

Los agujeros negros y el congelamiento del tiempo

Black holes and the freezing of time

Lorenzo M. Iparraquirre  ^{1*}

¹ Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende y Haya de la Torre. Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

*E-mail: lorenzo.iparraquirre@unc.edu.ar

Recibido el 19 de agosto de 2021 | Aceptado 11 de abril de 2022

Resumen

En este trabajo se exploran algunos aspectos muy curiosos y poco divulgados de la hipotética caída radial de una partícula material en uno de estos objetos, poniéndolos al alcance de profesores de Física con los conocimientos elementales de Relatividad Especial correspondientes su formación estándar. Para ello se presentan los conceptos necesarios, se muestra cómo operar y razonar con ellos, y se ejemplifica con unos cálculos básicos que permiten anclar los conceptos en objetos concretos.

Palabras clave: Relatividad; Agujero negro; Geodésicas; Gravitación; Espacio-tiempo curvo.

Abstract

In this work some very curious and little divulgated aspects of the hypothetical radial fall of a material particle in one of these objects are examined, making them available to Physics teachers with the elementary knowledge of Especial Relativity corresponding to their standard training. For this the necessary concepts are presented, it is shown how to operate and reason with them, and it is exemplified with some basic calculations that allow the concepts to be anchored in concrete objects.

Keywords: Relativity; Black hole; Geodesic; Gravitation; Curved space-time.

I. INTRODUCCIÓN

Un agujero negro (en adelante AN) se produce cuando una cierta cantidad de materia se concentra en una región suficientemente pequeña como para que el campo gravitatorio sea tan intenso que la luz no pueda escapar del mismo.

Esta descripción, que habría sido poco menos que incomprensible hace no muchos años, ha llegado a ser moneda corriente en todos los programas de divulgación actuales. Estos artefactos se presentan como voraces devoradores de cuanto cuerpo celeste se interponga en su camino.

La explicación de estos fenómenos pertenece a la Teoría de la Relatividad General (en adelante RG), que es la que determina cómo la presencia de la materia condiciona las propiedades del espacio-tiempo a través de las cuales se manifiesta la gravitación.

Esa teoría excede mucho la formación de los profesores de Física, la cual en general alcanza hasta el manejo de los elementos básicos de la Relatividad Especial (en adelante RE).

De manera que los profesores de Física, prácticamente están, frente a los AN, en las mismas condiciones que el público en general. Todos entienden que son entes extremadamente masivos generadores de una increíble fuerza de atracción gravitatoria, la cual según las creencias más difundidas es capaz de hacer que inevitablemente caiga en ellos cualquier cuerpo que pase más o menos cerca, luego de lo cual nunca podrá salir, y tal vez encuentre algún fantástico destino en algún universo o dimensión desconocida.

Sin embargo un profesor de Física debería tener bien en claro que un AN no puede devorar a un cuerpo con suficiente momento angular orbital, es decir, que es posible estar en órbita alrededor de estos objetos. Que si el Sol fuera mágicamente comprimido hasta ocupar un volumen suficientemente reducido como para transformarse en un AN, el único cambio en la Tierra sería la falta de su luz y calor, pero todo el Sistema Solar podría continuar orbitando a su alrededor miles de millones de años sin absolutamente ninguna diferencia con la situación actual en lo que a la dinámica se refiere.

Prácticamente los únicos objetos que pueden ser devorados directamente por el AN son los que caen radialmente hacia él, con muy poco o ningún momento angular orbital. Pero el simple proceso de caer radialmente hacia el agujero negro tiene aspectos increíblemente curiosos, y es de ellos de los que vamos a ocuparnos aquí. Se verá que esto es muy interesante para los profesores, y también ayuda a la comprensión de elementos de la RE.

II. OBJETIVOS Y DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO

No intentaremos aquí aprender el formalismo de la RG, ni pasar revista a todas las posibilidades de los AN. Sobreentenderemos (aunque haremos aportes sobre el tema) que se puede estar tan tranquilamente en órbita alrededor de un AN, como alrededor de cualquier cuerpo “normal” de la misma masa (solamente en casos de extrema proximidad aparecen diferencias sustanciales, que no interesan aquí).

Sí trataremos de explorar los aspectos increíblemente curiosos de una caída exactamente radial hacia un AN del tipo más simple posible, estático y sin momento angular a su vez, conocido con AN de Schwarzschild (en reconocimiento a quien primero escribió algunas ecuaciones fundamentales del mismo en 1915/16).

Para ello presentaremos y revisaremos algunas nociones asociadas con los AN de Schwarzschild, con especial énfasis en la interpretación de sus coordenadas en el exterior.

Para apoyar las conclusiones recurriremos a desarrollar numéricamente un ejemplo en el que la masa del AN es la del Sol, y la distancia considerada de caída hacia él es del orden del radio de la órbita terrestre, porque aunque todos los hechos curiosos que se quiere presentar podrían verse directamente en las ecuaciones, solamente adquieren ribetes impresionantes al pensar en un ejemplo numérico concreto. En los apéndices se completarán cálculos interesantes.

III. CAMPO GRAVITATORIO Y ESPACIO-TIEMPO CURVADO POR LA MATERIA

La ley de gravitación universal expresa las fuerzas mutuas entre dos cuerpos cualesquiera de masas m_1 , y m_2 , cuyos centros de masa están separados por una distancia d , a través de la conocida expresión:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2} \quad (1)$$

En donde F es el módulo de las dos fuerzas, que son mutuas, atractivas y orientadas en la exacta dirección entre los centros de masa de los cuerpos, y $G \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, es la constante de gravitación universal

Ahora nos interesa comenzar pensando en términos clásicos el caso de un cuerpo esférico de masa M situado inmóvil en el origen de un sistema inercial de referencia, cuyo campo gravitatorio se estudia con ayuda de una partícula móvil de masa m despreciable. Con la masa despreciable de esta *partícula exploradora* se logra que su propio campo gravitatorio no altere el campo en estudio, y que la fuerza aplicada al cuerpo central no afecte su estado de reposo en el origen.

Los posibles movimientos de la partícula exploradora en el campo gravitatorio central son las conocidas trayectorias cónicas predichas por las leyes de Kepler/Newton. Estos movimientos son explicados por la teoría clásica en función de la fuerza gravitatoria dada por la expresión (1), la cual, por unidad de masa de la partícula móvil define el vector campo gravitatorio.

Pero en la RG estos movimientos se explican de una manera radicalmente distinta: se reserva el concepto de fuerza para todas las fuerzas de la teoría clásica excepto las de origen gravitatorio. De manera que en RG nuestra partícula de prueba estrictamente se considera libre de fuerzas, y sus movimientos posibles se explican a través de la geometría que adopta el espacio-tiempo (en adelante E-T) en presencia del cuerpo de masa M .

En RG se considera, en efecto, que el E-T tiene cierta estructura geométrica condicionada por la presencia de la materia, cuyo movimiento a su vez es condicionado por dicha geometría. Para tener una primera idea introductoria de lo que esto significa es bueno pensar en lo más simple: el *movimiento de partículas libres de fuerza*.

Los movimientos posibles de las partículas libres de fuerzas en la teoría clásica (en la cual libres de fuerzas significa libres de la acción gravitatoria, y además de todas las otras), son los movimientos uniformes a lo largo de trayectorias rectilíneas (*Principio de Inercia*).

Pero debido a que la presencia de materia está inexorablemente unida a efectos gravitatorios, de manera que *no existen las partículas libres de influencias gravitatorias*, en la RG se decide no tratar a la gravitación como a las demás fuerzas, sino considerarla como un condicionante de la estructura del E-T. Y se reserva el nombre de *fuerza* a las acciones mecánicas que derivan de interacciones de otro tipo. Es decir, para evitar confusiones, libres de fuerza, en RG, significa libre de todas las acciones que en la teoría clásica se consideran no gravitatorias, pero no libres de acciones gravitatorias.

De manera que el movimiento de las partículas *libres de fuerza en RG*, está condicionado por la gravitación existente, cuya influencia determinará que tenga lugar según ciertas líneas llamadas *geodésicas* del E-T, y no según líneas rectas recorridas uniformemente. Esto lleva a desarrollos muy complejos que no interesan en este trabajo, pero se puede lograr la comprensión necesaria de las nociones elementales a través del caso simple e ilustrativo de una superficie esférica, como se presenta a continuación.

A. Espacios curvados, geodésicas y geometrías no euclidianas

Si hubiera seres viviendo en un mundo bidimensional, y este fuera un plano, en él podría haber coordenadas cartesianas x_1 y x_2 , y el Principio de Inercia diría que las partículas libres de fuerza se mueven uniformemente en líneas rectas, dadas por funciones lineales $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Pero para seres viviendo en una superficie esférica no habría coordenadas cartesianas, y el Principio de Inercia diría que las partículas libres de fuerza deben moverse uniformemente en trayectorias que no se desvíen hacia algún lado, las cuales serían los círculos máximos de este mundo esférico. Éstos serían el equivalente a las líneas rectas del mundo plano, y estarían dados por ciertas ecuaciones correspondientes. En general se llama *geodésicas* a estas líneas, equivalentes en sus características a las líneas rectas de los mundos planos; considerándose planos los espacios en los que vale la geometría euclidiana.

