El pasaje del estudio de un sistema discreto de partículas a un cuerpo rígido debe realizarse de forma clara y explícita ya que para Spiro *et al.* (2006), una de las sobresimplificaciones que afectan el aprendizaje avanzado de los alumnos es la consideración de los sistemas continuos como sistemas discretos.

Por último, ya que las analogías utilizadas en presentaciones básicas pueden también afectar el aprendizaje en cursos superiores, resulta útil detectar cuáles son las más generalizadas.

En base a la descripción realizada, concluimos que resultaría útil revisar la existencia generalizada de las sobresimplificaciones enumeradas en los textos de Mecánica básica; *i. e.*, escalar/tensor; ejes principales de inercia (mención/definición), discreto/continuo.

III. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo una descripción detallada de la forma en la que se expone el concepto de momento de inercia en textos (tanto los tradicionales impresos como los electrónicos), se plantea un estudio de caso para lograr identificar particularidades y encontrar patrones recurrentes. Así, los textos tradicionales y electrónicos considerados conforman la muestra que permitirá el estudio detallado de los mencionados aspectos de interés para el equipo de investigación.

Para elegir los textos impresos (tradicionales) a analizar se realizó un relevamiento de la bibliografía utilizada en cursos de nivel básico universitario de Mecánica Clásica en carreras de Licenciatura en Física de la Argentina, y se

encontraron aquellas propuestas en los programas de diez universidades nacionales localizadas en las siguientes ciudades: Salta, San Miguel de Tucumán, San Fernando del Valle de Catamarca, Río Cuarto, San Luis, Córdoba, La Plata, Mar del Plata y Santa Rosa de la Pampa. Así, la muestra de libros considerados la constituyeron aquellos que más se repiten en los programas encontrados, los libros son: [A] Alonso y Finn (1971); [B] Resnick, Halliday y Krane (2010); [C] Sears, Zemansky, Young y Freedman (1999); [D] Tipler y Mosca (2005); y [E] Serway (1982). Se han utilizado citas abreviadas para facilitar la redacción, las citas completas se hallan en la sección referencias. Los textos [A] y [B] se encontraron en siete listados bibliográficos de los programas considerados; [C] y [D] se repiten en cinco listados; y [E] es citado en cuatro. Es importante destacar que existen otros textos que son citados con menor frecuencia y no se analizaron en este trabajo.

Para elegir los textos virtuales a analizar se introdujo la frase “momento de inercia” en Google y se analizaron las primeras cuatro páginas que aparecieron en el listado, considerando que este es el procedimiento que siguen los usuarios alumnos cuando realizan búsquedas en la red. Las cuatro primeras páginas son: [I] Wikipedia La enciclopedia libre, https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inercia; [II] Física con Ordenador. Curso interactivo en internet. Ángel Franco García. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>; [III] Casiopea https://wiki.ead.pucv.cl/Momento_de_Inercia; y [IV] Openstax <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/10-4-momento-de-inercia-y-energia-cinetica-rotacional>.

Para realizar el análisis de los textos se diseñó un protocolo en el que se enumeraron los siguientes aspectos a analizar que, como se puede vislumbrar, permitirán el análisis de las sobresimplificaciones realizadas en la presentación y la explicitación, aclaración y frecuencia de uso de dichas sobresimplificaciones.

Los aspectos analizados son listados a continuación. En la enumeración se colocó entre paréntesis la sobresimplificación con la que podría relacionarse cada aspecto:

- i) Definición del momento de inercia (escalar/tensor y discreto/continuo).
- ii) Explicación cualitativa del concepto (analogías utilizadas a nivel básico).
- iii) Explicitación de las condiciones físicas que acompañan a la definición (mención/definición de los ejes principales de inercia).
- iv) Explicitación de la transición de la definición de momento de inercia de un cuerpo formado por masas puntuales a un cuerpo con distribución continua de masa (discreto/continuo).
- v) Ejes principales de inercia (mención/definición de los ejes principales de inercia).

