

# Un provocador problema de electromagnetismo

## A provoker problem of electromagnetism

Lorenzo M. Iparraguirre  <sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende y Haya de la Torre. Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

\*E-mail: [lorenzo.iparraguirre@unc.edu.ar](mailto:lorenzo.iparraguirre@unc.edu.ar), [iparraguirre.lorenzomarcos@gmail.com](mailto:iparraguirre.lorenzomarcos@gmail.com)

Recibido el 30 de mayo de 2023 | Aceptado el 7 de mayo de 2024

### Resumen

Un desafiante planteo que hace el divulgador científico Derek A. Muller, con un circuito eléctrico muy simple pero muy curioso, es elegido en función de su potencialidad para reflexionar sobre algunos aspectos básicos relacionados con la circulación de corriente. Aunque el propósito del planteo de Muller es mostrar que en los circuitos eléctricos la energía viaja por el espacio conducida por el campo electromagnético y no lo hace por los conductores, ese no es el tema de este trabajo, sino que se aprovecha el circuito propuesto por Muller para reflexionar sobre aspectos básicos de la circulación de la corriente eléctrica. Específicamente se mostrará cómo hallar la forma en que se inicia la circulación de la corriente, aprovechando las aproximaciones que este circuito permite hacer. Aunque el planteo de Muller apunta a otros objetivos, pone de relieve el problema de que la forma en que se inicia la circulación de la corriente en los circuitos es un tema que, debido a las dificultades matemáticas, no se profundiza ni en los niveles básicos ni en los avanzados. En este trabajo se plantearán algunas preguntas que asaltan tanto a un profesor de física como a un experto cuando se ven confrontados por el planteo de Muller, y se mostrará cómo se procede a la búsqueda de respuestas y se avanza gradualmente hasta construir un panorama claro del proceso correspondiente a este circuito.

**Palabras clave:** Circuito RL; Electromagnetismo; Línea de transmisión; Onda de corriente; Campos en circuitos.

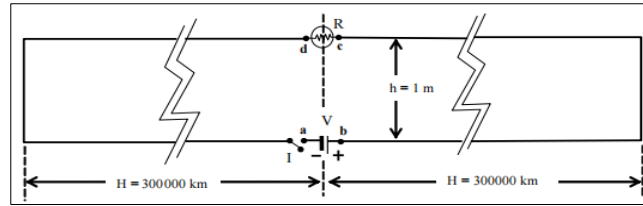
### Abstract

A challenging proposal made by the scientific disseminator Derek A. Muller, with an electric circuit very simple but very curious, is chosen based on its potential to reflect on some basic aspects related to the electric current circulation. Although the purpose of Muller's proposal is to show that in electrical circuits energy travels through space driven by the electromagnetic field and does not travel through conductors, that is not the topic of this work, but rather the circuit proposed by Muller is used to reflect on other basic aspects of the circulation of electric current. Specifically, it will be shown how to find the way in which the current circulation begins, taking advantage of the fact that this circuit allows appropriate approximations. Although Muller's approach aims to other objectives, it highlights the problem that the way in which the circulation of current in circuits begins is a topic that, due to mathematical difficulties, is not explored in depth either at the basic or advanced levels. In this work questions will be raised that assail both a physics teacher and an expert when confronted with Muller's proposal, and it will be shown how to proceed to search for answers and gradually advance until building a clear overview of the process corresponding to this circuit.

**Keywords:** RL circuit; Electromagnetism; Transmission line; Electric current wave; Fields circuit.

## I. INTRODUCCIÓN

En uno de sus videos en su página [www.veritasium.com](http://www.veritasium.com), titulado *The big misconception about electricity*, el interesante divulgador Derek Alexander Muller plantea el siguiente problema (algunos números tienen cambios sin importancia). Supongamos un circuito (eléctrico) con una lámpara, una batería como fuente de alimentación, y un interruptor, pero con la particularidad de que la batería está muy cerca del interruptor, la lámpara a 1 m de distancia de ambos, y los cables que la conectan con los terminales correspondientes de batería e interruptor son, además de conductores ideales con resistividad estrictamente nula, extremadamente largos ambos: de 600000 km de longitud cada uno, dispuestos de ida y vuelta a lo largo de alguna dirección rectilínea (figura 1).



**FIGURA 1.** Ilustración del circuito propuesto.  $V$  indica la diferencia de potencial de la fuente, y  $R$  la resistencia del filamento de la lámpara. Los conductores ideales extremadamente largos sirven para plantear interrogantes acerca del tiempo que demorarían los procesos que tendrán lugar después de cerrar el interruptor  $I$ .

Y la pregunta que Derek formula es: ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor se encenderá la lámpara? Con la siguiente oferta de opciones (que deben ser justificadas): a) 1 s; b) 2 s; c) 3 ns; d) 4 s; e) Otra.

Una aclaración que Derek formula (la cual desnuda un punto débil del planteo), es que el circuito tiene cierta inductancia, la cual determinará que la corriente tienda a su valor final de régimen de manera asintótica con cierto tiempo característico, y que se debe ignorar ese efecto para responder.

La respuesta correcta, según Derek, es la c). Lo cual además él muestra experimentalmente construyendo un circuito en el cual los “brazos” de 300000 km se han reducido a 30 m. Con un osciloscopio de respuesta rápida él muestra cómo la corriente comienza a circular por la lámpara unos pocos nanosegundos después de cerrar el interruptor, mucho antes de los 100 o 200 ns que se esperarían si alguna señal tuviera viajar por los conductores desde la fuente hasta la lámpara.

Aunque hay aspectos y detalles cuestionables del planteo, además de los asociados con los efectos de la inductancia, Derek logra hacer un aporte importante a la idea de que la energía en el circuito no viaja por los cables conductores, sino por el campo electromagnético.

Pero aceptar que la respuesta es c) nos enfrenta con un problema más desafiante que el planteado por Derek: ¿Cómo, exactamente, evoluciona la corriente en este circuito?

Este esencialmente es el problema que nos convoca en estas páginas, frente al cual nos encontramos sin respuesta, no solamente los profesores, sino expertos con una preparación bastante más avanzada.

La noción que se enseña en general, útil para cualquier circuito de la vida cotidiana, es que aunque la nube de portadores de carga (electrones usualmente) en general viaja con mucha lentitud (cm/s, o mm/s), su movimiento es regulado por campos que se propagan con la velocidad de la luz y llegan con demoras indetectables a todos los puntos del circuito, por lo cual determinan que la circulación de la corriente comience simultáneamente en todo el circuito. Pero es claro que *esta simultaneidad, o instantaneidad, no puede ser exacta o rigurosa*. Algo debe demorar la “señal” en llegar a las diferentes partes del circuito, por poco que sea. Y si se quiere penetrar en estos brevísimos intervalos de tiempo, se encuentran tantas dificultades que en general el tema queda sin aclarar.

Este circuito tiene la virtud de que, por su forma y dimensiones, propone tiempos muy diferentes para la propagación de señales en forma de ondas electromagnéticas ya sea directamente desde la fuente hasta la lámpara, o ya sea a lo largo de los conductores por los que debe avanzar la corriente, y eso permite separar y aclarar ideas que en los circuitos habituales se presentan confundidas. Por ejemplo la idea ingenua más simple podría ser: al cerrar el interruptor la fuente hace que la corriente comience a circular, quitando electrones del lado derecho e impulsándolos al izquierdo, constituyendo una corriente hacia la derecha con el aspecto mostrado en la figura 6, que se va extendiendo con la velocidad de la luz simétricamente hacia izquierda y derecha (“onda de corriente”). Según esta idea la respuesta debería ser la b), ya que a los 2 s ambos frentes de la onda llegarían a la lámpara desde izquierda y derecha simultáneamente, haciendo que comience a circular corriente por ella.

Esta idea es simple pero ingenua, y para validarla habría que mostrar que los campos correspondientes cumplen con las ecuaciones debidas (Maxwell). Y lo mismo es necesario para aceptar que c) es la respuesta correcta (independientemente de lo que diga Derek).

Y para poder hacer esto debemos elaborar un *plan de acción* y no es claro cómo debe ser. De manera que resulta razonable comenzar revisando cosas que sí sabemos, y ver cómo ellas nos guían en el análisis de los detalles que van surgiendo, según se describe en los siguientes puntos:

## II.- Revisión de lo conocido

Este es un primer paso indispensable para tratar cualquier caso difícil. Consiste en revisar las situaciones conocidas, analizando los detalles que interesan para las dos situaciones típicas: antes de cerrar el interruptor, y en régimen, suficiente tiempo después de cerrar el interruptor. Se termina revisando la situación que correspondería si el circuito tuviera un tamaño razonable.

III.- Un intento de análisis del proceso inicial

En este punto se analiza qué puede ocurrir en los instantes posteriores al cierre del interruptor, y se logra mostrar que rápidamente se llega a tener campos que se propagan de manera muy similar a los de una onda electromagnética básica en una línea de transmisión constituida por dos conductores rectilíneos paralelos. Este hallazgo lleva rápidamente a un planteo formal en el último punto.

IV.- Planteo formal final

A partir de lo hallado en el punto anterior se puede generar el planteo que completa la resolución de todo el problema, y se consigue así finalmente determinar los detalles importantes del crecimiento de la corriente en este circuito.

II. REVISIÓN DE LO CONOCIDO

A. Antes de cerrar el interruptor

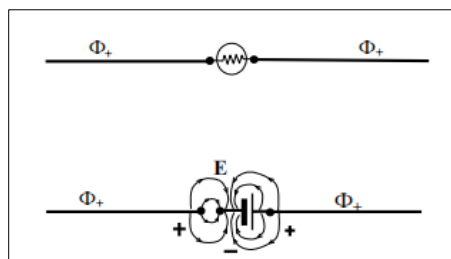
Antes de cerrar el interruptor, todo el conductor, desde el borne positivo de la fuente, hasta el borne del interruptor, en ambas ramas del circuito, incluyendo el filamento de la lámpara, está al mismo potencial ( $\Phi_+$ ). Solamente es negativo el borne negativo de la fuente y el muy corto conductor que lo une al interruptor.

Ahora bien, dado que la carga total (neta) de todo el circuito es nula, se tiene que la fuente es capaz de suministrar cierta cantidad de carga  $Q$  al borne positivo (que forma parte del conductor que constituye el circuito), habiéndola quitado al negativo (que forma parte del conductor que conecta con el interruptor). Así es que este conductor (llamémoslo "interior") tendrá localizada en su pequeña extensión la cantidad  $-Q$  de carga, mientras que el extensísimo circuito restante (llamémoslo "exterior") tendrá la cantidad total  $+Q$ . Esta carga positiva del circuito exterior se acumulará preponderantemente en la zona cercana al interruptor (debido a la atracción electrostática), es decir, acumulándose cierta cantidad  $Q_F$  en la cercanía del borne derecho de la fuente, y aproximadamente  $Q_I \cong Q - Q_F$ , en la cercanía del otro extremo del conductor (borne izquierdo del interruptor). De manera que, en una primera aproximación los bornes de la fuente tendrán cargas  $(-Q_F, Q_F)$ , y los bornes del interruptor  $(Q_I, -Q_I)$ .