Porque en esta superficie esférica lo que fallaría, esencialmente, es la geometría euclidiana. En efecto, no podría haber coordenadas cartesianas, porque cualquier intento de trazar en la vecindad de una línea "recta" (supongamos que llamamos así a las geodésicas/círculos máximos), otra recta paralela, fracasa, ya que estas líneas irremediablemente se cortan cuando se prolongan suficientemente. Y en general se encontraría que fallan muchas otras cosas de la geometría euclidiana: la suma de los ángulos interiores de un triángulo no daría 180° , el cociente entre la longitud de una circunferencia y la distancia al centro no daría 2π , etc.

Y si el radio de curvatura tiende a infinito, la superficie esférica se aplanará, y se cumple en ella toda la geometría habitual, euclidiana.

Ahora bien, es fácil entender la noción de curvatura de una superficie esférica, ente de dos dimensiones, visualizándola contenida en el espacio de tres dimensiones. Pero a partir de las relaciones que se cumplen entre los elementos geométricos contenidos dentro de la misma superficie, es posible calcular su curvatura intrínsecamente, sin salir de sus dos dimensiones.

Aunque es más difícil de imaginar, es posible definir la curvatura (y el radio de curvatura, y otros elementos asociados con la curvatura) del espacio tridimensional (o de cualquier número de dimensiones), sin necesidad de imaginarlo contenido en un espacio de más dimensiones. Cuando se cumple la geometría euclidiana se dice que el espacio es plano, con curvatura nula.

Y resulta que la geometría euclidiana, que en la teoría clásica se presupone como la única posible, en RG solamente corresponde al caso particular del E-T vacío, sin cuerpos materiales. Allí las geodésicas son líneas rectas recorridas uniformemente. Una partícula sobre la que nadie actúe, seguiría una de estas trayectorias.

Pero en cambio, ejemplificando con un típico proyectil ideal de la enseñanza escolar, este sigue cierta trayectoria curva aunque nadie actúe sobre él. La mecánica clásica dice que aunque no se ve fuerza alguna actuando, está actuando la gravedad terrestre, y le atribuye una fuerza correspondiente. La RG dice que no se ve fuerza actuando porque no la hay, ya que la gravedad no se considera fuerza, y que la línea curva que sigue el proyectil es una geodésica del E-T, el cual tiene cierta geometría condicionada por la gravedad.

B. Espacio curvado por una masa central

Comencemos con los aspectos geométricos simples de nuestro sistema en estudio: un cuerpo de masa M en el origen (de lo que sería clásicamente un referencial inercial). En principio es fácil ver que la simetría esférica corresponde tanto al tratamiento clásico como relativista de este caso. De manera que utilizaremos las coordenadas esféricas

habituales: r, θ, φ , donde las coordenadas angulares deben tener absolutamente el mismo significado y tratamiento que en el caso clásico².

Por otra parte, las líneas del espacio que conservan θ y φ constantes deben ser líneas rectas radiales, iguales en ambas teorías. Pero no así la longitud entre dos puntos de una de estas líneas: la distancia entre A y B, situados sobre la misma línea radial, puede no ser igual al valor absoluto de la diferencia $r_A - r_B$.

Es decir, en la RG se encuentra que se podría definir la coordenada radial r como el valor de la distancia al centro, pero en ese caso la longitud de una circunferencia de radio r centrada en el origen no valdría $2\pi r$. Y si se opta por definir el valor de la coordenada r a través de la longitud de la circunferencia recién mencionada, por la expresión $r = (\text{longitud circunferencia}) / 2\pi$, entonces ella no indicará la distancia al centro. Esto es una de las manifestaciones del hecho de que según la RG, en presencia de la masa M el espacio debe ser curvo, no puede ser plano.

Vale aclarar que la definición: $r = \text{longitud}/2\pi$ para una circunferencia centrada en el origen, es la que utilizaremos en este trabajo. Y con esta definición de la coordenada radial, por medio de cálculos que no interesan aquí, la RG demuestra que, si denominamos ρ a la distancia radial, ella está dada por la siguiente expresión (siendo c la velocidad de la luz):

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \quad (2)$$

La cantidad $2GM/c^2$ tiene unidades de distancia, y se define con ella el llamado *radio gravitatorio*, r_g :

$$r_g = 2GM/c^2 \quad (3)$$

Con esta definición la expresión (2) se transforma en:

$$d\rho = dr / \sqrt{1 - r_g/r} \quad (2')$$

Es fácil advertir que la expresión (2') solamente funciona para $r > r_g$. Y en este trabajo nos conformaremos con analizar lo que sucede sólo en esa región del universo.

Por otra parte, r_g tiene una interpretación interesante. Recordemos el concepto de velocidad de escape de un planeta, y lo apliquemos al cuerpo de masa M y radio R en un cálculo totalmente clásico. La energía cinética necesaria de una partícula en la superficie del cuerpo, para que pueda escapar de su atracción gravitatoria, debe igualar a la variación de la energía potencial, por lo que la velocidad de escape, v_e , debe tener el valor:

$$v_e^2 = 2GM/R \quad (4)$$

Comparando con la expresión (3) se ve que r_g es el radio que debería tener el cuerpo de masa M para que la velocidad de escape desde su superficie fuera la de la luz, según un cálculo totalmente clásico (sorprendentemente esta expresión también es válida en la RG). Esto sugiere que r_g es un valor muy pequeño para la cantidad de masa M , mucho más pequeño que el radio de cualquier planeta, astro, o cuerpo celeste "normal" que tenga esa masa.

Por ejemplo para un cuerpo como nuestro planeta, $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg, y $r_g \cong 9$ mm. Para el Sol, algo más grande, $M_S \cong 2 \times 10^{30}$ kg, $r_g \cong 2964$ m. Durante cierto tiempo, hasta que se entendieron bien algunas consecuencias de las ecuaciones, se consideró que era imposible que algún proceso físico comprimiera la cantidad de masa M en un radio tan pequeño como r_g . Ahora este radio es un parámetro básico de los AN, que consisten en materia encerrada precisamente en el interior de esta pequeña región.

Se denomina *horizonte* del agujero negro a la superficie esférica de radio r_g , la cual separa el interior del exterior. En el exterior, $r > r_g$, ocurren las cosas que vamos a examinar en este trabajo.

Vemos que si estamos muy lejos del cuerpo central ($r \gg r_g$), según la expresión (2') tendremos que $d\rho \cong dr$, y podremos describir con tranquilidad nuestra vecindad en el espacio con la habitual geometría euclidiana.

² Para un punto P respecto de un origen O, θ es el ángulo polar, que indica, desde 0 hasta π , el ángulo que forma OP con un eje elegido como eje polar. φ es el ángulo azimutal, que indica desde 0 hasta 2π , el ángulo que forma el plano determinado por P y el eje polar, con un plano de referencia que contiene al eje polar.

Pero en la cercanía del horizonte la situación cambia radicalmente. El espacio está muy “curvado”, y no funciona la geometría habitual. El espacio está comprimido en la dirección radial, y se comprime infinitamente justo en el radio gravitatorio. Aunque no es de interés especial aquí, puede verse que la expresión (2') es integrable. El integrando diverge en r_g , pero la divergencia es débil, y es posible calcular fácilmente la distancia entre dos valores dados de r (ver ejemplos en Apéndice 1).

C. El tiempo curvado por la masa central

No solamente el espacio está curvado en la vecindad de r_g . Ya sabemos por la RE que el ritmo de transcurso del tiempo depende de la velocidad de cada observador, pero ahora, además, el tiempo transcurre a distinto ritmo en diferentes valores de r (o sea, es influido por la mayor o menor proximidad de M).

La concepción clásica del tiempo es la del tiempo absoluto, la cual sobreentiende que hay o habría alguna manera de conocer instantáneamente lo que ocurre en otros lugares. Ahora es necesario desprenderse de estas nociones, y manejar con mucho más cuidado el tema del tiempo, completando la noción de que el E-T en conjunto está curvado.

Para comenzar de la manera más simple, digamos que es posible atribuir a cada punto del espacio, especificado por los valores de r , θ , y φ , un valor de “coordenada temporal”, t , que va aumentando continuamente mientras transcurre el tiempo, como se muestra en la siguiente representación gráfica elemental, limitada a la coordenada radial (figura 1).

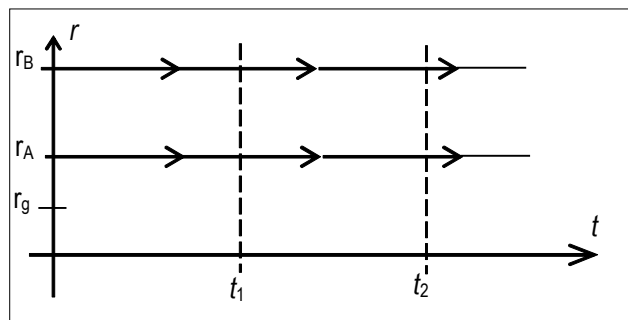


FIGURA 1. Evolución en el tiempo de dos observadores situados en reposo en r_A , y r_B . En la jerga relativista es costumbre colocar el tiempo en el eje de ordenadas; pero en este trabajo nos mantendremos en la usanza típica de la física clásica: tiempo en abscisas.