IV. RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados obtenidos del estudio de los textos mencionados, siguiendo el protocolo elaborado. En la siguiente sección se detalla el análisis comparativo entre ellos.

A. [A] Alonso y Finn (1971)

- i) La primera vez que se define el momento de inercia es en el “Capítulo 10: Dinámica de Cuerpo Rígido”, en la “Sección 10.2. Momento Angular de un cuerpo rígido”, en el cálculo del momento angular para el caso de un cuerpo formado por masas puntuales, se define la cantidad momento de inercia respecto del eje de rotación z , como:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (1)$$

y a partir de allí se trabaja con un escalar.

- ii) Se establece que es una cantidad importante en el análisis de la rotación de un cuerpo rígido.
- iii) La manera en la que se introducen las condiciones físicas es progresiva. Primero se analiza el momento angular de un cuerpo girando alrededor del eje z y la componente de momento angular respecto de dicho eje, con lo cual introduce de manera no explícita la importancia de un eje principal de inercia.
- iv) En la “Sección 10.3 Cálculo del momento de inercia” se establece que si el cuerpo está conformado por una distribución continua de masa entonces la suma de la definición discreta se transforma en integral:

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

Si el cuerpo es homogéneo la integral se reduce a un factor geométrico igual para todos los cuerpos con la misma forma y tamaño.

- v) Se explicita que el momento angular no tiene por qué ser paralelo al eje de rotación y establece que es posible encontrar tres direcciones mutuamente perpendiculares para las cuales el momento angular es

paralelo al eje de rotación: los ejes principales de inercia. Se explica que cada eje principal de inercia va a tener asociado un momento de inercia y que los ejes principales de inercia constituyen un sistema de referencia fijo en el cuerpo y que rota con este. Si el cuerpo tiene alguna simetría los ejes principales de inercia coinciden con algún eje de simetría. Se establece que cuando el cuerpo rota respecto de un eje principal de inercia, el momento angular total es paralelo a la velocidad angular que se encuentra siempre a lo largo del eje de rotación:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (3)$$

Se afirma que en el caso más general de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje arbitrario, el momento angular puede expresarse con relación a los ejes principales de inercia.

B. [B] Resnick, Halliday y Krane (2010)

- i) Se encuentra en el “Capítulo 12: Dinámica de la rotación. Sección 12.2 Energía cinética de la rotación e inercia de la rotación”. Se considera a un cuerpo rígido como un conjunto de partículas y se encuentra la energía cinética como la suma de la energía de todas las partículas que forman el cuerpo rígido. Se define a la inercia de rotación del cuerpo con respecto al eje de rotación como:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (4)$$

y se explica que r es la distancia perpendicular al eje de rotación. En adelante, se trabaja con un momento de inercia escalar.

- ii) Se escribe la expresión de la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5)$$

y se hace notar que es análoga a la expresión de la energía cinética de traslación del cuerpo; además, indica la analogía de la masa M con la inercia de rotación. Mediante una gráfica se muestra que un cuerpo con inercia de rotación grande exige un mayor esfuerzo que otro con la misma masa pero con inercia de rotación más pequeña. No se menciona el sistema de referencia elegido.

- iii) Se afirma que la inercia de rotación de un cuerpo depende tanto del eje en torno al cual está girando como de la manera en la que está distribuida su masa. Los ejes principales de inercia no son definidos.
- iv) En la “Sección 12.3: Inercia de rotación de los cuerpos sólidos (sección opcional)” se utiliza el cálculo de la inercia de rotación de una barra sólida uniforme que gira en torno a un eje perpendicular a la barra en su punto medio, para hacer la transición de distribución de masa discreta a continua. La demostración se realiza dividiendo la barra en diez partes, luego en veinte partes, para finalmente encontrar la expresión de la inercia de rotación para N partes. Se analiza el límite de esa última expresión para el caso en el que N tiende a infinito y expresa:

$$I = \int r^2 dm \quad (6)$$

- v) No hay ninguna referencia a los ejes principales de inercia en este texto.