Y afinando un poco la aproximación, las cargas en los bornes de la fuente serán  $(-Q'_F, Q'_F)$ , y en los bornes del interruptor  $(Q'_I, -Q'_I)$ , con las  $Q'$  levemente menores que las respectivas  $Q$ , para tener en cuenta la pequeña diferencia que queda distribuida a lo largo de todo el circuito. Es decir:  $Q = Q_F + Q_I = Q'_F + Q'_I + \delta Q$ : carga movilizada por la fuente.  $-Q = -Q'_F - Q'_I$ : carga del conductor interior  $\delta Q = Q_F - Q'_F + Q_I - Q'_I$ : carga distribuida en el conductor exterior fuera de la zona de la fuente y el interruptor.

Debido a la enorme extensión del circuito es claro que la densidad superficial de carga y con ella el campo eléctrico en la zona lejana es absolutamente despreciable frente a la que existe en la zona de la fuente y el interruptor (en adelante zona "F-I").

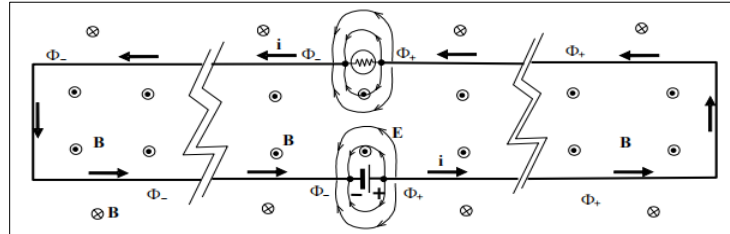
Podría pensarse que posiblemente en la zona de la lámpara la proximidad de las cargas de la zona F-I podría inducir cargas de intensidad no despreciable. Para ver que no es así hay que considerar que la lámpara está a 1 m de distancia del conductor interior, que tiene carga  $-Q$  y está flanqueado por las cargas  $Q'_I$  y  $Q'_F$ , a una distancia pequeña (consideraremos la zona F-I como una esfera de 10 cm de radio dentro de la cual la fuente y el interruptor están ubicados aproximadamente de la manera mostrada en la figura 2). Así es que si solamente estuviese la carga  $-Q$  del conductor interior en el punto central, el campo llegaría a la zona de la lámpara debilitado en un factor 100 respecto del que hay a 10 cm. Pero esta carga está flanqueada por las cargas próximas  $Q'_I$  y  $Q'_F$ , que contrarrestan gran parte de este campo, resultando que, como se muestra en el Apéndice 1, el campo en la zona de la lámpara es menor que la fracción  $10^{-6}$  del campo en la zona F-I. De manera que solamente existe campo eléctrico apreciable en la zona F-I, como se ilustra esquemáticamente en la figura 2.



**FIGURA 2.** Ilustración muy esquemática del campo electromagnético (exclusivamente eléctrico en este caso) antes de abrir el interruptor. No hay carga significativa, excepto en la zona F-I.

### B. En régimen, suficiente tiempo después de haber cerrado el interruptor

Esperando suficiente tiempo después de cerrar al interruptor se llega al estado de régimen, en el cual circula la corriente de valor  $i = V/R$  a lo largo de todo el circuito. Ahora todo el conductor de la mitad derecha tiene el mismo potencial  $\Phi_+$  del borne positivo, y el de la mitad izquierda tiene el potencial  $\Phi_-$  del borne negativo. Así la diferencia de potencial entre los bornes de la lámpara es  $\Phi_+ - \Phi_- = V$ . Además hay un campo magnético  $\mathbf{B}$  cuyas líneas circulan alrededor de los conductores según la Ley de Ampere, y que en la figura 3 se indican perpendicularmente al plano del papel.



**FIGURA 3.** Circuito en régimen. El campo eléctrico solamente tiene valores apreciables en la zona media de la figura. El magnético existe y mantiene sus características en toda la enorme extensión horizontal.

Razonamientos similares a los del punto anterior nos permiten afirmar que el campo eléctrico es apreciable solamente en la zona media: zona F-I, y zona de la lámpara – y que es muy similar en ambas zonas.

Como detalle de color vale notar que imaginando el producto vectorial  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  es posible visualizar las líneas de flujo de la energía, en la zona central, desde la fuente hasta la lámpara. Este detalle: mostrar que la energía en general no viaja por los cables, es el que motiva a Derek para plantear su problema, pero no es importante para nosotros, por lo que no insistiremos en él. El lector interesado puede buscar en cualquier texto de electromagnetismo (por ejemplo Zangwill, 2012; Skilling, 1975; Jackson, 1962) el “vector de Poynting”  $\mathbf{S} = (1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , que en casos como este representa la densidad de flujo de potencia.

### C. Qué diríamos si el circuito tuviera un tamaño razonable

Si el circuito fuese algo como un cuadrado de 1 m de lado, diríamos que al cerrar el interruptor hay alguna señal que se propaga con “ciertos campos electromagnéticos” (eufemismo para decir que seguramente son esencialmente eléctricos, con alguna contribución magnética, y que no sabríamos describir bien su configuración) con velocidades cercanas a la de la luz, de manera que en algunos nanosegundos llegan a todo el circuito y determinan el movimiento “prácticamente simultáneo” de la carga en todo el conductor.

“Prácticamente simultáneo”, entre comillas, significa que no pretendemos algo más fino que unos pocos nanosegundos, pero que a todos los fines prácticos eso puede considerarse instantáneo.

Considerando un circuito “RL” (resistencia e inductancia en serie) en esta aproximación se obtiene la función  $i(t)$  que indica cómo, “simultáneamente” en todo el circuito, la corriente crece desde cero hasta tender asintóticamente al valor final según la expresión:

$$i(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (1)$$

con  $\tau = L/R$ .

La inductancia  $L$  de una espira rectangular de lados  $h$  y  $H$  es difícil de calcular exactamente, pero una expresión aproximada que podemos usar en este caso para obtener órdenes de magnitud es (Zangwill, 2012):

$$L \approx (\mu_0 H / \pi) (k_1 \ln(h/s) + k_2) \quad (2)$$

donde  $s$  es el radio del conductor,  $H$  el lado mayor,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ , y  $k_1, k_2$ , constantes numéricas del orden de 1.

Aplicando a un circuito con  $h \cong H \cong 1 \text{ m}$ , y  $s \cong 1 \text{ mm}$ ,  $V = 10 \text{ V}$ ,  $R = 5 \Omega$  (valores que, excepto  $H$ , mantendremos para todo este trabajo), se puede tomar  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ , y se obtiene  $L \sim 6 \times 10^{-6} \text{ Hy}$ , con lo cual:  $\tau \sim 1,2 \mu\text{s} = 1200 \text{ ns}$ . Este es un tiempo característico suficientemente grande como para que podamos seguir considerando “instantáneo” lo

que ocurre en pocos nanosegundos, y describir con tranquilidad cómo el valor  $i(t)$  que la corriente tiene “simultáneamente” en todo el circuito, va creciendo hasta su valor final.

Vale saber que para el circuito de nuestro problema, con los valores propuestos, y gracias a que un lado (de longitud  $2H$ ) es muchísimo más largo que el otro, una expresión mejor de la inductancia se obtiene fácilmente de la expresión básica  $L = (\text{flujo magnético})/i$ , y es la siguiente.

$$L = 2\mu_0 H \ln(h/s)/\pi \quad (2')$$

y arroja el valor:  $L \cong 1660$  Hy para nuestro caso, con lo cual  $\tau$  sería de cerca de 330 segundos.

Ahora bien, la ecuación (1) es consecuencia de la Ley de Ohm, la Ley de Inducción de Faraday, y la Ley de Ampere. La ley de Ohm describe cómo los conductores metálicos permiten el flujo de cargas en condiciones típicas. La Ley de Inducción de Faraday indica que el crecimiento del flujo del campo magnético ( $\Phi_B$ ) a través de la espira, induce un campo eléctrico con circulación en sentido contrario a la corriente, según la expresión:  $d\Phi_B/dt = -$  circulación del campo  $\mathbf{E}$

Para nuestros fines esta expresión puede ser mejor escrita para cada punto por unidad de área, teniendo en cuenta que la circulación de  $\mathbf{E}$  a lo largo del contorno de una superficie, por unidad de área, es la componente normal a la superficie de lo que se llama rotor del campo ( $\nabla \times \mathbf{E}$ ). De manera que, luego de las manipulaciones usuales (Zangwill, 2012; Skilling, 1975; Jackson, 1962) se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

Por otra parte la Ley de Ampere indica cómo circula el campo magnético alrededor de conductores que conducen corriente eléctrica en condiciones estacionarias, y, luego de las mismas manipulaciones mencionadas en el párrafo anterior, siendo  $\mathbf{j}$  el vector densidad de corriente, puede ser escrita como:

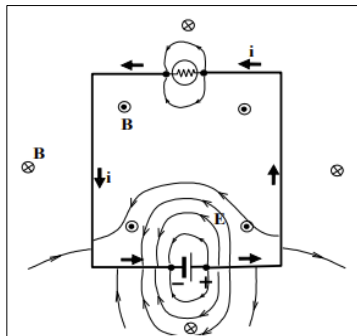
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4')$$

expresión que es una parte de:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

la cual es otra Ecuación de Maxwell (que puede considerarse la “pareja” de (3)).

De manera que es interesante notar que las ecuaciones (1) y (4') describen una situación *irreal* en el circuito de la figura 4, con un campo magnético que “sigue” a la corriente sin demoras (es decir varía simultáneamente con ella independientemente de la distancia), mientras la corriente tiene el mismo valor en cada instante en todo el circuito. Y este comportamiento irreal se podría obtener despreciando el término  $(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$  en las Ecuaciones de Maxwell (lo cual parece razonable cuando la variación temporal es suficientemente lenta).



**FIGURA 4.** Circuito cuadrado de 1 m de lado, algunos cientos de nanosegundos después de cerrar el interruptor. La corriente puede considerarse igual en todo el circuito en cada instante, creciendo según la expresión (1). La corriente es la misma en todo el circuito, pero la diferencia de potencial aún es bastante menor a los bornes de la lámpara que de la fuente, y por ello también la densidad superficial de carga sobre los conductores y el campo eléctrico en la zona.

Ahora bien, no encararemos la tarea de mostrar que en las condiciones de la figura 4 el término  $(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$  puede despreciarse en las Ecuaciones de Maxwell. Nos limitaremos a destacar que ese término es el que transforma una evolución irreal en una real, introduciendo la propagación de los campos y la evolución correspondiente a los primeros instantes (fracciones de nanosegundo). Pero mostrar formalmente eso es precisamente el problema que no sabemos resolver, y que veremos que es más accesible en las condiciones geométricas de la figura 1, en las cuales es claro que cualquier señal puede llegar en nanosegundos desde la fuente hasta la lámpara, y no a los extremos lejanos del circuito. En estas condiciones podemos pensar que la corriente comienza en la fuente, pero es claro que ya no podemos pensar en que evoluciona simultáneamente.