Si consideramos dos observadores en reposo, A , y B , la representación gráfica en la figura 2 muestra con las correspondientes rectas horizontales, que cada uno conserva el valor de su ordenada, r , para todos los sucesivos valores de t (es decir: cada uno está en reposo), mientras la intersección de estas rectas horizontales con cualquier recta vertical indica el mismo valor, por ejemplo t_1 , o por ejemplo t_2 , para ambos observadores (habría gráficas similares para cada una de las coordenadas angulares, que no interesa mostrar porque consideraremos solamente movimientos radiales, con valores constantes de θ y de φ).

Ahora la situación no es tan simple como en la física clásica: la noción de que el tiempo puede fluir con diferente ritmo en los diferentes lugares nos introduce una gran complicación, y no sabemos a priori cómo debemos graduar las líneas horizontales con los valores del tiempo. De manera que vamos a proceder de la manera más sencilla posible, reproduciendo procedimientos que se utilizan en la RE para resguardar algunas nociones elementales.

Comencemos considerando un observador en reposo cualquiera: A . Él tiene libertad para fijar cualquier instante como origen del tiempo, y adoptar cualquier duración como unidad. Pero por razones prácticas no tiene libertad para cambiar la duración de su unidad a medida que transcurre el tiempo (es decir, *no quiere* hacer eso). De manera que adopta algún fenómeno físico que se repite con regularidad, es decir, un reloj³, para graduar uniformemente su línea del tiempo en toda su extensión.

Con su línea temporal así uniformemente graduada, él pauta la graduación de sus vecinos tanto para los r mayores como menores (para nuestros fines siempre en la región fuera del horizonte), por medio de señales luminosas, como se indica en la figura siguiente para el vecino B en la misma línea radial.

³ Cualquier tipo de reloj o instrumento que indique cómo marcha el tiempo de ese observador. Pero no debería ser un péndulo (que es el ícono de reloj en que primero se piensa), porque su ritmo de oscilación es influido por la gravedad, y cuando quisiéramos comparar la marcha del tiempo en diferentes lugares, deberíamos pensar en corregir las lecturas por este efecto, introduciendo complicaciones que no son pertinentes. De manera que pensemos en relojes eléctricos, atómicos, de pulsera, fenómenos fisiológicos adecuados, etc.

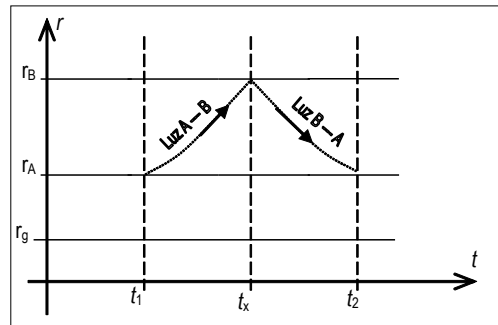


FIGURA 2. Señales luminosas con las cuales A pauta la graduación de la escala temporal de B.

En un instante cualquiera t_1 , A envía una señal luminosa a B, quien al recibirla en t_x la refleja instantáneamente de vuelta hacia A, quien la recibe en t_2 . Luego A comunica a B que debe asignar el valor $t_x = (t_1 + t_2) / 2$.

Repitiendo luego una vez más toda la operación, el observador B ya tendrá dos valores que le permitirán subdividir uniformemente su escala, *sincronizada*, con la escala temporal de A.

Y la misma operación permite coordinar, o mejor dicho *definir*, cómo se asignan los valores de t a todos los observadores fuera del radio problemático r_g (que son los únicos que nos interesan aquí). Vale agregar, además, que a partir de cualquiera de los observadores en reposo en esta región puede definirse el valor de t para todos los demás (en la misma y en diferentes líneas radiales), y lo que se obtenga será equivalente en todos los casos, ya que cualquier definición solamente diferirá de cualquier otra en un factor constante y una elección arbitraria del origen.

Ahora bien, como se aclarará en los próximos párrafos, con este procedimiento se construye una escala temporal que indica simultaneidad entre distintos observadores, pero no indica que el tiempo transcurra con el mismo ritmo para todos. En el caso presentado solamente A, tendrá la escala temporal indicando cómo transcurre su tiempo. Para B la escala estará bien construida, mostrará un transcurso uniforme del tiempo, pero con otro ritmo, como si su unidad fuese diferente. Si A y B, poseen sendos relojes idénticos que utilizan para graduar su unidad de tiempo, la graduación recién construida solamente será exacta para A, que es quien definió la graduación. B encontrará que la graduación es demasiado rápida, o lenta, como corresponde a la expresión (5) que veremos enseguida.

En este punto es necesario remarcar que este procedimiento es el mismo que utiliza cualquier observador inercial para sincronizar los relojes de su referencial en RE. Además es válido en física clásica, aunque allí es redundante, ya que cualquier observador interpreta que es posible conocer instantáneamente lo que indica cualquier reloj de su referencial y de cualquier referencial.

De manera que para este caso que nos interesa, la figura 3 nos muestra cómo se ha definido la *variable temporal* para el referencial consistente en el *conjunto de todos los observadores imaginables en reposo* en todos los $r > r_g$. Para todos estos observadores, la escala temporal está sincronizada de modo que todos los eventos en un mismo valor de t son simultáneos⁴.

Y la noción de la RG de que el tiempo transcurre a distinto ritmo en los diferentes lugares se concreta en la idea de que la misma cantidad $\Delta t = t_2 - t_1$, representa un transcurso de tiempo *diferente* en r_A que en r_B .

Específicamente la RG nos permite decir que el transcurso del tiempo en cada lugar fijo fuera del horizonte está dado por el llamado “tiempo propio”, τ (denominación que alude a que es propio de cada observador en reposo), dado por:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \tag{5}$$

Expresión en la que vemos que infinitamente lejos del origen (o sea del cuerpo de masa M), prácticamente t es lo mismo que τ . Pero en los valores menores de r el tiempo transcurre más lentamente que lo que indica el valor de t , y vemos que nuevamente tenemos un problema al acercarnos a r_g : coloquialmente diríamos que *el tiempo tiende a congelarse allí*, respecto de la variable temporal t .

Volviendo a la presentación de la graduación de la variable temporal, podemos agregar ahora (evitando profundizar mucho) que A puede observar simultáneamente su reloj y (a través de un telescopio) el de B, y al hacerlo comprueba que, suponiendo $r_A < r_B$, la marcha del reloj de B es más rápida que la del suyo (siendo que ambos relojes son idénticos).

⁴ Esto no siempre es posible. Es posible en el caso de los AN, porque la *métrica de Schwarzschild* lo permite.

Lo mismo puede corroborar B: él desde su telescopio también confirma que su reloj es más rápido que el de A. A diferencia de lo que ocurre comparando determinaciones de tiempos entre observadores inerciales en RE, aquí el efecto no es recíproco: el tiempo transcurre más lentamente más cerca del cuerpo masivo central, y todos los observadores concuerdan con ello.

Y vale aclarar que, además, al igual que en RE, el tiempo propio de cualquier observador móvil pasando por un lugar dado, a su vez sería otro tiempo diferente de lo definido por (5).

IV. EL INCREÍBLE “FRENADO” DE LA LUZ

Ahora bien, el mejor mecanismo para conectar o relacionar observadores en diferentes lugares, es por medio de señales luminosas, como ahora analizaremos limitándonos a la dirección radial, tanto hacia el origen, como hacia fuera.

El postulado básico de la relatividad de que la velocidad de la luz debe ser c en cualquier condición y circunstancia, significa, para una señal luminosa marchando en dirección radial, para un observador en reposo, que este debe registrar que avanza la distancia $d\rho$ en un intervalo $d\tau$ de su tiempo propio, de manera tal que:

$$c = \pm \frac{d\rho}{d\tau} = \pm \frac{1}{1 - r_g/r} \frac{dr}{dt} \quad (6)$$

Como ya estamos acostumbrados, para r infinitamente grande tenemos la expresión habitual $c = \pm dr/dt$, pero en la cercanía del horizonte dr/dt es menor en valor absoluto que c , y se anula sobre el mismo.

La figura 3 muestra el viaje de dos rayos de luz lanzados radialmente desde A en $t = 0$, uno hacia el centro y otro hacia fuera.

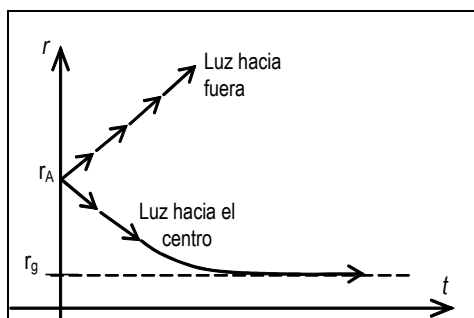


FIGURA 3. Luz emitida radialmente desde A (para r grande, la pendiente tiende a $\pm c$).