C. [C] Sears, Zemansky, Young y Freedman (1999)

- i) En el “Capítulo 9: Rotación de cuerpos rígidos, Sección 9.5: Energía en el movimiento de rotación”, se considera un cuerpo rígido como formado por un gran número de partículas y se encuentra la energía cinética respecto de un eje de rotación. Se define la cantidad:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (7)$$

como el momento de inercia y se resalta que r es la distancia perpendicular al eje de rotación, siendo esta cantidad un escalar.

- ii) Se establece que la palabra momento implica que el momento de inercia depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo. Para un cuerpo con masa total dada, cuanto mayor sea la distancia entre el eje y las partículas, mayor será el momento de inercia. Se explica que dado que en un cuerpo rígido las distancias son constantes, el momento de inercia es independiente de cómo gira el cuerpo, y que cuanto mayor es el momento, mayor es la energía cinética de un cuerpo que gira con una velocidad angular dada. También se aclara que cuanto mayor es el momento de inercia de un cuerpo, más difícil es ponerlo a girar si está en reposo y más difícil es detenerlo si está girando. No se define el sistema de referencia con el que se trabaja.
- iii) En forma no explícita se establece que la definición del momento de inercia está dada respecto de un eje de rotación.
- vi) Solamente se expresa que si un cuerpo es una distribución continua de masa, la sumatoria se convierte en integral. En la "Sección 9.7: Cálculo de Momentos de Inercia (sección opcional)" se introduce la ecuación:

$$I = \int r^2 dm \quad (8)$$

- iv) y se analiza ésta para el caso en el que la densidad sea uniforme.
- iv) No hace mención a estos ejes.

D. [D] Tipler y Mosca (2005)

- i) En el "Capítulo 9: Rotación, Sección 9.2: Energía cinética de rotación", se encuentra la energía cinética de un cuerpo formado por partículas individuales. Se define a la cantidad escalar:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9)$$

- como el momento de inercia respecto del eje de rotación.
- ii) Se afirma que el momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a experimentar cambios en su movimiento de rotación respecto de un eje y que es el análogo rotacional de la masa. Se aclara que el momento de inercia depende de la distribución de la masa dentro del objeto respecto al eje de rotación y que cuanto más lejos está la masa del eje, mayor es el momento de inercia. Se concluye que el momento de inercia depende de la localización del eje de rotación.
- iii) Se trabaja con un objeto rígido que gira respecto de un eje fijo.
- iv) En la "Sección 9.3: Cálculo del momento de inercia", se dice que un cuerpo consiste de un continuo de elementos de masas muy pequeños, y por lo tanto la suma finita se transforma en integral:

$$I = \int r^2 dm \quad (10)$$

- v) No se hace mención de los ejes principales de inercia.

E. [E] Serway (1982)

- i) En el "Capítulo 10: Rotación de un objeto rígido alrededor de un eje fijo. Sección 10.4: Energía Rotacional", se considera al cuerpo rígido como una colección de pequeñas partículas y en el cálculo de la energía cinética se encuentra la cantidad escalar:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (11)$$

- que recibe el nombre de momento de inercia.
- ii) Se establece que el momento de inercia, en el movimiento rotacional, es análogo a la masa en el movimiento traslacional sin hacer mención al sistema de referencia considerado.
- iii) Se considera que el cuerpo gira alrededor del eje fijo z. Se afirma que los momentos de inercia de cuerpos con geometrías simples son fáciles de calcular siempre y cuando el eje de rotación coincida con un eje de simetría.
- iv) Se explica que el momento de inercia de un objeto extenso se encuentra imaginando que el objeto está dividido en muchos elementos. Luego, se toma el límite de la suma en la definición del momento de inercia cuando los elementos de masa tienden a cero y se enuncia que, en este límite, la suma pasa a ser una integral:

$$I = \int r^2 dm \quad (12)$$

- v) Se realiza el análisis para el caso de densidad constante.
 No se menciona a los ejes principales de inercia.