Y nos surgen interrogantes bastante difíciles de responder y hasta de entender, que son aspectos inevitables del problema que hemos encarado:

¿Cómo es la corriente que comienza en la fuente? ¿Debemos esperar un par de segundos hasta que llegue a la lámpara, o puede comenzar corriente en la lámpara a los pocos nanosegundos de cerrado el interruptor, al llegar los campos electromagnéticos a ella?

De ser así, ¿cómo es la corriente que comienza en la lámpara? ¿Tiene relación con la que antes comenzó en la fuente? ¿Tiene sentido pensar en dos corrientes aisladas en dos tramos del circuito? ¿Y cómo se llega de estas corrientes aisladas, a una circulación en todo el circuito?

La consideración de estas cuestiones básicas nos sugiere los primeros pasos a dar: parece necesario comenzar analizando la forma en que puede iniciarse la circulación de la corriente al cerrarse el interruptor, y cómo se puede propagar la onda electromagnética generada por el correspondiente disturbio de cargas.

### III. UN INTENTO DE ANÁLISIS DEL PROCESO INICIAL

Comenzamos con el circuito de la figura 1. El interruptor está abierto. Hay campos eléctricos en la zona F-I, cuyas líneas nacen y mueren en distribuciones superficiales de carga que hay en la zona. Todos estos campos y distribuciones de carga se debilitan suficientemente con la distancia como para poder plantear que a 1 m de distancia son prácticamente nulos: aceptamos que no hay campos ni cargas netas en la zona de la lámpara.

El cierre del interruptor hace desaparecer bruscamente las cargas en sus contactos, anulando el dipolo que había allí, y permite que la carga comience a fluir a través de la fuente.

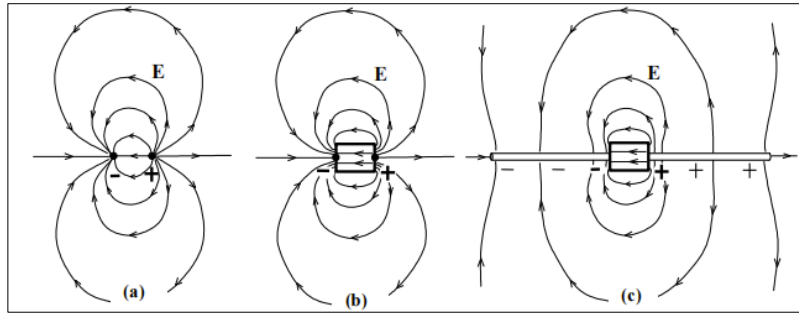
Ahora bien, como se explica en el Apéndice 1, el dipolo existente en el interruptor es exactamente opuesto al que existe en los bornes de la fuente (llamémoslos  $D_I$  y  $D_F$  respectivamente),  $D_I$  contrarresta gran parte del campo generado por  $D_F$ , y antes de  $t = 0$  este conjunto es tan incapaz de generar campo en la zona de la lámpara como si no existiese. Podría decirse que la desaparición del  $D_I$  equivaldría a la aparición de su opuesto:  $D_F$ . Pero en principio ya sabemos que el  $D_F$  solo tampoco produciría un campo apreciable en la zona de la lámpara. Claro que hay que considerar el detalle de que un  $D_F$  que aparece en  $t = 0$ , no es lo mismo que un  $D_F$  estático: es un dipolo que pasa bruscamente de cero a cierto valor.

Y una idea importante es que el campo estático producido por un dipolo fijo aislado es fácil de calcular, pero no es lo mismo que el campo de un dipolo aislado que varía en el tiempo. Un dipolo aislado que varía en el tiempo irradia una *campo dipolar de radiación* bastante parecido en su forma, aunque no tan fácil de calcular. No solamente tiene campo eléctrico, también tiene parte magnética (generada por la variación temporal según las Ecuaciones de Maxwell). El campo dipolar de radiación solamente es fácil de calcular a distancias mucho mayores que el tamaño del sistema dipolo, en la zona llamada "de radiación", en la que tiene la importante particularidad de que se debilita solamente con la primera potencia de la distancia, haciendo prontamente despreciables los campos estáticos.

De manera que una primera idea simplificadoria es que la brusca anulación del  $D_I$  irradiará campos de tipo dipolar que podrían no ser despreciables al llegar a la lámpara.

Pero resulta que además deberemos considerar que todo ocurre en presencia de los conductores metálicos que van a influir modificando fuertemente la situación. Es decir, el campo de radiación de un dipolo puntual aislado que aparece bruscamente, es un campo típico cuya descripción puede ser hallada en cualquier texto de electromagnetismo, pero no es exactamente lo que nos interesa. Nos da pautas útiles solamente para comenzar, y no más, porque nuestro problema consiste encontrar cómo resulta el movimiento de las cargas bajo el condicionamiento que imponen los conductores de nuestro circuito. Condicionamiento que, inicialmente consiste en el hecho ya mencionado de que el cierre del interruptor, además de anular  $D_I$ , permite que comience la circulación de cargas a través de la fuente.

Tratemos de visualizar cualitativamente los campos de interés, comenzando con un dipolo estático muy simple, y variaciones útiles del mismo.



**FIGURA 5.** Casos de campos dipolares estáticos. **a)** dos cargas puntuales de signo opuesto. **b)** Las cargas son los bornes de una fuente con diferencia de potencial  $V$ . El interior de la fuente es una zona en la que hay fuerzas no electromagnéticas que cancelan las del campo eléctrico. **c)** La fuente tiene conectados cables conductores a cada borne, sobre cuya superficie también se acumula carga estática.

En la figura 5 se muestran esquemáticamente campos eléctricos estáticos de características típicamente dipolares, que pueden interesarnos en este problema. El caso básico, único que es estrictamente un dipolo, es el a), en el cual hay dos cargas puntuales de igual módulo y signo opuesto separadas por cierta distancia. En la variante b) la separación de las cargas de signo opuesto se ha producido por acción de una fuente capaz de impulsar la circulación de corriente eléctrica, aplicando fuerzas hacia la izquierda a los electrones, que son los portadores de carga móviles capaces de constituir la corriente eléctrica. Estas fuerzas que aplica la fuente no son de naturaleza electromagnética, y tienen el efecto de cancelar las fuerzas que el campo eléctrico aplicaría en su interior (estas atraerían los electrones hacia el borne positivo anulando campo y dipolo). En la variante c) se destaca el hecho de que si hay conductores (rectilíneos en este caso) conectados a los bornes, la carga se distribuye por la superficie de los mismos de manera de que cada uno tiene el valor del potencial del borne correspondiente (así, entre otras cosas, el campo eléctrico debe nacer perpendicularmente de la superficie en cada lugar).

La forma exacta en la que la densidad superficial de carga se distribuye a lo largo de cada conductor en el caso 5.c) es muy difícil de calcular, pero es posible mostrar que es mayor en el extremo cercano a la fuente, bastante constante a lo largo del conductor, y tiene otro aumento en el extremo lejano (ver Apéndice 2). Aunque es difícil de creer, si los conductores son muy largos la densidad de carga no disminuye sensiblemente con la distancia, y conductores infinitamente largos agotarían la energía disponible de cualquier fuente.

Pero ese no es el caso que nos interesa: al estar el conductor cerrado formando un circuito, tenemos la situación ya explicada en II.1, con la carga acumulada en los bornes de la fuente y del interruptor, en una cantidad muy pequeña, limitada por la capacidad de la superficie de ambos.

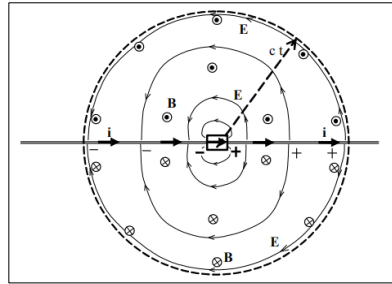
De manera que, considerando para comenzar que solamente existiesen los dos conductores rectilíneos de longitud  $H$  unidos a la F-I, tendríamos que el cierre del interruptor inicia el proceso de movilizar carga (quitándola de uno de los conductores para suministrársela al otro), resultando cierta densidad superficial de corriente extendiéndose gradualmente sobre ambos conductores, lo cual debería ocurrir con una cierta velocidad de propagación, en principio, la de la luz. Finalmente se llegaría a una situación con carga superficial y campo electrostático similar al ilustrado esquemáticamente en la figura 5.c. Pero en cada instante  $t$  en el cual la carga hubiera llegado hasta una distancia  $d(t) < H$  en los dos sentidos, se tendría que la carga estaría fluyendo, y habría, además de carga, corriente eléctrica y campo magnético.

Nos damos cuenta ahora de que ya no estamos en la situación de considerar el campo de radiación de un dipolo de dimensiones despreciables que varía en tiempo, sino que tenemos una distribución de cargas de características dipolares que se va extendiendo en el espacio de manera que sus dimensiones nunca son despreciables. Y en los lugares  $z = \pm ct$  a los cuales va llegando la onda de corriente (ubicamos un sistema de coordenadas con origen en la fuente y eje  $z$  a lo largo del conductor), en ese instante  $t$  se está produciendo una variación brusca de corriente que es también fuente de radiación. Es decir que lo que podemos saber del campo dipolar de radiación solamente nos ha servido como una guía cualitativa inicial para un primer intento de razonamiento.

Ahora estamos en condiciones de un segundo intento mejor orientado, que será definitivo.

Consideremos que en los primeros instantes luego de que en  $t = 0$  se cierra el interruptor, comienza a circular por la fuente cierta intensidad de corriente,  $i$ , que se va extendiendo por los conductores adyacentes de tal manera que en cada instante dado por un valor pequeño de  $t$ ,  $i$  existe en la zona dada por:  $-ct < z < ct$ , como se ilustra en la figura 6.





**FIGURA 6.** Ilustración cualitativa de la situación en un instante  $t$ , suponiendo que el interruptor se ha cerrado en  $t = 0$ . Los campos  $\mathbf{B}$  se ilustran entrantes o salientes de la página, y los campos  $\mathbf{E}$  con líneas en el plano de la misma. En línea de trazos la superficie esférica de radio  $ct$ , a la cual está llegando el frente de ondas con los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . El producto vectorial  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  indica la marcha radial saliente de la onda.

En la figura 6 se ilustra la situación en un instante  $t$ , suponiendo que en  $t = 0$  se ha cerrado el interruptor, y que ningún campo puede haber llegado más allá de  $d = ct$ . Para comenzar un planteo simplificado, se considera una distancia  $d$  relativamente pequeña (mayor que las dimensiones del sistema F-I, pero menor que  $h$ ), y se supone el valor de la corriente aproximadamente constante en el intervalo  $-ct < z < ct$  para esos primeros instantes.