El comportamiento de la luz lanzada hacia el centro resulta totalmente sorprendente: la figura muestra que se acercará asintóticamente a r_g para $t \rightarrow \infty$. Y nunca lo alcanzará.

Esto parece absurdo, pero además de ser lo que dice (6), es consistente con la idea básica de que la luz no puede escapar de un AN, ya que la marcha de la luz es reversible. Invertiendo el sentido del tiempo en la figura 3 para el rayo que va hacia el centro, tendríamos un rayo emergiendo como se muestra en la figura 4. Este rayo no podría emerger si proviniera de un punto en el horizonte, pero puede hacerlo porque proviene de algún punto fuera del horizonte, aunque muy cercano. Cuanto más cercano al horizonte sea el punto de partida, mayor es el lapso que debe transcurrir para que el alejamiento del horizonte se haga perceptible.

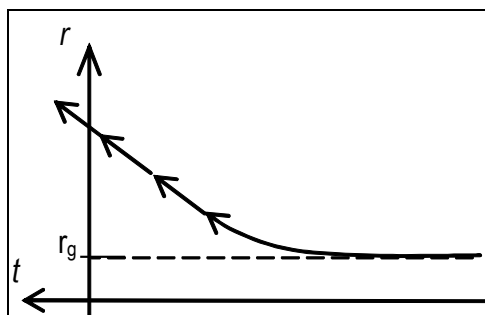


FIGURA 4. Invertiendo el sentido del tiempo en la figura 3, tendríamos luz emitida radialmente hacia fuera desde un punto muy cercano al horizonte.

De manera que por chocante que parezca, ¡se requiere que t llegue a infinito, para que la luz llegue al horizonte! Y no solamente la luz. Cualquier partícula material lanzada radialmente hacia el centro viajará aumentando continuamente su velocidad, pero nunca alcanzará la velocidad de la luz. Siempre será dejada atrás por ella. Y por lo tanto también requerirá que t llegue a infinito para llegar al horizonte. En la figura 5 se ilustra el viaje de partículas lanzadas radialmente hacia el centro desde A.

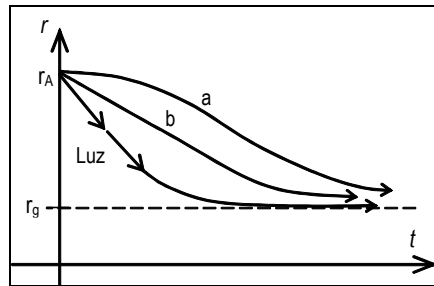


FIGURA 5. Viaje radial hacia el centro de luz y partículas materiales desde A, en función de t . La caída de a comienza con velocidad inicial nula, mientras que b es lanzada con velocidad inicial.

De manera que t debe llegar hasta el infinito para que la luz o las partículas lleguen al horizonte⁵. Y esta variable t es el tiempo para los observadores lejanos. Esto indica que los observadores lejanos deberían esperar un tiempo infinito para que un agujero negro pueda “devorar” toda la materia que los astrofísicos dicen que devora.

Debe notarse que hasta es difícil describir la situación con palabras. Es claro que $dr/dt \rightarrow 0$ para la luz cuando $r \rightarrow r_g$, pero, ¿cómo podemos decirlo?

Decir que la *velocidad de la luz tiende a cero allí* es incorrecto: la velocidad de la luz, registrada por cada observador en cada lugar por el que esta pasa, no es dr/dt , ya que está dada por (6), y vale siempre c .

Sin embargo, la luz deja de avanzar en las coordenadas (t, r) , que son las del referencial. En estas coordenadas nunca llegará al horizonte, que está muy cerca, y al cual se acerca hasta distancias indescriptiblemente pequeñas. Y casi exactamente las mismas consideraciones valdrían para una partícula cayendo radialmente, la cual en esa zona alcanzaría velocidades muy cercanas a la de la luz, pero siempre menores, cumpliendo: $|dr/dt|_{partícula} < |dr/dt|_{luz} \rightarrow 0$.

También sería incorrecto decir que la detención de estos móviles (señal luminosa o partícula), es “aparente”, porque el efecto no es aparente: es tan real como cualquier registro de las coordenadas $r(t)$ de cualquier movimiento que se describa.

Es posible preguntarse: ¿cómo es esto? ¿Hay un error? ¿Mienten los astrofísicos?

Y es muy importante tener presente que además de lo considerado hasta aquí, sí hay un efecto aparente que se origina en lo que “puede ver” algún observador determinado. Esto tendría que ver con la posibilidad de enviar señales luminosas (o electromagnéticas en general) a un cuerpo que cae, construido de manera de responder automáticamente (por ejemplo reflejando la señal hacia el emisor, o por ejemplo pidiendo a un observador en reposo en ese lugar que responda al emisor), y esperar la respuesta.

Si consideramos un instante inicial t_0 en el cual parte un cuerpo lanzado radialmente hacia el centro con velocidad v_0 por un observador en reposo en r , y se considera la recepción de la respuesta a señales enviadas al cuerpo en t_1 , es posible prever que para t_1 próximo a t_0 , la respuesta llegará muy rápidamente, en $t_2 \cong t_1 + 2(v_0/c)(t_1 - t_0)$. Pero a medida que t_1 aumente, la distancia y la velocidad del cuerpo aumentarán, y aumentará la demora en recibir respuesta.

Y según el comportamiento previsto de dr/dt para luz y partícula, es claro que esta demora aumentará sin límites cuando t_1 aumente suficientemente, y decir que la demora aumentará infinitamente significa que la respuesta nunca llegará. Vale mencionar que además se agregará el efecto de que la frecuencia de la luz disminuirá, también infinitamente (por efecto Doppler si es reflejada, y por efecto gravitacional si es enviada por un observador en reposo en la zona), en el viaje hacia fuera, lo que haría imposible detectar la respuesta aún si llegara (no entraremos en más detalles sobre este “enrojecimiento” de la luz, porque sólo agrega más razones para que no se detecte una respuesta).

Es importante entender que esta imposibilidad de ver a la partícula cruzando el horizonte, debido a la demora infinita y al enrojecimiento infinito también, de la luz que intervendría, es un efecto aparente que no debe ser confundido con la imposibilidad de cruzar el horizonte expresada por las funciones $r(t)$.

⁵ Solamente estamos considerando partículas en caída radial, porque constituyen el caso más simple, que permite explorar estos aspectos interesantes. Es claro que el comportamiento de las partículas con momento angular puede ser mucho más rico, pero no necesariamente servir para explorar estos aspectos. Una partícula con momento angular puede permanecer muchos miles de millones de años en órbita alrededor del AN, y eso no es interesante aquí.

Ahora bien, hay que tener en cuenta que además de que el tiempo τ de los observadores en reposo en la vecindad del horizonte se va congelando con respecto a nuestro tiempo t de observadores más alejados, el tiempo propio de la partícula que pasa por ese lugar cerca del horizonte con una velocidad que se acerca cada vez más a la de la luz (como veremos pronto al hacer unos cálculos), se va congelando a su vez con respecto al τ de los observadores en reposo. De manera que tal vez no sería imposible que en el tiempo propio de la partícula que cae todo el proceso tenga una duración finita.

V. OTRAS COORDENADAS

Veremos ahora cómo cambia el panorama si el análisis se hace función del tiempo propio T de una partícula en caída libre. Es claro que poder hacer un análisis desde el punto de vista de una partícula en caída libre implica un cambio de coordenadas que es competencia exclusiva de la RG, y aquí nos limitaremos a utilizar resultados tomados de Landau y Lifshits (1973).

Consideremos un observador que es una partícula que cae libremente desde la condición inicial de estar en reposo infinitamente lejos ($r_0 = \infty, v_0 = 0$), es decir con un movimiento rectilíneo radial, y que en un momento dado, al pasar por algún valor arbitrario de r , llamémoslo r_1 , ajusta su cronómetro en cero. Al decir: "su cronómetro", en este lugar se quiere decir que este indica el tiempo propio del viajero (utilizaremos T para distinguirlo de τ , que es el tiempo propio de los observadores en reposo, dado por (5)). De manera que en r_1 se decide arbitrariamente el origen de T (notar que valores iguales de T no indican eventos simultáneos en general, a diferencia de lo que ocurre con la variable t).

A continuación, gracias a resultados de la RG que utilizaremos sin demostrar, podremos decir que este movimiento de caída libre cumple con:

$$cT + \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}} = \text{cte} \tag{8}$$

Esta constante, que denominaremos X , siendo que $T = 0$ en r_1 , debe valer:

$$X = \frac{2}{3} \frac{r_1^{3/2}}{r_g^{1/2}} \tag{9}$$

Sabiendo estos resultados de la RG (que dicen cómo cae un cuerpo en el E-T del cuerpo de masa M), podemos hacer un cambio de coordenadas $(r, t) \rightarrow (X, T)$, tal que:

- a) Para cada valor $r = r_1$, se define X según (9): $X = (2/3) r_1^{3/2}/r_g^{1/2}$;
- b) Luego, en un diagrama (X, T) , se considera que T , en abscisas, es el tiempo propio de los observadores en cada valor constante de X . Como ya se dijo, estos observadores no están en reposo en el espacio-tiempo, sino cayendo libremente, viajando hacia los r menores en función de T como lo indica (8).