F. [I] Wikipedia La enciclopedia libre

- i) En la presentación del tema se dice que la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud vectorial llamada momento de inercia. Para un cuerpo formado por partículas, el momento de inercia es:
- $$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (13)$$

Define el tensor de inercia.

- ii) Se comienza la explicación analizando que cuando un cuerpo es libre de girar alrededor de un eje, se debe aplicar un torque para cambiar su momento angular. Se establece que la cantidad de torque necesaria para causar una determinada aceleración angular es proporcional al momento de inercia del cuerpo. Se explicita que el momento de inercia juega el papel en la cinética rotacional que aquel que la masa juega en la cinética traslacional, ambos caracterizan la resistencia de un cuerpo a los cambios en su movimiento. Se explica que el momento de inercia depende de cómo se distribuye la masa alrededor de un eje de rotación y que cambia según el eje elegido. El momento de inercia de un cuerpo indica su resistencia a adquirir una aceleración angular.
- iii) Las condiciones físicas quedan implícitas en la definición y no se definen los ejes principales de inercia.
- iv) Se define para un cuerpo de masa continua:

$$I = \int r^2 dm \quad (14)$$

- v) Se establece que el vector momento angular, en general, no tiene la misma dirección que el vector velocidad angular y que ambos vectores tienen la misma dirección si el eje de giro es un eje principal de inercia. Además, se menciona que cuando un eje es de simetría entonces es eje principal de inercia.

G. [II] Física con Ordenador. Curso interactivo en internet.

- i) Se inicia calculando el momento angular de un cuerpo formado de partículas discretas, en este cálculo de la componente z del momento angular se encuentra el momento de inercia escalar como:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (15)$$

En otro apartado, se encuentra la energía cinética de un sólido, conformado por partículas, y se vuelve a encontrar el momento de inercia.

- ii) Se establece que el momento de inercia no es una cantidad característica de un cuerpo como puede ser la masa o el volumen, sino que su valor depende de la posición del eje de rotación.
- iii) Se establecen en la definición.
- iv) No se hace referencia a cuerpos con distribución continua de masa.
- v) Se establece que, en general, el momento angular no tiene la dirección del eje de rotación, es decir, el momento angular no coincide con su proyección a lo largo del eje de rotación. Cuando coinciden, se dice que el eje de rotación es un eje principal de inercia. Se explica que para estos ejes existe una relación sencilla entre el momento angular y la velocidad angular: los dos vectores tienen la misma dirección del eje de rotación.

H. [III] Casiopea

- i) Se define el momento de inercia como un escalar:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (16)$$

y se afirma que en ingeniería estructural el momento de inercia es una propiedad geométrica de la sección transversal de los elementos estructurales.

- ii) Se dice que el momento de inercia es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Se explica que es similar a la inercia sólo que se aplica en rotación más que en un movimiento lineal y puede pensarse como masa rotacional. También se explicita que la inercia de un objeto en la rotación está determinada por su momento de inercia, siendo éste la resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad giro. Además, se explicita que el momento de inercia depende de la distribución de la masa en un cuerpo

y que a mayor distancia de la masa al centro de rotación, mayor será el momento de inercia. También se refiere a que es la magnitud que indica la resistencia que tiene un objeto determinado a rotar. El momento de inercia depende de: la forma, la distribución de su masa, la posición del eje de rotación y la geometría del cuerpo.

- iii) Se afirma que el momento de inercia puede ser distinto considerando ejes de rotación ubicados en distintas posiciones para un mismo cuerpo.
- iv) No se hace ninguna referencia al momento de inercia para distribuciones continuas de masa.
- v) Se menciona que el análisis se realiza respecto de los ejes principales de inercia.