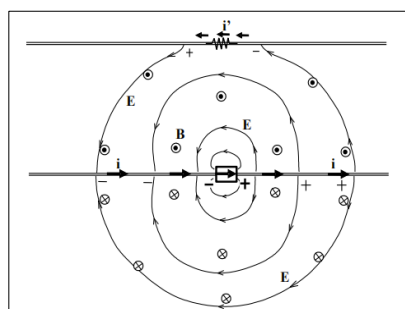
Sin intentar un cálculo formal, podemos hacer la siguiente descripción cualitativa de los campos en esta situación (ver detalles en Apéndice 3). La corriente  $i$  en primera aproximación no está variando en el tiempo en la zona entre  $-ct$  y  $+ct$ : solamente está variando en los extremos de esa zona (es decir en  $z = \pm ct$ ), en donde está pasando de 0 al valor final. En esta aproximación el campo  $\mathbf{B}$  tampoco está variando temporalmente en la vecindad del conductor, y solamente lo está haciendo en la superficie esférica cercana a  $d = ct$ . En esa zona la ecuación (3) ( $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ) da cuenta de que  $\mathbf{E}$  es nulo para  $d > ct$ . En esa superficie esférica (en la cual no hay  $\mathbf{j}$ ) también la ecuación (4) (que se transforma allí en  $\nabla \times \mathbf{B} = (1/c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$ ) da cuenta de que  $\mathbf{E}$  está creciendo (como consecuencia de que está apareciendo donde previamente no existía).

Es decir, como se muestra formalmente en el Apéndice 3, la superficie esférica de radio  $ct$  es un frente de onda que transporta los campos hacia fuera. El hecho de que el campo  $\mathbf{B}$  se mantenga aproximadamente constante en el tiempo en los puntos interiores, da cuenta de que el campo eléctrico que queda allí es aproximadamente irrotacional, como corresponde a casos estáticos.

Por otra parte, en la vecindad del conductor, en la zona  $r < ct$  (siendo  $r$  la coordenada radial de un sistema esférico centrado en la fuente), al no estar variando apreciablemente los campos, la ecuación (4) se transforma en la ley de Ampere y establece la misma relación entre el campo y la corriente que en cualquier circuito de CC.

Toda esta descripción tiene el punto débil de no ser rigurosamente exacta (más detalles en Apéndice 3), pero es razonable pensar que en los primeros instantes, hasta que el valor de  $ct$  alcance algunos metros, por ejemplo, podría constituir una buena aproximación. Es importante saber que el problema de encontrar exactamente campos y corrientes en el caso que estamos tratando: fuente que comienza a alimentar a un único conductor rectilíneo infinito, es enormemente complicado y no trataremos de resolverlo, porque, como veremos enseguida, la presencia del conductor paralelo cercano lo simplifica decisivamente y lo transforma en el problema accesible que estamos presentando.

De manera que ahora agreguemos a la figura anterior el segundo conductor con la lámpara a 1 m de distancia cuando el frente de onda llega a él.

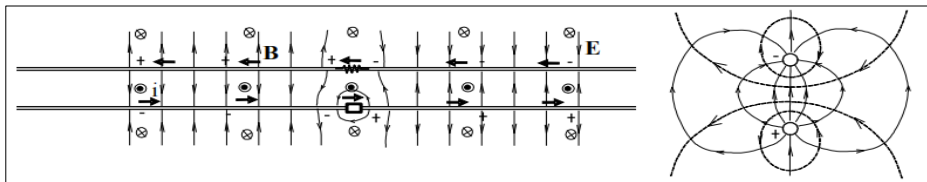


**FIGURA 7.** Los campos llegan al segundo conductor. Impulsan en él la corriente  $i'$  que produce la carga superficial necesaria para que las líneas de  $\mathbf{E}$  terminen y nazcan en ella perpendiculares a la superficie.

Cuando el campo eléctrico alcanza al segundo conductor se deforma para que sus líneas terminen en el mismo. Esto significa que se induce la correspondiente densidad superficial de carga en este conductor, a ambos lados de la lámpara, negativa en el lado derecho, y positiva en el izquierdo. Solamente el conductor de la resistencia  $R$  admite campo eléctrico que puede penetrar en su interior impulsando la corriente  $i'$ . Este campo eléctrico dentro de la resistencia se debe tanto al campo de la onda, como a las cargas de signos opuestos inducidas a su derecha e izquierda. Y todos esos hechos determinan que esta corriente  $i'$  va extendiéndose hacia izquierda y derecha a medida que avanza el frente de ondas desde la fuente.

En principio es razonable considerar que tanto la densidad superficial de carga inducida en este segundo conductor, como la corriente  $i'$  en el mismo, deben ser mucho menores que las correspondientes densidad y corriente en el conductor de la fuente, porque el campo eléctrico del frente de ondas es mucho más débil allí, que sobre el conductor de la fuente. Pero de cualquier manera es claro que la presencia tanto de la carga como de la corriente inducidas en este conductor, tienden a disminuir drásticamente los campos más allá de él, ya que, por ejemplo, gran parte de las líneas de campo eléctrico deben terminar en la carga inducida en vez de continuarse. También el campo magnético se verá en cierta forma imposibilitado de cruzarlo, ya que en la zona más allá de este segundo conductor, él será dominante en este campo.

Por otra parte, esta corriente que se inicia en el segundo conductor es fuente de radiación a su vez, y al cabo del tiempo correspondiente comienza a influir sobre el movimiento de las cargas en el primer conductor. Y a medida que el frente de ondas se aleje varios metros de la fuente, la distancia al segundo conductor resultará relativamente cada vez más pequeña, y todos los valores de campos, corrientes y densidades de carga (salvo signos) tenderán a igualarse entre ambos conductores. Esto se entiende observando los campos en la figura 8.



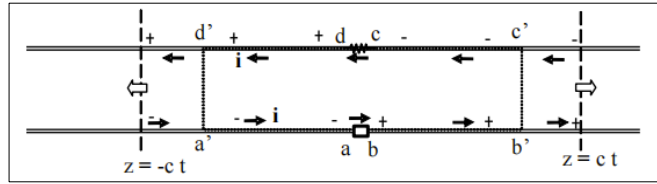
**FIGURA 8.** Izquierda: ilustración de la situación cuando la onda ya ha llegado a muchos metros de la fuente. Derecha: campos (eléctrico: líneas continuas; magnético: línea de trazos) en un plano perpendicular a los conductores en la zona a la derecha de la fuente.

Muy lejos de la fuente en la zona de los conductores, los campos están en planos perpendiculares a los mismos, y como se puede inferir de la figura, todas las líneas de campo eléctrico que nacen (o mueren) en el conductor inferior deben morir (o nacer) en el superior. Eso significa que la densidad lineal de carga en ambos conductores debe ser la misma con signo opuesto; lo cual también puede inferirse de la idea de que entre dos conductores muy largos paralelos muy próximos, la carga de uno debe inducir, por atracción, la misma cantidad de carga opuesta en el otro (esto resulta claro si se piensa, por ejemplo en que, cuando la onda haya avanzado algunos km, se tendrán dos cables que se pueden considerar casi infinitamente largos comparados con su separación, y aún quedan centenares de miles de km para ser llenados de carga y corriente de la misma forma). Eso obliga a que la corriente sea la misma en ambos conductores, y lo que tenemos es algo perfectamente conocido y clasificado en el capítulo de Guías de Onda de cualquier texto de electromagnetismo: tenemos dos ondas *TEM* (de campos eléctrico y magnético transversales) propagándose una hacia la izquierda de la fuente, y otra hacia la derecha, cada una a lo largo de una *guía de ondas* que es una *línea de transmisión* constituida por dos conductores rectilíneos paralelos (Zangwill, 2012; Skilling, 1975).

Ahora bien, la corriente en el conductor inferior comienza antes de que el frente de ondas llegue al otro conductor, con un valor que por lo tanto, no depende de la presencia de este ni de la resistencia  $R$ , y que es influido por los detalles geométricos de la fuente y el interruptor que no se pretende conocer. Es importante entender que antes de cerrar el interruptor hay en los conductores de la región F-I una distribución superficial de carga capaz de generar el campo eléctrico que corresponde a la diferencia de potencial  $V$  de la fuente, y que influye en la corriente inicial en la zona de alguna manera. Pero a medida que la corriente avanza fuera de esa zona, queda descrita razonablemente por el modelo que se ha presentado (más detalles en Apéndice 3).

Por otra parte, la corriente en el conductor superior se inicia en la resistencia con 3 ns de demora. A medida que la onda se aleja por la "línea de transmisión", las interacciones mutuas obligan a la igualación de los valores absolutos de la carga y la corriente en ambos conductores, uniformándose los valores de carga y corriente en ambos.

La relación entre los valores de los elementos intervinientes puede establecerse para un instante  $t$ , integrando el campo eléctrico a lo largo del circuito rectangular indicado por los puntos b b' c' c d d' a' a que se muestran en la figura 9.



**FIGURA 9.** Circuito rectangular  $bb'c'dd'a'a$  (que encierra una zona en la que el campo  $\mathbf{B}$  es constante en el tiempo), para calcular diferencias de potencial.

Es decir, se parte desde el borne positivo de la fuente,  $b$ , hasta cualquier punto  $b'$  del conductor, en  $z_{b'} < ct$ , desde allí, a lo largo de una línea de campo  $\mathbf{E}$  hasta el segundo conductor, en  $c'$ , desde allí pasando por la resistencia hasta  $d'$  en  $z_{d'} = -z_{b'}$ , desde allí hasta el primer conductor en la misma abscisa, y desde allí hasta el borne negativo  $a$ .

De esta manera (considerando el valor de la corriente en el conductor superior ya uniformado e igualado al del conductor inferior:  $i' = i$ ) el circuito no encierra variación del flujo magnético, y (como consecuencia de la ecuación de Maxwell (3)) se tendrá

$$\Phi_a = \Phi_b - \int_{\text{por } z_{b'}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - iR - \int_{\text{por } z_{d'}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

Así es que la diferencia de potencial a los bornes de  $R$  será:

$$\Phi_c - \Phi_d = iR = V - 2 \int_s^{h-s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

donde  $s$  es el radio de cada conductor.

El hecho de que la integral planteada sea mayor que cero muestra que la diferencia de potencial a los bornes de  $R$  será menor que  $V$ , aunque la corriente haya igualado su valor en los dos conductores. Y además esta expresión nos permitirá relacionar el valor de la corriente con el de los campos y las demás variables.

Y habiendo llegado a este punto advertimos que los razonamientos especulativos sobre lo que podía suceder nos han llevado a un terreno en el que estamos en condiciones de plantear cálculos concretos para resolver formalmente el resto del problema.

#### IV. PLANTEO FORMAL FINAL

Lo que hemos descrito es la propagación de dos ondas TEM similares desde el origen (dejando de lado detalles específicos de la fuente), una hacia la izquierda y otra hacia la derecha, en una línea de transmisión constituida por dos conductores paralelos rectilíneos muy largos.