Los observadores que están en reposo son los que mantienen r constante, como se ve en la figura 6, siguiendo, según (8), rectas con pendiente $dX/dT = c$.

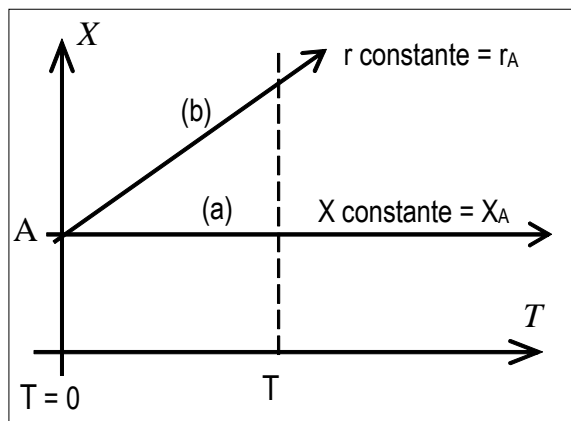


FIGURA 6. a) Partícula cayendo radialmente. b) Partícula en reposo en r_A .

De esta manera, en un diagrama (X, T) encontramos, para cada X en el eje de ordenadas, que la expresión (9), nos da el valor de r por el cual una partícula pasa en $T = 0$, cayendo libremente desde el infinito. La recta con $dX/dT = c$ por ese punto indica cómo el punto *en reposo* en r evoluciona en el tiempo en este diagrama. Todas las rectas paralelas a ésta indican todas las posibles posiciones en reposo (figura 7).

La recta horizontal cruzando estas rectas oblicuas muestra cómo la partícula que cae va pasando por los diferentes valores de r cada vez más pequeños, hasta llegar a $r = 0$. A eso se lo puede ver en la expresión (8), pero es mucho más clara la forma en que la figura 7 nos muestra que la partícula viajera cruzará el horizonte en un tiempo propio finito, sin demora alguna.

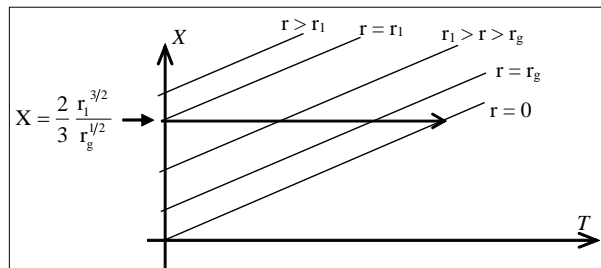


FIGURA 7. Partícula cayendo radialmente, cruzando distintos valores de r .

Es más, la figura 7 nos muestra también que la partícula continuará hasta el centro luego de cruzar el horizonte. No estamos interesados aquí en esa parte del viaje, porque requeriría conocimientos mayores de RG. En estos diagramas no aparece t . Pero puede averiguarse a partir de la siguiente expresión de la RG:

$$ct = cT + 2r_g \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{r_g}{r}} \right) - 2\sqrt{r_g r} \tag{10}$$

Dado que el *arctgh* diverge⁶ cuando su argumento tiende a 1, la expresión (10) muestra que $t \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_g$ (que es lo mostrado en la figura 5). Este es el comportamiento de la variable t que ratifica la necesidad del observador lejano de esperar infinitamente para que la partícula llegue al horizonte. Y la figura 7 nos muestra cómo con estas nuevas variables se pueden analizar aspectos del movimiento que están totalmente fuera del alcance de la variable t .

Para completar nuestro análisis solamente nos falta introducir la marcha de la luz en el esquema. Nuevamente la RG nos dice que en estas variables la luz viaja según:

$$\frac{dX}{dT} = \pm c \sqrt{\frac{r}{r_g}} \tag{11}$$

Esta expresión nos dice que muy lejos del horizonte el viaje de la luz mostrará líneas casi verticales en nuestra gráfica. En la cercanía de r_g esas líneas se curvarán llegando a r_g con la misma pendiente c (en valor absoluto), que las rectas de r constante (figura 8).

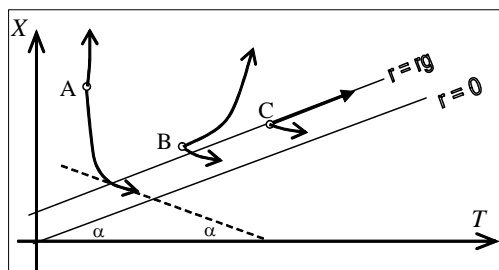


FIGURA 8. Luz radial hacia el centro y hacia fuera, desde A, lejos del horizonte; desde B, cerca del horizonte; desde C, en el horizonte (luz no sale). En todos los casos la luz que cruza r_g lo hace mostrando la misma pendiente, de valor absoluto c , que las rectas de r constante.

⁶ Esta función es un poco “molesta”, difícil de pensar. Se facilita un poco su comprensión interpretando su inversa, la *tgh*: si $y = \operatorname{tgh}(x)$, entonces $x = \operatorname{arctgh}(y)$. Ahora bien: $y = \operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Se ve fácilmente que $y \rightarrow 1$, si $x \rightarrow \infty$. Razonando sobre la inversa: $x = \operatorname{arctgh}(y)$, se tiene que $x \rightarrow \infty$ si $y \rightarrow 1$.

Con estos elementos, en la figura 9 se puede completar el análisis que nos interesa.

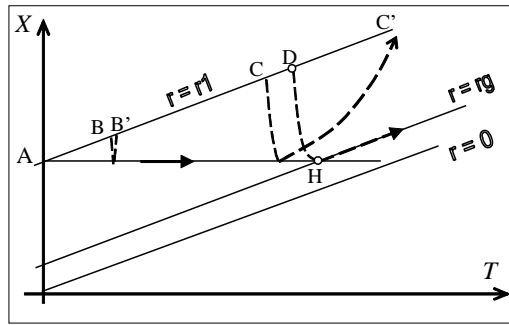


FIGURA 9. El observador en reposo en r_1 envía señales luminosas desde B, y recibe rápidamente la respuesta, en B'. Para las señales enviadas desde C, la respuesta demora mucho más, y se recibe en C'. La última señal que alcanzará al cuerpo que cae, parte desde D, y ya no se recibirá respuesta. Esta señal alcanza al cuerpo en H, cuando este llega a g.

Es interesante notar en que hay un instante t_D en el cual el observador en reposo en r_1 podría enviar la última señal luminosa que podría alcanzar al cuerpo justo al cruzar el horizonte (en H). Si bien t_H es infinito, según se obtiene de (10) para H en el horizonte (corroborando lo que hemos dicho ya varias veces), t_D no es infinito y puede calcularse. Y tomando, sobre la línea $r = r_1$, el punto H^* próximo al D, en el mismo valor de abscisa, T_H , podemos obtener un valor muy ilustrativo y fácil de calcular, aunque algo sobreestimado (figura 10).

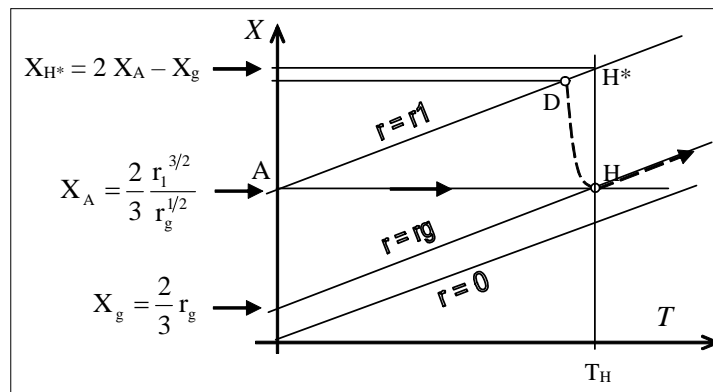


FIGURA 10. Con poco error podemos asimilar el punto D al H^* , para averiguar con facilidad el tiempo límite que posee el observador para enviar una señal luminosa que justo sobre el horizonte alcance al cuerpo que cae.

Aplicando (10) para t_{H^*} y t_A , teniendo en cuenta que ambos puntos están sobre el mismo valor r_1 , se obtiene: $c \Delta t = c \Delta T = c T_H = X_A - X_g$:

$$\Delta t = t_{H^*} - t_A = \frac{2}{3} \frac{r_1^{3/2} - r_g^{3/2}}{c r_g^{1/2}} \tag{12}$$

Y si r_1 es suficientemente mayor que r_g , como veremos en un ejemplo, queda simplemente X_A/c , que además, como veremos, es prácticamente lo que el cuerpo tardaría en caer hasta el centro en un cálculo newtoniano clásico!