I. [IV] Openstax

- i) Se encuentra la energía cinética de un cuerpo, considerando que está formado por partículas, como la suma de las energías cinéticas de las partículas. Comparando la ecuación encontrada con la energía cinética en un movimiento de traslación, se encuentra que $\sum_i m_i r_i^2$ es la contraparte de la masa en la ecuación de la energía cinética rotacional, se establece que este escalar se llama momento de inercia.
- ii) Se expresa que el momento de inercia es la medida cuantitativa de la inercia rotacional, de la misma forma que en el movimiento traslacional la masa es la medida cuantitativa de la inercia lineal. Se explica que cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo rígido o de un sistema de partículas, mayor será su resistencia al cambio de velocidad angular en torno a un eje fijo de rotación. Se dice que los cuerpos rígidos y los sistemas de partículas con más masa concentrada a mayor distancia del eje de rotación tienen mayores momentos de inercia que los cuerpos y sistemas de la misma masa, pero concentradas cerca del eje de rotación.
- iii) Se establece que el momento de inercia depende del eje de rotación.
- iv) Se afirma que en el caso de distribución continua de masa el momento de inercia es:

$$I = \int r^2 dm \quad (17)$$

- v) No se hace ninguna referencia a los ejes principales de inercia.

V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En base a los resultados obtenidos, se realiza el siguiente análisis comparativo centrado en las simplificaciones presentadas en los textos de Mecánica básica.

Con respecto a la simplificación relacionada con el tipo de magnitud que representa el momento de inercia (escalar/tensor), todos los textos lo definen como $\sum_i m_i r_i^2$ lo cual corresponde a una magnitud escalar. El texto [I] avanza en la definición refiriéndose al momento de inercia como magnitud tensorial en la última sección del capítulo.

En cuanto al tratamiento del cuerpo rígido como una colección discreta de partículas versus una distribución continua de masa, la mayoría de los textos sólo enuncian que la sumatoria en la definición del momento de inercia se transforma en integral. El único texto en el que se plantea esta transición cuidadosamente es en el texto [B], en una sección optativa. El carácter optativo de dicha sección también es un indicativo de que no se considera demasiado relevante en la presentación a este nivel.

El análisis de la simplificación que se produce al presentar a los ejes principales de inercia es más complejo, como se muestra a continuación. En algunos casos, la introducción del concepto de momento de inercia se realiza mediante el uso de conceptos aprendidos previamente mientras que en otros casos la presentación se reduce a su definición expresada simbólicamente. En el primer grupo, se encuentran aquellos que utilizan el concepto de momento angular y aquellos que recurren al concepto de energía cinética. Se puede observar que el uso del momento angular requiere referirse a los ejes con los que se trabaja, obligando así a incorporar los ejes en las explicaciones del concepto de momento de inercia. En cambio, aquellos textos que inician la presentación basándose en el concepto de energía cinética, no necesitan la incorporación de los ejes en sus explicaciones al igual que sucede en el caso en el que se introduce directamente la definición. Los textos [A] y [II] comienzan el análisis a partir del cálculo del momento angular. El texto [A] es el único en el que se establece un sistema de referencia fijo al cuerpo formado por tres ejes principales de inercia y explicita la dirección del eje de rotación sobre un eje del sistema de referencia. Los textos [B], [C], [D], [E] y [IV] inician el análisis a partir del cálculo de la energía cinética; los textos [I] y [III] definen directamente el momento de inercia.

En lo que respecta a la explicación cualitativa del concepto, los textos [B], [D], [E], [I], [III] y [IV] utilizan la analogía entre el movimiento lineal y el de rotación, para dar un sentido físico al momento de inercia.

Todos los textos analizados presentan tablas de momentos de inercia de distintos cuerpos indicando los ejes de rotación. Todos los cuerpos en las tablas presentan simetrías. También realizan distintos ejemplos que resultan aclaratorios y demuestran el teorema de Steiner.