A continuación desarrollaremos para el lado derecho la obtención de todos los detalles de interés aplicando explícitamente las Ecuaciones de Maxwell. Lo que sucede en el lado izquierdo, como hemos visto, para cada variable es igual o simétrico.

Subdividiremos el procedimiento en 4 pasos.

1.- A partir de una situación previa sin cargas ni corrientes, en  $t = 0$  consideramos que se inicia una corriente de cierto valor  $i_0$  hacia la derecha en el conductor inferior, y hacia la izquierda en el superior (según todas las consideraciones que hemos estado analizando el proceso en el conductor superior se inicia con cierta demora, pero rápidamente se llega a la situación que ahora estamos tomando como punto de partida válido).

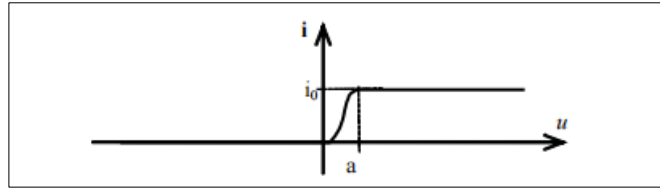
Es importante entender lo que significa el viaje de una onda de corriente: aunque en el conductor superior la corriente es hacia la izquierda, el borde de la zona ocupada con esta corriente viaja hacia la derecha.

Es decir, la corriente como función de  $(z, t)$  estará dada a través de una función  $u(z, t)$  tal que  $i = i(u)$ , siendo:

Región  $z > 0$  (onda viaja hacia la derecha): (7)  
 $u = ct - z$

Región  $z < 0$  (onda viaja hacia la izquierda): (7')  
 $u = ct + z$

Conductor inferior/superior: (7'')  
 $i_{(\text{inf/sup})}(u) = (+/-) i(u)$



**FIGURA 10.** Gráfica de  $i(u)$ : no hay corriente si  $u < 0$  (es decir,  $|z| > ct$ ).

La figura 10 muestra la función  $i(u)$  que corresponde con lo que hemos descrito. El valor de  $a$  es la distancia en la cual la onda pasa desde  $i = 0$  hasta su valor final  $i = i_0$ , según alguna función  $i(u)$  adecuada. Es importante saber que tanto el valor de  $a$  como la forma de la función  $i(u)$  son absolutamente arbitrarios. Es decir, para nuestro problema nos interesa considerar una onda de corriente con la forma de “escalón” mostrada en la figura 10, pero veremos a través de cálculos explícitos que en la línea de transmisión constituida por dos conductores ideales rectilíneos infinitos se puede propagar indefinidamente y sin deformación cualquier onda TEM, independientemente de la forma de la función  $i(u)$ .

2.- La corriente  $i$  en un conductor estrictamente perfecto ideal tiene lugar en forma de distribución superficial de carga viajando. Aunque esa es la situación típica en las guías de onda metálicas, debida a que el campo magnético variable no puede existir en el interior de un conductor ideal, esa precisamente es una condición que podría no tener que aplicarse a nuestro caso, ya que la onda de nuestro caso es una onda “escalón”, cuya variación solamente existe en su frente.

De manera que en la práctica, con conductores tan cercanos a la perfección como se quiera aunque sin alcanzarla estrictamente, la corriente en nuestro caso podría fluir por toda la sección del conductor, modificando un poco esta descripción. Pero dado que no habría diferencias esenciales en lo que a nuestro problema se refiere, nos mantendremos en el caso ideal de conductor totalmente perfecto, en cuyo interior, si inicialmente no hay campo magnético, nunca puede haberlo. Así es que nos mantendremos en la simplificación de la corriente constituida por una distribución superficial de carga viajando.

Además simplificaremos los razonamientos proponiendo una densidad volumétrica que viaja en una capa superficial de espesor  $e$ , pequeño, que luego se hace tender a cero. Para todas las variables que nos interesan lo que vamos a obtener es independiente de  $e$ , y hacerlo tender a cero resulta trivial.

De manera que si los conductores tienen radio  $s$ , y la corriente fluye en una capa de espesor  $e$ , el módulo del vector densidad de corriente,  $\mathbf{j}$ , resulta:

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2\pi s e} \tag{8}$$

Esta expresión es una simplificación razonable porque el diámetro de los conductores es muy pequeño comparado con su separación  $h$ , de manera que consideramos que la simetría axial de la distribución de carga y corriente en la superficie de cada conductor no resulta alterada por la vecindad del otro conductor. Esta es la simplificación habitual con que se trata esta línea de transmisión, y con ella *los campos que se encuentran son superposición de los campos que generaría cada conductor si estuviese solo.*

Aplicamos  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho_q / \partial t$ , siendo  $\rho_q$  la densidad volumétrica de carga, para obtener la densidad superficial de carga  $\sigma = \rho_q e$  (dado que todas las variables dependen de  $(z, t)$  a través de  $u$ , se tiene:  $\partial / \partial t = c \, d / du$ ;  $\partial / \partial z = -d / du$ ):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{di}{du} \frac{1}{2\pi s e} = -\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{9}$$

De manera que (abreviamos  $di/du$ , con  $i'(u)$ ):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{i'(u)}{2\pi s} \tag{9'}$$

Y de aquí, el campo eléctrico superficial  $E_s = \sigma / \epsilon_0$ , resulta:

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = \frac{i'(u)}{2\pi\epsilon_0 s} \quad (9'')$$

O lo que es lo mismo:

$$E_s(z, t) = \frac{i(u)}{2\pi\epsilon_0 s c} = \frac{i(u)}{2\pi s} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (10)$$

De donde podemos concluir que tanto la densidad superficial de carga como el campo eléctrico  $E_s$  que brota de ella en cada lugar, están determinados directamente por la función  $i(u)$ , cualquiera que sea. En nuestro caso son nulos hasta que llega el frente de onda, a partir de ese instante crecen, y luego quedan constantes en los valores alcanzados, correspondientes a  $i(u) = i_0$ , resultando independientes tanto de los valores de  $e$  y de  $a$ , como de la forma en que crece la corriente para llegar a su valor final.

3.- El hecho de que el campo eléctrico sea constante en el tiempo en la zona  $z < ct - a$ , implica, según la Ecuación de Maxwell (4), que el campo magnético esté determinado por la ley de Ampere. Es decir (siempre considerando despreciable el efecto del conductor vecino sobre la simetría axial), el módulo del campo producido por cada conductor a distancia  $\rho$  de su centro será (desde aquí se considera un sistema de coordenadas cilíndricas  $(\rho, z, \varphi)$ ):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi\rho} \quad (11)$$

Y dado que en la zona considerada tanto  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{B}$  son independientes del tiempo, las Ecuaciones de Maxwell indican que ambos son irrotacionales, y por lo tanto son exactamente iguales a los que generaría un conductor rectilíneo infinito con corriente y carga superficiales constantes. De manera que a distancia  $\rho$  de cada conductor el campo eléctrico generado por él vale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i_0}{2\pi\epsilon_0 \rho c} = \frac{i_0}{2\pi\rho} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (10')$$

Ahora bien, las expresiones (10), (10'), y (11), nos animan a sustituir  $i_0$  en (10') y (11), por  $i(u(z,t))$ , para obtener expresiones válidas para todo el espacio y tiempo, es decir antes, durante, y después, del pasaje del frente de ondas:

$$\mathbf{E}_\rho(\rho, z, \varphi, t) = \frac{i(u)}{2\pi\rho} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}; \quad \mathbf{E}_\varphi = 0; \quad \mathbf{E}_z = 0; \quad (10'')$$

$$\mathbf{B}_\rho = 0; \quad \mathbf{B}_\varphi(\rho, z, \varphi, t) = \frac{\mu_0 i(u)}{2\pi\rho}; \quad \mathbf{B}_z = 0; \quad (11')$$

Y las mismas relaciones valen para los campos correspondientes al conductor superior, referidos a coordenadas centradas en la lámpara.

Ahora queda como ejercicio para el lector verificar que estos campos cumplen con las Ecuaciones de Maxwell (3) y (4) en todo el espacio fuera del conductor, independientemente de la función  $i(u)$ . Esto significa que *si se dieran las condiciones para su existencia*, constituirían una onda plana propagándose a lo largo del eje  $z$ , con velocidad  $c$ , manteniendo la forma de las funciones  $E_\rho(\rho, z, t)$  y  $B_\varphi(\rho, z, t)$ , dadas esencialmente por  $i(u)$ .

Una forma en que estos campos pueden existir, es acompañando al conductor con otro paralelo con corriente  $-i(u)$ . En ese caso tenemos una línea de transmisión bifilar, por la que se propaga un modo TEM con los campos que son superposición de los que rodean a cada conductor en estas condiciones.

De manera que, si  $\mathbf{E}_{\text{inf/sup}}$  y  $\mathbf{B}_{\text{inf/sup}}$ , son los campos correspondientes a cada conductor, se tendrá  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inf}} + \mathbf{E}_{\text{sup}}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{inf}} + \mathbf{B}_{\text{sup}}$ , cumpliéndose:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inf}} \perp \mathbf{B}_{\text{inf}}, \quad \mathbf{E}_{\text{sup}} \perp \mathbf{B}_{\text{sup}}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_{\text{inf}} = c \mathbf{B}_{\text{inf}}, \quad \mathbf{E}_{\text{sup}} = c \mathbf{B}_{\text{sup}}, \quad \mathbf{E} = c \mathbf{B}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{S} \end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{S}$  es el vector de Poynting, que apunta en la dirección de propagación de la onda (hacia  $z^+$  en la parte derecha del circuito, y hacia  $z^-$  en la izquierda), e indica su densidad de potencia - y *no es igual* a  $\mathbf{S}_{\text{inf}} + \mathbf{S}_{\text{sup}}$ .