VI. UN CÁLCULO EJEMPLIFICADOR

Nada mejor que un ejemplo numérico para dar claridad a todo lo discutido. Supongamos que el Sol fuera un AN, para utilizar números familiares redondeándolos un poco. Es decir, consideremos la Tierra orbitando en una circunferencia de $1,50 \times 10^8$ km de radio, alrededor de un AN con la masa del Sol: $M \cong 2 \times 10^{30}$ kg.

Es claro que el campo gravitatorio que encuentra la Tierra, así como las características de su movimiento orbital, son exactamente los mismos si M está contenida en el radio del Sol (7×10^5 km), o en un radio menor que r_g ($r_g = 2GM/c^2 \cong 2964$ m), o en un punto geométrico.

La pequeñez del radio del horizonte, r_g , nos dice inmediatamente que el factor $(1 - r_g/r)$, que aparece en todas las intervenciones de la RG, se mantiene igual a 1,00000 con 5 cifras significativas o más, para cualquier situación que ocurra fuera del radio del Sol. De manera que en esta zona la RG debe producir casi exactamente lo mismo que puede calcularse con la teoría newtoniana, con modificaciones tan leves como el famoso corrimiento del eje mayor de la órbita de Mercurio, de 43" /siglo.

Podemos ver que pequeñas correcciones del orden de 10^{-3} , recién se esperan para $r \cong 3000$ km, que ya casi sería el centro del Sol, pero aún es mil veces mayor que r_g .

Continuando con el ejemplo, consideremos una partícula material cayendo radialmente desde el reposo en el infinito, e iniciamos la cuenta desde que cruza la órbita de la Tierra, $r_1 \cong 1,50 \times 10^{11}$ m, con $v_1 \cong 42,2 \times 10^3$ m/s (como puede calcularse jugando un poco con las órbitas circulares o la conservación de la energía).

La expresión (12) nos indica que $(2/3c) (r_1^{3/2}) / (r_g^{1/2}) \cong 2371133,3$ s $\approx 2,37 \times 10^6$ s $\approx 27,44$ días (carece de sentido incluir la resta en el numerador, ya que solamente corregiría microsegundos), es el lapso máximo de que se dispone, para hacerle llegar señales a la partícula (desde un emisor en reposo en r_1 , desde que la partícula pasa por allí).

Es útil comparar primero con el valor obtenido con un cálculo totalmente newtoniano clásico.

Una simulación según el cálculo newtoniano (ver Apéndice 2) permite obtener que el tiempo demorado para que la partícula llegue a r_g (en un cálculo ideal con el Sol puntual), es 2371115,2 s (y luego, en 10 μ s más llegaría a $r = 0$). Y dado que la luz demoraría $(r_1 - r_g) / c \cong r_1/c = 500$ s en llegarle desde el punto de partida en la órbita de la Tierra, el tiempo disponible para enviarle señales sería de unos 2370615 s.

Una simulación con las fórmulas relativistas por otra parte (también Apéndice 2), permite obtener la coordenada t para el tiempo demorado por la partícula en llegar a la inmediata vecindad del horizonte, en donde dr/dt tiende a anularse definitivamente para mantenerse así hasta $t \rightarrow \infty$. Este valor de t resulta ser 2371115,3 s, igual en 7 cifras al resultado del cálculo clásico.

De manera que queda perfectamente corroborado el cálculo (levemente sobreestimado, como habíamos previsto), del tiempo límite t^* según (12).

Y por otra parte también queda perfectamente claro que la casi totalidad del viaje no se distingue de lo que predice el cálculo clásico⁷, porque además de que la curvatura del espacio se hace importante solamente en la inmediata vecindad del horizonte, la velocidad no alcanza valores relativistas hasta esa zona: en un simple cálculo clásico de conservación de la energía la velocidad de nuestra partícula llega a c en r_g (por definición de r_g), y a $c/10$ en $r = 100r_g$.

VII. APARENTE, RELATIVO Y RELATIVISTA

Hemos hecho un cálculo que se limita al movimiento en caída libre exactamente radial desde el infinito. La razón para elegir ese cálculo es que para él específicamente disponemos de las expresiones necesarias con ayuda de las coordenadas (X, T) , y no para otros casos. Pero las fórmulas utilizadas muestran (y los números del ejemplo lo destacan enfáticamente), que el movimiento transcurre de manera perfectamente clásica hasta la inmediata vecindad del horizonte, que es la única parte en la cual tienen lugar los comportamientos relativistas, extraños para la descripción clásica.

De manera que para estos comportamientos extraños que ahora vamos a interpretar, es irrelevante que el inicio de la caída haya sido desde el infinito, o desde algún otro punto distante cualquiera.

Así, las conclusiones a que llegaremos serán igualmente válidas para cualquier caso de caída libre radial desde un punto lejano al origen, con o sin velocidad inicial.

Lo que hemos encontrado es que el viaje es esencialmente clásico hasta tal vez $10 r_g$. Pero el radio del horizonte es muy pequeño, y tanto r_g como $10 r_g$ constituyen distancias ínfimas en comparación con el viaje considerado. Y aunque las diferencias entre la teoría clásica y la RG se pueden comenzar a notar cuando r se acerca a $100 r_g$, no se hacen drásticas hasta que r es casi igual a r_g .

Efectivamente, en los últimos milisegundos de un viaje de varios días (o meses), el valor absoluto de dr/dt , que según tanto la teoría clásica como la RG, ha llegado a ser del orden de la velocidad de la luz, bruscamente, en vez de aumentar hasta el infinito como lo indicaría la teoría clásica en esos últimos milisegundos, cae a casi cero!

En las coordenadas (t, r) la partícula viajera se detiene de manera inimaginablemente brusca - contra toda intuición mecánica (ver figura 11.b).

⁷ Más números para el asombro. En el cálculo RG, el máximo valor de dr/dt es $1,155 \times 10^8$ m/s, y se alcanza en $r \cong 8778$ m $\cong 2,96 r_g$, en $t \cong 2371115,29$ s. Allí el factor $(1 - r_g/r)$ vale 0,662, de manera que la velocidad de la partícula es $(1/0,662) (dr/dt) \cong 1,744 \times 10^8$ m/s. En el cálculo newtoniano clásico la partícula llega a $r \cong 8778$ m en $t \cong 2371115,20$ s, y allí su velocidad, que es dr/dt , vale $1,741 \times 10^8$ m/s. Luego, desde este lugar, para la RG, en unos 160 μ s prácticamente se anula dr/dt casi en r_g , aunque la velocidad allí, que no es dr/dt , tiende a c . En el cálculo clásico la partícula demora desde allí 27 μ s en llegar a r_g , en donde su velocidad es c .

Y no solamente la partícula lo hace. Si hubiera luz acompañando o persiguiendo a la partícula, ella tendría exactamente el mismo comportamiento allí.

Si pensamos en muchas partículas cayendo desde distintas direcciones amontonándose todas contra el horizonte junto con la luz, sin poder avanzar y cruzarlo, tenemos una imagen casi grotesca, totalmente reñida con las leyes mecánicas, que nos impulsa a preguntar: ¿qué fuerza puede estar deteniendo y haciendo que se aplaste toda esa materia contra esa superficie inmaterial?

Nos sentimos impulsados a decir que la Mecánica no permite esto, y que algo como *la verdadera descripción* es la que se hace con las coordenadas (T, X) , en las cuales partícula y luz cruzan el horizonte sin ningún impedimento ni demora.

Pero pensar así es un error, y una buena manera de entenderlo es a través del conocido ejemplo de los *mesones* μ , muy utilizado a veces para entusiasmar a públicos no especialistas, presentándoles razones para creer en la realidad de la “dilatación temporal”.

Se sabe que estos mesones se producen en la alta atmósfera como resultado de la interacción de los rayos cósmicos con partículas atmosféricas. Como resultado de estas interacciones se producen muchas partículas, y entre ellas estos mesones que parten con velocidades muy cercanas a las de la luz (del orden del 99,98 % de c), y tienen una vida media del orden de $2,2 \times 10^{-6}$ s, luego de la cual se desintegran a su vez en otras partículas. Ahora bien, la altura media a la que se producen estos mesones es de unos 30 km, y viajando a la velocidad de la luz ellos podrían recorrer hasta desintegrarse una distancia media de unos 600 m. Pero una gran fracción de ellos es detectada a nivel del mar, es decir después de haber recorrido 30 km. Y dado que su velocidad no podría superar (ni alcanzar) la de la luz, ello implica que han viajado al menos durante 10^{-4} s, es decir un tiempo casi 50 veces superior a lo que es la duración de su vida media. Resultado espectacular que se suele presentar a las audiencias noveles como muestra de la “dilatación temporal” que predice la RE para los viajeros con velocidades cercanas a c .

Y lo que nos interesa en este momento es que tenemos dos tiempos en el relato. Uno es el intervalo de tiempo propio del viajero: $\Delta\tau \cong 2,2 \mu\text{s}$. Es una de las propiedades características de estos muones: su *vida media*.

El otro es $\Delta t \cong 100 \mu\text{s}$. Es el tiempo que vive el muon en nuestro referencial de observadores terrestres. No es indicativo de propiedades de la partícula, ya que depende de la velocidad relativa entre esta y el observador.