VI. CONCLUSIONES

Al comienzo de este trabajo explicamos cómo Spiro *et al.* (2006), mediante su Teoría de la Flexibilidad Cognitiva, afirman que las limitaciones, simplificaciones y analogías existentes en la presentación de conceptos a nivel básico, pueden afectar la comprensión en asignaturas en las cuales se abordan nuevamente los mismos conceptos pero con un nivel de complejidad mayor. Así, las sobresimplificaciones y explicaciones aprendidas previamente, muchas veces, son incorporadas por los estudiantes e impiden o dificultan la comprensión de textos más avanzados que muestran otros aspectos complejos de los conceptos. Las limitaciones identificadas en este trabajo, en los libros básicos de Mecánica, podrían generar versiones sobresimplificadas del concepto de momento de inercia entre los estudiantes. Si bien es casi imposible realizar una presentación más compleja y completa cuando los alumnos se encuentran por primera vez con este concepto, el presente trabajo sirve de advertencia para que los profesores de niveles más avanzados tengan en cuenta algunas dificultades de aprendizaje que se pueden presentar.

En concreto, en el caso que nos ocupa, en la mayoría de los textos no se realiza el pasaje del caso discreto al continuo, manteniendo el tratamiento del cuerpo rígido como si fuera un conjunto de partículas discretas. Asimismo, en la mayoría de los textos, el tratamiento del tema de Momento de inercia no hace referencia al sistema de referencia utilizado para su definición, y tampoco definen los ejes principales de inercia.

Por último, el uso de la analogía entre la masa y el momento de inercia debería ser planteada con precaución ya que Spiro *et al.* (2006) alertan sobre el exceso del uso de éstas por parte de alumnos que aprenden un tema nuevo. Como trabajo a futuro se estudiará las sobresimplificaciones que realizan los estudiantes que, habiendo superado un curso básico de Mecánica, inician un curso de nivel superior, para analizar si las sobresimplificaciones encontradas en los libros de textos fueron incorporadas por ellos y dificultan la flexibilidad cognitiva.

REFERENCIAS

- Alexander, P. A. y Jetton, T. L. (2000). Learning from Texts: A multidimensional and developmental perspective. En M. P. Kamil, *Handbook of Research of Reading* (285-310). Mahwah, N.J.: Lea Inc.
- Alonso, M. y Finn E. J. (1971). *Física. Vol I: Mecánica*. D. F., México: Fondo Educativo Interamericano.
- Casiopea. (2024). *Momento de inercia*. Recuperado de https://wiki.ead.pucv.cl/Momento_de_Inercia
- García A. F. (2024). *Física con Ordenador. Curso interactivo de Física en Internet*. Recuperado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>
- Hoyos, E., Callojas, G., y Pocovi, M. C. (2021). Momento Angular en libros de textos de nivel universitario básico. *Revista de Enseñanza de la Física de la Asociación de Profesores de Física de la Argentina*, 33, 349-356. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/35584>
- Openstax. (2024). *Momento de inercia y energía cinética rotacional*. Recuperado de <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/10-4-momento-de-inercia-y-energia-cinetica-rotacional>.
- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S. (2010). *Física. Volumen 1*. México: Grupo Editorial Patria.
- Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., Freedman, R. A. (1999). *Física Universitaria. Volumen 1*. México: Pearson.
- Serway, R. A. (1982). *Física Tomo I*. México: Mc Graw Hill.

Spiro, R. J., Coulson R. L., Feltovich P. J. y Anderson D. K. (2006). Cognitive Flexibility Theory: Advanced Knowledge Acquisition in Ill-Structured Domains. En R. B. Ruddell y N. J. Unrau (Eds.) *Theoretical Models and Processes of Reading*. NJ: LEA, Inc.

Tipler, P. A. y Mosca, G. (2005). *Física para la Ciencia y la Tecnología. Volumen 1^a. Mecánica (5ta ed.)*. España: Editorial Reverté.

Wikipedia. La enciclopedia libre. (2024). *Momento de inercia*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inercia