4.- Ahora estamos en condiciones de aplicar la expresión (6) para obtener una relación entre  $i_0$  y  $V$ . La integral en la expresión (6) se puede calcular a lo largo de cualquier línea de campo eléctrico, dado que este es irrotacional. El cálculo se hace fácilmente a lo largo de líneas en el plano de los conductores, y se obtiene:

$$\left| \int_s^{h-s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right| = \frac{i_0}{2\pi\epsilon_0 c} \int_s^{h-s} d\rho \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{h-\rho} \right) \cong \frac{i_0}{\pi\epsilon_0 c} \ln(h/s)$$

Con lo cual (6) se transforma en una relación fundamental para este problema:

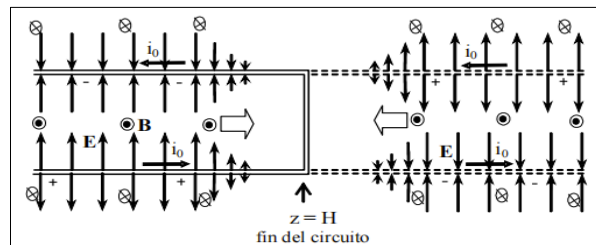
$$V = i_0 R + \frac{2i_0}{\pi\epsilon_0 c} \ln(h/s) \tag{12}$$

Con esta expresión ya es posible calcular  $i_0$ , aunque no es tan importante:

$$i_0 = \frac{V}{R + \frac{2\ln(h/s)}{\pi\epsilon_0 c}} \cong \frac{V}{2\ln(h/s)/\pi\epsilon_0 c}$$

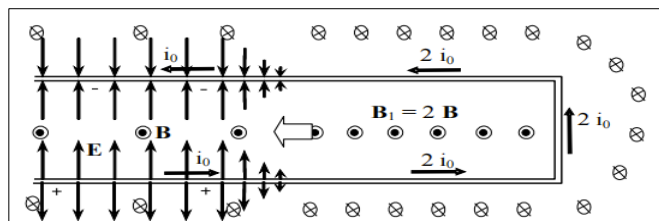
Estas condiciones, que simultáneamente se cumplen de la misma manera en el lado izquierdo del circuito, se mantienen invariables hasta que los frentes de onda se acercan a los extremos del sistema ( $z = \pm H$ ). Allí la onda debe reflejarse anulando el campo  $\mathbf{E}$ , porque de no hacerlo resultaría tangencial a los conductores que cierran el circuito.

La forma más fácil de analizar la reflexión consiste en considerar que en  $z = H$  los conductores continúan como si el circuito no terminara, pero que desde la zona  $z > H$  "viene", en sentido contrario, una onda igual con campo eléctrico opuesto, de manera tal que ambas se encuentran en  $z = H$  (figura 11).



**FIGURA 11.** Ilustración del extremo derecho del circuito poco antes de que el frente de ondas llegue a él. Desde la izquierda avanza la onda que hemos estudiado, y desde la derecha viene a su encuentro una onda virtual de iguales características, que anulará el campo eléctrico en  $z = H$ . Al pasar a la zona de  $z < H$  esta onda virtual constituirá la onda reflejada.

La superposición de las dos ondas comenzará cuando ambas llegan a  $z = H$ . En ese instante el campo eléctrico es nulo solamente allí, y a partir de ese momento la onda reflejada irá anulando, a medida que llega, el campo eléctrico que había previamente en cada lugar. En cambio, en los lugares alcanzados por la reflexión, se duplican la corriente y el campo magnético, y se tiene la situación ilustrada en la figura 12.



**FIGURA 12.** Ilustración del avance de la onda reflejada: anula el campo eléctrico y la carga superficial, y duplica el magnético y la corriente.

Dado que lo mismo habrá sucedido en la mitad izquierda del circuito, en el instante  $t = 2H/c$ , las dos ondas reflejadas se encontrarán en  $z = 0$ . En ese instante la corriente valdrá  $2i_0$  en todo el circuito, el campo magnético tendrá la forma y la intensidad correspondiente a esa corriente, y salvo la inmediata vecindad de la fuente y la lámpara, no habrá ni carga ni campo eléctrico apreciable.

Y las dos ondas reflejadas proseguirán su marcha. Ambas son iguales a las que partieron de  $z = 0$  antes (en  $t = 0$ ). Es posible equivocarse al mirar la figura y pensar que la corriente  $2i_0$  significa que las ondas que debemos considerar ahora son de doble intensidad. Pero no es así: esta corriente doble es la resultante de la superposición de la inicial más la reflejada. Y ahora deberemos considerar esta situación, de doble campo magnético, doble corriente y nulo campo eléctrico, sobre la cual luego de encontrarse en el centro se superpondrán las mismas ondas que consideramos inicialmente.

Ahora la expresión (6) nos indica que al pasar por el centro la onda deberá disminuir levemente el valor de  $i_0$ , que pasará a  $i_1$  según la expresión que contempla el aumento de la diferencia de potencial a través de R:

$$V = (2i_0 + i_1)R + \frac{2i_1}{\pi \epsilon_0 c} \ln(h/s) \quad (12')$$

Así tendremos que cada  $\Delta t = 2H/c$ , las ondas reflejadas se encontrarán en el centro, sumando "un escalón de corriente" y el correspondiente campo magnético cada vez, mientras la carga y el campo eléctrico fluctúan de otra manera (que no es acumulativa).

Esto nos permite decir que en  $t_n = 2nH/c$ , al completarse el n-simo ciclo "centro-extremo-centro", la corriente ha llegado al valor  $i(t_n) = 2i_0 + 2i_1 + \dots + 2i_{n-1}$ , y la expresión (12') se transforma en:

$$V = i(t_n)R + \frac{2i_{n-1}}{\pi \epsilon_0 c} \ln(h/s) \quad (12'')$$

Mientras tanto, en este último ciclo la corriente ha aumentado con una derivada media dada por:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{2i_{n-1}}{2H/c} = \frac{ci_{n-1}}{H}$$

De manera que (12'') puede reescribirse:

$$V = iR + i' \frac{2H}{\pi \epsilon_0 c^2} \ln(h/s) = iR + i' \frac{2H\mu_0}{\pi} \ln(h/s)'$$

donde  $i$  indica el valor  $i(t_n)$ , e  $i'$  indica la derivada media de  $i$  en el último ciclo.

Pero esto completa la resolución del problema, pues esta es la expresión típica del circuito RL:  $V = iR + i'L$ , donde la inductancia está dada por la expresión ya vista (2'):

$$L \cong \frac{2H\mu_0 \ln(h/s)}{\pi}$$

## V. CONCLUSIONES

En la búsqueda de ideas para resolver el problema planteado hemos encontrado la forma en que se inicia la corriente en este circuito, y también hemos accedido en general a una comprensión mejor, no total, pero mejor, de la forma en que se inicia en cualquier circuito típico.

Lo más notable para el circuito del problema ha sido poder visualizar con claridad cómo el valor de la corriente crece escalonadamente a través de sucesivas ondas de corriente. El circuito se muestra claramente como una guía de ondas para los campos.

Es interesante describir con números el proceso encontrado. Podemos decir que: el valor final esperado es  $i_f = 2$  A. El primer escalón tiene un valor  $i_0 \cong 6$  mA. Cada escalón dura 1 s, y hay 330 en el tiempo característico de

crecimiento, de manera que 330 escalones de 6 mA darían un crecimiento igual al valor final, 2 A. Pero solamente los primeros escalones son de aproximadamente 6 mA, y lentamente van disminuyendo ese valor para que al llegar a los 330 s, la intensidad (suma de los 330 escalones) llegue a  $(1-1/e) = 0,63$   $i_f = 1,26$  A. Y así continúa el crecimiento de la corriente que corresponde a estos circuitos, con escalones cada vez más suavizados.

Por otra parte, admitiendo un valor estimativo de la corriente inicial en la fuente  $i_0 \cong 6$  mA, aplicando la expresión (A3.1) se puede estimar fácilmente el valor del campo eléctrico que inicialmente llega a la zona de la lámpara con el frente de onda a los 3 ns de cerrado el interruptor, que resulta del orden de 0,4 V/m - como se ve, muy superior al campo atribuible al dipolo  $(-Q_F, Q_F)$  en condiciones estáticas, estimado en  $2 \times 10^{-4}$  V/m en el Apéndice 1.

En cuanto a la propuesta de Derek, podemos decir que su respuesta es correcta en afirmar que la circulación de corriente en la lámpara *se inicia* a los 3 ns, que es cuando la onda electromagnética llega a ella viajando directamente por el espacio. Pero claramente en ese momento aún no puede decirse que la lámpara se enciende, ya que la corriente solamente se inicia, y aún habría que esperar hasta que el frente de ondas haya recorrido una distancia bastante mayor que la separación entre los conductores, digamos entre 10 y 100 ns, para que alcance los 6 mA que dan el valor del primero de la larga serie de escalones que habrá que esperar para tener la lámpara brillando aceptablemente.

## REFERENCIAS<sup>1</sup>

Jackson, J. D. (1962). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.

Skilling, H. H. (1975). *Los fundamentos de las ondas eléctricas*. Librería del Colegio.

Zangwill, A. (2012). *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press.

---

<sup>1</sup> Se citan 3 posibles fuentes útiles para la lectura de este trabajo, haciendo la salvedad de que los desarrollos que se presentan son básicos, y se pueden apoyar prácticamente en cualquiera de los textos usuales sobre campos electromagnéticos. Para lectores con poco adiestramiento matemático se recomienda Skilling (1975).



## APÉNDICE 1

### Revisando algunas ideas sobre dipolos y sobre el cierre del interruptor.

Es bien sabido que el campo de una carga puntual (que aquí interesa llamar monopolo para unificar el vocabulario) situada en el origen, es radial y de módulo  $E(r)$  dado por la Ley de Coulomb, según la cual la componente radial,  $E_r$  es:

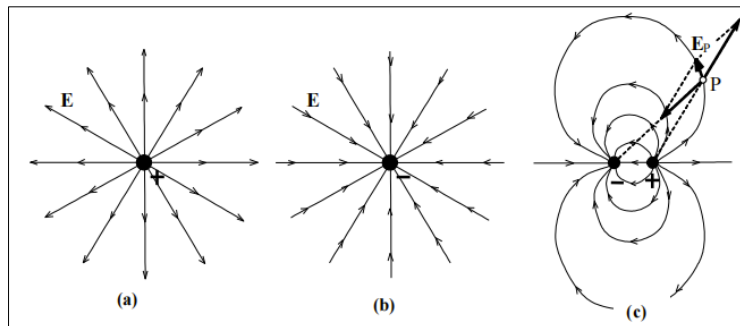
$$E_r = k \frac{q}{r^2}$$

Donde  $q$  es la carga,  $r$  es la coordenada radial, que indica la distancia entre la carga y el punto en que se calcula el campo, y  $k \cong 9,0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ , es la constante de fuerza electrostática.

El campo eléctrico producido por cualquier distribución de cargas, se obtiene en principio superponiendo en cada lugar los campos producidos por todas las cargas existentes, calculado cada uno según esta ley. Pero a veces se facilita la obtención del mismo resultado descomponiendo la distribución de cargas en una superposición de ciertas configuraciones típicas que por alguna razón ofrecen ciertas ventajas. Una de ellas, muy útil para cuando se necesita expresar el campo solamente a gran distancia de la distribución de cargas, es la descomposición *multipolar*: cualquier distribución de cargas puede expresarse como la superposición de configuraciones denominadas, *monopolo*, *dipolo*, *cuadrupolo*, *octupolo*, etc. Y la utilidad fundamental de estos elementos radica en que el campo de cada uno se atenúa más rápidamente con la distancia que el del orden anterior, de manera que solamente es necesario conocer los primeros (a veces basta solamente con el primero) para la aproximación requerida.

Aquí no profundizaremos en este tema más que para aprovechar algunas propiedades de los dipolos. Un dipolo es un sistema formado por dos cargas opuestas de igual valor absoluto, separadas por cierta distancia (en general pequeña comparada con la distancia a la que se quiere calcular el campo).