Pero *ambos valores son igualmente reales*. Ninguno es aparente. En nuestro referencial de observadores terrestres, el muon ha vivido realmente $100 \mu\text{s}$, y eso no contradice que en su referencial propio haya vivido los $2,2 \mu\text{s}$ que lo caracterizan.

Además de esto efectos *relativistas*, podría haber efectos *aparentes* si hubiera posibilidades de que observadores situados en diferentes lugares *vieran* los procesos de creación y aniquilación (por ejemplo captando señales luminosas que se produjeran de alguna manera en cada evento). Estos observadores, restando el instante en que lo vieron nacer, de aquél en que lo vieron morir, atribuirían otras diferentes duraciones a la vida del muon, que serían *aparentes*, y dependientes de la ubicación relativa de cada observador.

Ni en el caso del muon, ni en nuestro caso del AN estamos interesados en estos aspectos aparentes.

De manera que, volviendo al caso que nos interesa, aunque t no es la variable más adecuada para describir el tiempo muy cerca del horizonte, no es una variable sin sentido físico: es el tiempo de los observadores lejanos, y ha sido definido de manera de sincronizar todos los relojes estáticos del referencial que tiene en reposo al AN, de manera que eventos que ocurren en iguales valores de t son simultáneos para todos estos observadores (estáticos).

Es decir, el observador lejano no puede ni intenta ver, *pero sí puede saber* que allá, en la vecindad del horizonte, el tiempo transcurre tan lentamente en relación con la variable t , que prácticamente puede decirse que *el tiempo se ha congelado* allí. La partícula y la luz prácticamente *se han detenido para él*, porque el tiempo del lugar por el que están pasando prácticamente se ha congelado en relación con su tiempo. Y así puede esperar hasta el infinito el observador lejano, y la luz y la partícula viajera seguirán congeladas sin cruzar el horizonte (estamos abusando un poco del concepto de *congelar*, en función de su valor representativo).

Sin embargo el astrofísico, que es un simple observador lejano más, usuario de la coordenada t , dirá que luego de $t^* + r_1/c$ ya cruzaron el horizonte; que el agujero negro ya habrá devorado esta partícula, y que por eso no podremos comunicarnos con ella. ¿Miente el astrofísico? Para aclarar esta situación es necesario revisar un detalle que se entiende mejor haciendo otro cálculo numérico.

VIII. UN ÚLTIMO DETALLE

Es ilustrativo tratar de calcular a qué distancia del horizonte está la partícula después de un Δt razonable, digamos 100 s, después de comenzar la caída de dr/dt mostrada en la figura 11.b, o sea, digamos, después de estar aproximadamente 100 s “congelada”, según el criterio del observador lejano.

En el Apéndice 3 se muestra el cálculo, según el cual la diferencia $r-r_g$ luego de solamente 100 s de congelamiento, es del orden de 10^{-10^7} metros. Es decir, estamos ante una distancia inimaginablemente pequeña. La calculadora no puede manejar esos números. La calculadora de bolsillo suele manejar hasta 10^{-100} . La longitud de Planck es del orden de 10^{-35} m. Y ahora estamos hablando de $10^{-10000000}$.

Son distancias que no tienen sentido físico, y su pequeñez influye porque la materia de la partícula, al agregarse a la masa M , hace aumentar el valor de r_g . Y este aumento, por pequeño que sea, fácilmente puede resultar mucho mayor que estas distancias. Efectivamente, según la expresión (3) un incremento δM produce un incremento $\delta r_g = (\delta M/M) r_g$. Así tenemos que si agregamos *la masa de un electrón* a la masa del Sol (supongámosla distribuida en una capa esférica, para seguir teniendo un problema con esa simetría), vemos que el radio gravitatorio se incrementa en: $\delta r_g \cong 0,5 \times 10^{-60} r_g \cong 1,5 \times 10^{-57}$ m. Este incremento es enormemente superior a lo que le faltaba a la capa esférica de partículas para llegar al horizonte ($10^{-57} \div 10^{-10^7} = 10^{10^7-57} = 10^{10^7} ?!$; cuesta manejar estos números). Es decir que hace ya tiempo que la capa de partículas está dentro del horizonte: *el horizonte pasó sobre ella*.

De manera que, resumiendo, si se considera la masa de la partícula que se acerca al agujero negro, se tiene un problema que globalmente no tiene simetría esférica, y debería abordarse con métodos mucho más complicados. Pero imaginando una situación con simetría esférica, de una nube uniforme de partículas que caiga radialmente al AN, es fácil aceptar que después de llegar a la zona en la cual el movimiento se congela, en un tiempo muy corto, en fracciones de segundo, se tiene una capa de materia tan próxima al horizonte, que *el incremento que sufre el radio de este la deja dentro*.

IX. CONCLUSIONES

Examinando el proceso de acercarse una partícula radialmente al horizonte, hemos encontrado que la mayor parte del viaje es completamente clásico, y está desprovisto del halo de misterio que la idea de Agujero Negro por sí sola sugiere. Sin embargo, en la inmediata proximidad hay un cambio drástico totalmente impensado: la realidad supera a la fantasía originada en la divulgación. Ni la partícula ni la luz pueden ingresar al AN porque el tiempo se congela allí respecto de los observadores estáticos lejanos.

Y esto no es un efecto aparente. No es correcto pensar que es un efecto de que los observadores lejanos no pueden ver lo que sucede en la vecindad del horizonte, porque ellos sí pueden *saber* lo que sucede (y además vale notar que el efecto en realidad no depende de que los observadores sean lejanos, sino de que sean estáticos).

Y no es correcto pensar que la descripción en el referencial propio de la partícula (según la cual la partícula rápidamente cruza el horizonte sin siquiera notarlo) es más verdadera que la de los observadores estáticos.

Y de no ser por el efecto de que la acumulación de materia cerca del horizonte expande automáticamente su radio (justificado muy rudimentariamente con los cálculos presentados), los observadores estáticos podrían esperar hasta el fin de sus días, sin que partícula alguna ingresara al AN.

Pero es claro que en una situación de una nube más o menos uniforme de materia cayendo radialmente hacia el AN, se puede estimar el tiempo Δt a partir de que la dr/dt comienza a disminuir, necesario para que el aumento del radio del horizonte del AN produzca el efecto de “engullir” la materia que queda dentro de su horizonte ampliado. Y ese tiempo Δt es calculable, es muy breve, y permite determinar efectivamente cuándo entra la materia al horizonte en la coordenada t .

Y finalmente los astrofísicos están en lo cierto cuando hablan de las cantidades de materia devoradas por los AN, aunque el proceso por el cual eso ocurre tiene facetas fascinantes muy poco difundidas, que ayudan a enriquecer las posibilidades de interpretar lo que significa la relatividad de las observaciones referidas a diferentes referenciales.

Y un último detalle: la idea de que en las coordenadas (T, X) la partícula cruza el horizonte sin inconvenientes sugiere erróneamente que aún le resta una maravillosa vida de aventuras en su tiempo propio. Pero las expresiones (8) y (9), muestran fácilmente que al cruzar el horizonte al viajero le quedan pocos microsegundos de vida antes de llegar a su fin en $r = 0$.

REFERENCIAS

Landau & Lifshits. (1973). Colapso gravitatorio. En *Teoría Clásica de los Campos. Física Teórica, Vol. 2*. 2ª ed. Reverté.

APÉNDICE 1

La expresión (2') que define la distancia radial, ρ , es integrable:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g/r}} = \sqrt{r(r - r_g)} + \frac{r_g}{2} \ln \left(r - \frac{r_g}{2} + \sqrt{r(r - r_g)} \right)$$

De manera que para el caso de M igual a la masa del Sol ($r_g \cong 2964,4$ m), a modo de ejemplo ilustrativo, para tres puntos A, B, C, alineados radialmente, tales que A es un punto del horizonte ($r_A = r_g$), $r_B = r_A + 1$ m, y $r_C = r_B + 1$ m, puede calcularse que las distancias entre ellos son:

$$\rho_B - \rho_A \cong 108,90 \text{ m}$$

$$\rho_C - \rho_B \cong 45,11 \text{ m}$$

Estos valores ilustran que aunque el espacio esté infinitamente comprimido contra el horizonte, la distancia desde el horizonte a cualquier punto es finita y calculable.

APÉNDICE 2

Es interesante comparar algunas expresiones del cálculo clásico con el relativista, siempre para el movimiento radial.

La expresión de la conservación de la energía para una partícula en las condiciones de este trabajo (en presencia de un cuerpo de masa M fijo en el origen), según la RG, puede escribirse:

$$\frac{\tilde{v}^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^3} - \frac{c^2 r_g}{r} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r_1}\right)} = \frac{\tilde{v}_1^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r_1}\right)^3} - \frac{c^2 r_g}{r_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r_1}\right)} \quad (13)$$

En donde \tilde{v} significa dr/dt , lo cual para $r \gg r_g$, es simplemente la velocidad radial (y ya hemos visto que eso se cumple en todas partes no demasiado cercanas al horizonte). El subíndice 1 indica algún valor particular, en el cual \tilde{v} tiene un valor conocido.

Si se tiene en cuenta que en las condiciones no muy cercanas al horizonte todos los corchetes valen casi exactamente 1 (fuera del radio solar tanto r_g/r , como r_g/r_1 , son absolutamente despreciables), y se utiliza la expresión (3) para r_g , esta expresión se transforma en la clásica:

$$\frac{\tilde{v}^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{\tilde{v}_1^2}{2} - \frac{GM}{r_1} \quad (13')$$

Con cualquiera de ambas expresiones (clásica o relativista) la evolución de la función $r(t)$ puede simularse fácilmente integrando numéricamente, es decir, para cada valor de r (en cada t), calcular \tilde{v} con (13) o (13'), luego incrementar r según $\delta r = -\tilde{v} \delta t$ con algún incremento adecuado δt , y repetir iterativamente.

Lo que se obtiene es casi exactamente lo mismo para el caso clásico y el relativista hasta que se llega muy cerca del horizonte (figura 11.a). La velocidad evoluciona muy lentamente al principio, y la iteración puede hacerse con intervalos δt muy grandes (por ejemplo, minutos) hasta r del orden de $10^4 r_g$. Allí la velocidad será muy grande (aunque aún no relativista), y será necesario cambiar el paso de la iteración (por ejemplo, milisegundos), hasta llegar hasta r del orden de $100 r_g$.

Y a partir de allí, con δt del orden de μs , se separarán drásticamente los comportamientos: en el cálculo clásico $\tilde{v} \rightarrow \infty$ en milisegundos, mientras la partícula llega a $r = 0$; mientras que en el caso relativista, también en milisegundos dr/dt llega a un máximo y luego bruscamente decrece hasta anularse asintóticamente en $r \rightarrow r_g$ (figura 11.b). Es claro que en este caso la velocidad es muy cercana a la de la luz, y dr/dt ya no la representa.

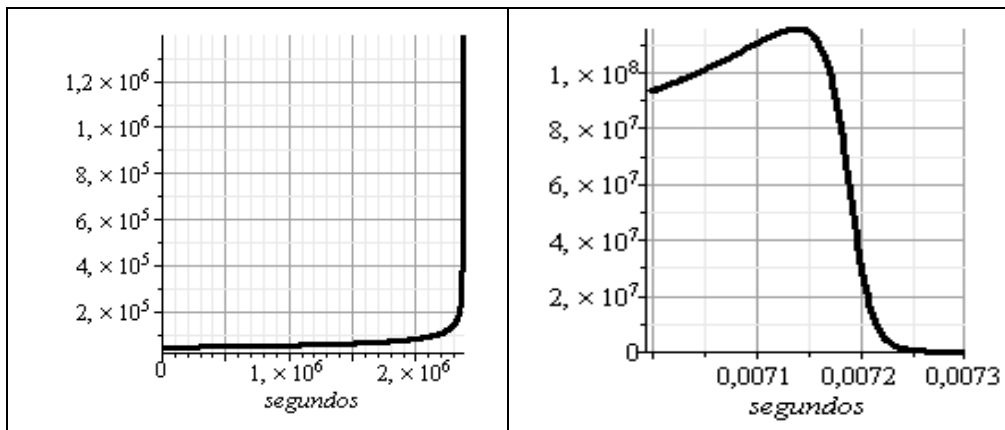


FIGURA 11. a (izquierda) en ordenadas se muestra el valor de dr/dt , que es la velocidad en la primera parte del trayecto, tanto en el caso clásico como en el relativista, (observar que cerca de los $2,37 \times 10^6$ s, la velocidad llega a menos del 1 % de c , pero está aumentando muy rápidamente). b (derecha) Unos milisegundos después, en el caso relativista, dr/dt ha llegado a casi $1,2 \times 10^8$ m/s, ya muy cerca del horizonte, ya no representa la velocidad, y se desploma completamente al llegar casi al horizonte.

Y por último, es interesante ver que si especializamos la expresión (13) para nuestro ejemplo ($\tilde{v}_1 = 0$ para $r_1 \rightarrow \infty$) se obtiene: $|\tilde{v}| = |dr/dt|_{particula} = c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{r_g/r}$; mientras que, según (6), para la luz: $|dr/dt|_{luz} = c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. De donde

se ve claramente que, en valor absoluto, en cada lugar siempre será $|\dot{r}/\dot{t}|_{\text{luz}} > |\dot{r}/\dot{t}|_{\text{particula}}$, aunque numéricamente serán casi indistinguibles (como r lo es de r_g). No olvidar que $|\dot{r}/\dot{t}|$ no es ni pretende ser la velocidad en esta zona.

De la velocidad (en valor absoluto) en esta zona, además sabemos que:

- 1) En el referencial de la partícula, en cada lugar, la luz pasa con velocidad c .
- 2) Para cada observador estático en cada lugar muy cerca del horizonte, la luz y la partícula pasan casi con la misma velocidad (c la luz, y $c\sqrt{r_g/r}$ la partícula).

APÉNDICE 3

Puede ser ilustrativo hacer un cálculo explícito de la cercanía de nuestra partícula al horizonte luego de estar congelada una cierta cantidad Δt del tiempo de observadores lejanos.

Debemos utilizar la expresión (10), pero es difícil obtener de ella $r(t)$, lo que mostraremos ahora.

$$ct = cT + 2r_g \operatorname{arctgh}\left(\sqrt{r_g/r}\right) - 2\sqrt{r_g r} \quad (10)$$

En esta expresión tenemos que T es el tiempo propio del viajero para llegar al valor r que nos interesa. Como nos interesa un valor de r extremadamente próximo a r_g , y ya sabemos que la divergencia del arctgh allí es la que causa el crecimiento infinito de t , mientras que T es una variable continua en r_g , entonces podemos evaluar T en $r = r_g$. Es decir (ver figura 11), $cT = X_A - X_B \cong X_A = (2/3) (r_1^3/r_g)^{1/2}$. Es decir, que T es esencialmente el tiempo correspondiente al cálculo clásico para que la partícula llegue al origen, como vimos, $T \cong 2,37 \times 10^6$ s.

Por otra parte el término $2(r r_g)^{1/2} \cong 2 r_g$, dividido por c , aporta unos microsegundos, es decir, una cantidad absolutamente despreciable.

De manera que para un intervalo Δt de tiempo considerable (es decir muy superior a micro o mili segundos) durante el que la partícula permanezca congelada, podremos plantear:

$$ct - cT \cong c \Delta t \cong 2r_g \operatorname{arctgh}\left(\sqrt{r_g/r}\right)$$

Y de esta expresión se puede despejar fácilmente: $(r_g/r)^{1/2} = \operatorname{tgh}(c\Delta t/2r_g)$. Aquí debe notarse que el argumento de la tgh es extremadamente grande, en cuyo caso esta función puede aproximarse según $\operatorname{tgh}(x) \cong 1 - 2e^{-2x}$.

Por otra parte, si $r = r_g + \varepsilon$, con ε muy pequeño, se tendrá $(r_g/r)^{1/2} \cong 1 - \varepsilon/2r_g$. Con lo cual, finalmente, se obtiene:

$$\varepsilon = r - r_g \cong 4r_g \exp(-c\Delta t/r_g)$$

Con esta expresión podemos calcular, para un tiempo muy modesto, por ejemplo $\Delta t = 100$ s desde que se “congeló” el movimiento de la partícula (milisegundos más, milisegundos menos), en nuestro ejemplo, que la partícula ha llegado hasta una proximidad del horizonte de aproximadamente (en metros):

$$\varepsilon = r - r_g \cong 12000 e^{-10^7} \cong 12000 \times 10^{-0.4343 \times 10^7} \cong 10^{-0.4343 \times 10^7}$$

Ahora bien, la distancia real está comprimida en la coordenada r , pero eso no cambia mucho la situación. La distancia real al horizonte estaría representada, según (3), por $\varepsilon/(1-r_g/r)^{1/2} \cong r^{1/2} \varepsilon^{1/2} \approx 10^{-0.22 \times 10^7}$.

Es una distancia inconcebiblemente menor que cualquier distancia con sentido físico. Inconcebiblemente menor que el tamaño de partículas atómicas y subatómicas. Inconcebiblemente menor que la distancia de Planck.

Pero la pregunta sobre si es posible que la materia se comprima tanto, no tiene sentido. Porque a la materia no le sucede nada, como se ve en las coordenadas (T, X) , u otras. Las tensiones tidales en todo caso tenderían a estirar radialmente la materia, y no a comprimirla. Toda la compresión existe solamente en las coordenadas (t, r) . Es un efecto relativista, consecuencia del congelamiento del tiempo cuando se lo expresa en la coordenada t .

Si, inversamente, buscásemos el tiempo necesario para que la partícula se aproxime hasta una distancia del orden del tamaño atómico, 10–10 m, obtendríamos del orden de 300 μ s. Esto sugiere que aunque no sea posible hacer mejores cálculos con estos elementos, es posible estimar que el congelamiento existe, pero no se mantiene más que fracciones de segundo en la variable t .