En la siguiente figura se muestra el esquema de líneas de campo de dos cargas puntuales de signo contrario aisladas, y luego se muestra cómo estos campos se componen para dar un *campo dipolar*, cuando las dos cargas están próximas.



**FIGURA A.1.** Líneas de campo eléctrico **a)** monopolo positivo. **b)** Monopolo negativo. **c)** Dipolo. El campo en cada punto P resulta de la composición de los campos de cada monopolo.

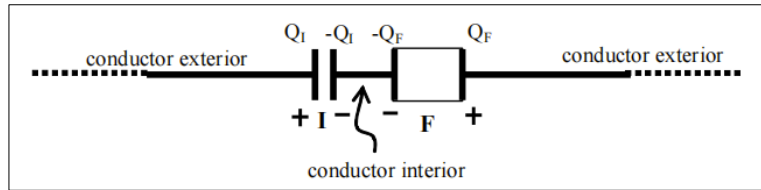
Se deja como ejercicio al lector calcular que si cada carga tiene un valor absoluto  $q = 1 \text{ nC}$ , y la separación entre las dos cargas del dipolo es  $d = 5 \text{ cm}$ , el valor del campo dipolar a  $10 \text{ cm}$  del centro del dipolo,  $E_{\text{dip}1}$ , estaría entre un máximo de  $1024 \text{ V/m}$  sobre el eje horizontal, y un mínimo de  $410 \text{ V/m}$  sobre el eje vertical (con las direcciones que se pueden inferir de la figura).

Y el mismo cálculo a distancia  $d_2 = 1 \text{ m}$  desde el centro, arroja valores de  $E_{\text{dip}2}$  desde  $0,9 \text{ V/m}$ , sobre el eje horizontal, hasta  $0,45 \text{ V/m}$ , sobre el vertical.

Es interesante comparar estos valores con el del campo de una sola de las cargas, que a  $10 \text{ cm}$  sería  $E_1 = 900 \text{ V/m}$ , y a  $1 \text{ m}$  sería  $E_2 = 9 \text{ V/m}$ . Puede verse claramente que mientras el campo de una carga se debilita con el cuadrado de la distancia, el de un dipolo lo hace con el cubo de la misma, lo cual se entiende fácilmente al observar en la figura cómo el campo dipolar, a gran distancia, resulta de la composición de dos vectores casi opuestos.

De manera que si, para hacer una gruesa estimación, planteamos que cada electrodo de nuestro problema es asimilable a un disco metálico de  $1 \text{ cm}$  de radio (todos perpendiculares al eje horizontal, constituyendo cada par un

muy burdo condensador de placas paralelas, como se muestra en la figura A.2), y que la fuente F establece una diferencia de potencial de 10 V entre los dos discos de la derecha (que serían sus electrodos), y por lo tanto también entre los dos discos de la izquierda (que constituirían el interruptor I), podríamos obtener algunos valores numéricos utilizando las fórmulas correspondientes a los condensadores plano paralelos.



**FIGURA A.2.** Electrodo en la zona F-I constituido por placas paralelas perpendiculares al conductor.

Suponiendo la distancia entre los electrodos de la fuente  $d = 5$  cm, obtendríamos:

Capacidad del condensador fuente:  $C_F \approx S/d \approx 5,5 \times 10^{-14}$  F

Carga de cada placa:  $q = V C \approx 55 \times 10^{-14} \text{C} \approx 0,0005$  nC

Campo entre placas:  $E \approx V/d = 200$  V/m

Ignorando, para comenzar, la contribución de los electrodos del interruptor, vemos que es razonable, en el marco de las estimaciones muy burdas que es posible hacer ignorando los detalles geométricos reales, pensar que a los bornes de la fuente puede haber algunos centenares de V/m, mientras que en la zona de la lámpara, a 1 m de distancia el campo puede llegar a lo sumo a  $2 \times 10^{-4}$  V/m. Es decir se divide por un factor  $10^6$ .

Ahora bien, supongamos que el interruptor está alineado como en la figura, entonces produce un campo que, lejos, en la zona de la lámpara, debilita considerablemente al que se debe a la fuente.

Aquí hay un detalle importante que parece trivial, pero no lo es: el interruptor, ¿cómo es, cómo actúa?

Como quiera que sea el interruptor, consiste en dos conductores que están separados, y que para iniciar el proceso deben aproximarse hasta entrar en contacto (no necesariamente deben estar orientados como lo muestra la figura, pero para simplificar lo consideraremos así). Ahora bien, cualquiera que sea su forma, estos dos conductores próximos constituyen un condensador, cuya capacidad aumenta cuando se aproximan. Y con cualquier geometría razonable, al estar suficientemente próximos serán asimilables a un condensador de placas planas paralelas con capacidad  $C_I \approx \epsilon_0 S/d$ , que tenderá a infinito cuando la separación entre los contactos tienda a cero!

Esto complica seriamente las ideas sobre el proceso.

Asumiremos que hay alguna distancia  $d_I$  mínima, a partir de la cual se inicia la descarga eléctrica entre los contactos, sin que la capacidad  $C_I$  alcance valores que compliquen el problema. Pero queda claro que las capacidades  $C_F$  y  $C_I$  pueden ser muy diferentes. En principio, podemos pensar que “justo antes del contacto”, o sea, a la distancia mínima invocada entre los contactos, debe ser  $C_F \ll C_I$ , y por lo tanto,  $Q_F \ll Q_I$ . Debe notarse que este no es un sistema de condensadores en serie, como puede parecer, sino que debe plantearse como que ambos condensadores están en paralelo con la fuente (se deja para el lector mostrarlo).

Así es que  $Q_F$  puede tener el valor que hemos estimado, pero  $Q_I$  debe ser mucho mayor. Y así es que no deberíamos considerar que los contactos del interruptor tienen cualquier separación, y en  $t = 0$  se juntan, porque en ese proceso la carga  $Q_I$  debería aumentar mucho, fluyendo desde el borne positivo de la fuente (o sea recorriendo 1,2 millones de km), y calcular la demora para ello plantearía un problema más complicado que el que tratamos de resolver!

De manera que debemos comenzar el proceso con los contactos del interruptor separados por alguna distancia hipotética levemente superior a la mínima (postulando que la descarga no se va a iniciar en esas condiciones). Esta sería la situación previa al contacto, con dos dipolos enfrentados, uno de los cuales está formado por cargas  $Q_I$  muy superiores a las  $Q_F$  que hemos considerado para la fuente. Pero dado que la capacidad es inversamente proporcional a la separación, ambos dipolos tendrían el mismo valor del producto  $Q \times d$  (que se denomina *momento dipolar*). Y resulta que el momento dipolar y no la carga, es lo que determina el campo a gran distancia (como se puede encontrar en cualquier texto además de Zangwill (2012); y como ejercicio el lector puede verificar que los campos calculados antes a 1 m de distancia para dos cargas  $\pm 1$  nC separadas por 5 cm, tienen casi exactamente los mismos valores que para cargas  $\pm 5$  nC, separadas por 1 cm).

La conclusión final es que a 1 m de distancia, el campo que hemos calculado para el dipolo fuente,  $10^{-6}$  veces el existente en la zona F-I, es aún más debilitado (al menos un orden de magnitud) por el dipolo interruptor, y eso completa las afirmaciones sobre la inexistencia de cargas y campos apreciables en la zona de la lámpara antes de  $t = 0$ .

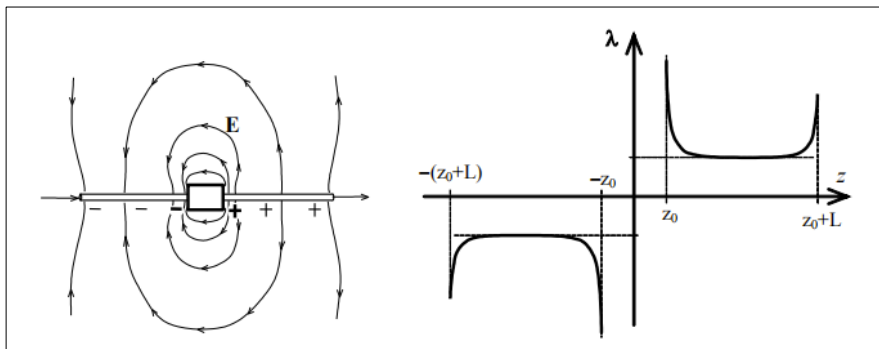
## APÉNDICE 2

### El problema de dos conductores rectilíneos alineados conectados a una fuente con diferencia de potencial $V$ .

Encontrar la distribución de carga, campo, etc., en un sistema como el de la figura 5.c: dos conductores rectilíneos de longitud  $L$ , conectados a una diferencia de potencial  $V$  de manera de quedar alineados sobre la misma recta, es extremadamente difícil. Pero es posible hacer un tratamiento aproximado que desarrollaremos aquí, capaz de dar un buen panorama de la situación.

La idea básica consiste en reemplazar cada conductor por una línea de cargas iguales, inicialmente equidistantes, positivas en un conductor, y negativas en el otro. Luego se calcula la fuerza eléctrica resultante sobre cada carga debida a todas las otras, y a continuación se permite que las cargas se reacomoden desplazándose cada una una pequeña distancia, proporcional a la fuerza sobre ella y en la misma dirección y sentido – manteniendo fijas solamente a las cargas en los extremos de cada conductor.

Repitiendo iterativamente este procedimiento, se va tendiendo a una ubicación final que anula la fuerza eléctrica sobre todas las cargas excepto sobre las de los extremos. Se encuentra que la distribución final de carga consiste en una densidad lineal que se mantiene aproximadamente constante en toda la zona central de cada conductor, aumentando mucho en la cercanía de ambos extremos. Muy similar a la distribución de carga en un conductor rectilíneo único con la misma longitud y cantidad de carga.



**FIGURA A1.** Izq.: se repite la figura 5.c, mostrando el campo eléctrico del sistema de dos conductores de longitud  $L$ , conectados a la fuente de diferencia de potencial  $V$ , alineados sobre el eje  $z$ . Der.: representación gráfica de la densidad lineal de carga  $\lambda(z)$  correspondiente.

Una conclusión importante que se obtiene con este procedimiento es que la fuerza sobre las cargas de los extremos exteriores siempre es hacia el exterior, independientemente de la longitud  $L$  de los conductores, indicando así que si  $L$  es infinito no habrá límite para la distancia a la cual llega la carga.

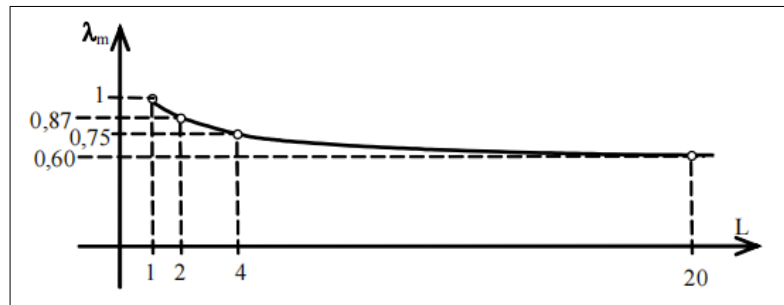
El punto débil del procedimiento es que al ser una distribución lineal de carga, no se puede determinar el potencial. Y además, si se intenta aumentar el número de cargas disminuyendo el valor de cada una, manteniendo constante la densidad, el campo en los extremos (fuerza sobre las cargas de los extremos por unidad de carga), diverge cuando  $q > 0$  (como corresponde a una distribución lineal).

Esto se soluciona fijando un radio (pequeño) para el conductor, y distribuyendo cargas puntuales sobre su superficie. Inicialmente las cargas se distribuyen uniformemente, eligiendo algún número fijo de ellas,  $N$ , en cada anillo/rodaja de conductor de grosor igual a la separación de las cargas en el contorno de la rodaja.

Luego en cada iteración se modifica solamente la posición de cada anillo, permitiéndole desplazarse cierta pequeña distancia a sus  $N$  cargas en conjunto bajo la acción de la fuerza resultante sobre ellas. Se modifica así la distancia entre estos anillos de carga, aunque no la distancia entre las  $N$  cargas de cada anillo. Esto no es totalmente correcto, pero simplifica mucho los cálculos y no influye apreciablemente en los resultados.

Con este procedimiento el potencial se calcula fácilmente sobre el eje del conductor, lo cual es una buena aproximación si su radio es pequeño. Y así, además de recuperarse los resultados enunciados para la distribución lineal de carga, se encuentra empíricamente cierta relación entre la diferencia de potencial  $V$ , y la densidad de carga (lineal o superficial).

De este modo, para valores fijos de diferencia de potencial ( $V$ ), y separación entre los extremos interiores ( $2z_0$ ), se encuentran los valores de densidad media de carga en función de  $L$  mostrados en la siguiente figura.



**FIGURA A2.** gráfica de la densidad lineal media de carga ( $\lambda_m$ ) en función de la longitud  $L$  de los conductores conectados a la fuente en nuestro planteo (ambos ejes en unidades arbitrarias).

### El caso en que uno de los conductores está interrumpido

Para este caso en que el borne negativo de la fuente está directamente conectado a un interruptor abierto muy próximo, se tiene que en esta zona falta cierta cantidad  $Q$  de carga que la fuente es capaz de transportar al lado positivo, limitada por la pequeña capacidad electrostática del sistema.

Ahora el mismo procedimiento antes descrito se plantea colocando una carga puntual  $-Q$  en un punto del borne negativo, y la misma cantidad distribuida en  $N$  cargas  $q = Q/N$  a lo largo del conductor rectilíneo del lado positivo, con una separación uniforme cualquiera entre ellas. Luego, con el mismo procedimiento iterativo se permite la acomodación de estas cargas  $q$  hasta anular las fuerzas sobre todas ellas excepto sobre la del extremo fijo en el borne positivo.

Lo que se encuentra cuando se acomodan las cargas es que finalmente se distribuyen con una densidad inversamente proporcional a la distancia a la fuente (en el límite  $N \rightarrow \infty$ , es decir,  $q \rightarrow 0$ , la última carga se alejaría infinitamente sin llegar a un punto de fuerza exactamente nula).

En la práctica todo esto significa que la densidad de carga es apreciable solamente en la zona cercana.

## APÉNDICE 3

## Algunos detalles de la expansión esférica de la onda inicial

Si se considera la situación mostrada en la figura 6, correspondiente a los instantes iniciales luego de que en  $t = 0$  comience a circular la corriente por la fuente alimentando los conductores rectilíneos alineados con el eje  $z$ , es posible, ignorando los detalles de la zona F-I, encontrar expresiones aproximadas sencillas para los campos.

Para ello se comienza planteando una corriente  $i = i(u)$  como la mostrada en la figura 10, de acuerdo con las expresiones (7), y (7'). En estas condiciones, refiriendo a un sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  centrado en la fuente, con  $z$  como eje polar, se propone campo eléctrico y magnético con líneas como los meridianos y paralelos respectivamente en cada superficie esférica de  $r = \text{cte}$ , según las expresiones siguientes, válidas para  $r$  suficientemente mayor que las dimensiones de la fuente (en el exterior del conductor):

$$E_r = 0; \quad E_\theta = i(u^*) / (2\pi r \epsilon_0 \text{sen}\theta); \quad E_\varphi = 0; \quad (A3.1)$$

$$B_r = 0; \quad B_\theta = 0; \quad B_\varphi = \mu_0 i(u^*) / (2\pi r \text{sen}\theta); \quad (A3.1')$$

Expresiones en las que  $i(u^*)$  se establece para cada punto de la región sustituyendo en (7)  $u$  por  $u^* = ct - r$ . Puede verificarse fácilmente que (recordar que es para el exterior del conductor)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\varphi} \frac{i'(u^*)}{2\pi r c \epsilon_0 \text{sen}\theta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (A3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\theta} \frac{\mu_0 i'(u^*)}{2\pi r \text{sen}\theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (A3.2')$$

Esto muestra que estos campos cumplen las ecuaciones de Maxwell en la región considerada. En cada instante  $t$  esta región se subdivide naturalmente en tres partes:

1) Fuera de la fuente y el conductor, y dentro de la esfera de radio  $r = ct - a$  (es decir donde corresponde  $i(u^*) = i_0 = \text{cte}$ ).

En esta región se tiene  $i'(u^*) = 0$ , de manera que los campos son constantes en el tiempo, y no tienen ni divergencia ni rotor. Esto significa, con los valores propuestos, correspondientes a las condiciones de contorno en la superficie del conductor (ver más adelante), que el campo magnético es el que corresponde a un conductor infinito con corriente  $i_0$ , y que el campo eléctrico es el que nace de la densidad de carga en la superficie del conductor.

2) Fuera de la esfera de radio  $r = ct$ .

En ella  $u^* < 0$ , y tanto  $i$  como  $i'$ , y con ellas todos los campos, son nulos. Claramente es la zona a la cual la onda aún no ha llegado.

3) Fuera del conductor, en la cáscara esférica  $ct - a < r < ct$ .

Esta es la zona en la cual  $i'$  no es nula, y en la que por lo tanto se cumplen las relaciones (A3.2) entre los campos y sus variaciones en el tiempo. Claramente esta cáscara esférica viaja radialmente con velocidad  $c$ . Dentro de ella los campos viajan manteniendo entre ellos las relaciones que corresponden a cualquier onda electromagnética plana:

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}; \quad E = cB; \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{S}$$

Veamos ahora las condiciones de contorno en la superficie del conductor, es decir en la capa de espesor  $e \rightarrow 0$ , en  $\rho = r \text{sen}\theta = s$ .

Consideremos que el radio del conductor,  $s$ , es suficientemente pequeño como para que  $\theta$  sea despreciable, y puedan identificarse (los versores)  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{z}$ . Luego comencemos situándonos en la zona  $r < ct - a$ , en la cual  $i = i_0 = \text{cte}$ , por lo cual nada depende del tiempo. Pero ahora  $\mathbf{B}$  ya no es nulo, puesto que  $\mathbf{B}$  desaparece en el espesor  $e$ : pasa de  $B_\varphi = B_s = \mu_0 i_0 / (2\pi s)$ , en  $\hat{\theta} = s$ , a 0 en  $\rho = s - e$ . Esta desaparición de  $\mathbf{B}$  da un rotor con dirección  $\mathbf{z}$ , de valor  $B_s/e$ .

Es decir, se tiene aquí:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{z} \mu_0 i_0 / (2\pi s e) = \mu_0 \mathbf{j}$ ; es decir nuevamente el cumplimiento de la ecuación de Maxwell (4), aquí en su componente  $\mathbf{z}$ , con  $\partial E_z / \partial t = 0$ .

Por otra parte, también en esta zona nace el campo eléctrico, a partir de una densidad superficial de carga:  $\sigma = \epsilon_0 E_s = i_0 / (2\pi s c)$ . Dividiendo esta expresión por  $e$  tenemos una densidad volumétrica  $\rho_q = \sigma / e = i_0 / (2\pi s c e) = j / c^2$ .

Y ahora, finalmente, podemos extender estas ideas a toda la longitud del conductor, es decir, si incluimos la zona del frente de ondas:  $ct - a < r < ct$  (la zona  $r > ct$  es trivial), en ella tiene lugar la superposición de lo que corresponde por ser frente de onda: componente del rotor de  $\mathbf{B}$  en la dirección  $\boldsymbol{\vartheta}$ , y de  $\mathbf{E}$  en dirección  $\boldsymbol{\varphi}$ , según las relaciones (A3.2), con lo que corresponde por ser la capa superficial del conductor: agrega componente del rotor de  $\mathbf{B}$  en la dirección  $\mathbf{z}$ , más la divergencia de  $\mathbf{E}$ , etc.

Ahora bien, todo esto tiene un problema: no es totalmente exacto. Hemos hecho la aproximación de que el conductor es suficientemente delgado como para identificar la dirección  $\mathbf{z}$  con la  $\mathbf{r}$  sobre su superficie. Es una aproximación muy buena para  $r \gg s$ , que es la zona que nos interesa, pero, por ejemplo, el campo  $\mathbf{E}$  tiene dirección  $\boldsymbol{\vartheta}$ , y por lo tanto  $E_s$  no es estrictamente perpendicular a la superficie: tiene una pequeñísima componente según  $\mathbf{z}$ .

Los campos propuestos serían estrictamente correctos si la superficie de cada conductor fuera un cono según  $\theta$  constante. Este ángulo podría ser muy pequeño, y eso sugiere que toda la aproximación planteada puede funcionar bien. Como ya se dijo, es importante tener en cuenta, que en la zona cercana a la fuente ya existen antes del cierre del interruptor, distribuciones de carga que son fuente de campos que estamos ignorando porque no afectan a la zona que nos interesa. Estos campos se superponen a los que hemos propuesto aquí, y tienen alguna influencia sobre el valor con que se inicia la corriente, que es independiente de la existencia del conductor superior con la lámpara. Y lo importante para nuestro caso es que cuando el frente de onda alcanza al segundo conductor, este comienza a interferir sobre la propagación de los campos, y rápidamente transforma este problema en el problema mucho más accesible que hemos podido resolver en este trabajo.

<sup>2</sup> Esta relación,  $j = \rho_q c$ , que se cumple en la capa superficial de todas las guías de onda metálicas cuando conducen un modo TEM, parece sugerir que los portadores de carga se mueven con la velocidad  $c$  de la onda, pero no es así. La velocidad de la onda electromagnética,  $c$  en estos casos TEM, debe ser igual a la velocidad de la onda de carga superficial, pero ello puede lograrse con portadores mucho más lentos, dependiendo de la densidad de portadores de carga de cada signo que hay en el conductor.