VOLUMEN 34, NÚMERO 1 | ENERO-JUNIO 2022 | PP. 75-83
ISSN: 2250-6101
DOI: https://doi.org/10.55767/2451.6007.v34.n1.37941

Teorema de Noether: del contenido a la forma. Ensayo sobre la aplicación de una teoría semiótica cognitiva de aprendizaje a una propuesta didáctica

Noether's theorem: from content to form. Essay on the application of a cognitive semiotic theory of learning to a didactic proposal

Rafael González [1]* y Tomás Orlando Michi [1]

[1]Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines, CP 1613, Pcia de Bs. As. Argentina.

***E-mail: rgonzale@campus.ungs.edu.ar**

Recibido el 13 de marzo de 2022 | Aceptado el 19 de mayo de 2022

Resumen

En este trabajo se plantea una metodología novedosa, basada en la teoría semiótica-cognitiva del aprendizaje (González, 2018), para abordar temas de Mecánica lagrangiana. En el contexto de esta asignatura, correspondiente al nivel superior de profesorados de Física y de licenciaturas en Física, se ejemplifica la metodología mencionada a través del abordaje del conocido teorema de Noether, el cual vincula la simetría de las configuraciones mecánicas con las correspondientes integrales primeras de movimiento. En lugar de la forma clásica de presentar el teorema (mediante el enunciado, la demostración y la ejemplificación), en este caso se parte de un cuadro de propiedades (entre ellas simetrías y conservaciones de distintas configuraciones específicas) y se solicita al estudiante que las relaciones de manera hipotética. Luego se propone construir una expresión formal con base en las ecuaciones de Lagrange, mediante un procedimiento recursivo del que se extrae la demostración del teorema como un esquema conceptual. Finalmente se aplicará este teorema en forma genérica, desprendida de las configuraciones específicas previas. Cabe aclarar que, si bien se ejemplifica con un tema de Mecánica lagrangiana, el método es aplicable de forma general, adecuándola a la materia y tema correspondientes.

Palabras clave: Teoría semiótico-cognitiva de aprendizaje; Mecánica lagrangiana; Teorema de Noether.

Abstract

This paper proposes a novel methodology, based on the semiotic-cognitive theory of learning (González, 2018), to address issues of lagrangian mechanics, a subject of the higher level of physics professors and Physics undergraduates, exemplified in Noether's theorem, which links the symmetry of mechanical configurations, with the corresponding first integrals of motion. Instead of the classical way of presenting the theorem, by means of a statement, demonstration and exemplification, we start with a table of properties (including symmetries and conservation of different specific configurations) which the student is asked to relate hypothetically, and then construct a formal expression based on the Lagrange equations, by means of a recursive procedure from which the proof of the theorem is extracted as a conceptual scheme, which will finally be applied in a generic form, detached from the previous specific configurations. Although it is exemplified with a subject of lagrangian mechanics, the method is applicable in a general way, adapting it to the corresponding subject and topic.

Keywords: Semiotic-cognitive theory of learning; lagrangian mechanics; Noether's theorem.

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Física en el nivel terciario contiene materias que se organizan, en muchos casos, mediante espacios de teóricas, prácticas y actividad experimental. En las clases teóricas es común la utilización de enfoques que tienen cierta connotación axiomática muy similar a clases de matemáticas en las que los conceptos se van desarrollando mediante teoremas. Estos teoremas, en realidad, constituyen el punto de llegada de una construcción previa, que simplemente es presentada a los estudiantes, pretendiendo que el simple encadenamiento lógico desde el enunciado hasta el fin de la demostración, será suficiente para la comprensión y elaboración conceptual. Esto suele tener al menos dos consecuencias no deseables. Por un lado, se omite un proceso de construcción progresiva de *simbolización*, que es en realidad el que se sigue para producir un sistema. Por otro lado, muchos estudiantes no logran realizar dicho proceso y por lo tanto conceptualizar, produciéndose así una desconexión entre las clases teóricas, prácticas y de laboratorio, lo que impide una integración conceptual entre estas instancias.

Esta situación cobra aún más relevancia en materias del ciclo superior con neto sesgo teórico como es el caso de Mecánica lagrangiana, que suele ser la primera materia de este tipo y constituye un verdadero salto cualitativo para el estudiante o hasta una traba para la continuidad de su carrera. Justamente uno de los temas conceptualmente más ricos e importantes de esta materia lo constituye el teorema de Noether (Vucetich, 2007), el cual establece, mediante la formulación lagrangiana, una vinculación entre *las simetrías* de una configuración con las *constantes de movimiento* correspondientes. Por ejemplo, dada una configuración mecánica (sistema mecánico específico) con simetría de traslación en un espacio homogéneo, el teorema de Noether demuestra, mediante la lagrangiana del sistema, que la aplicación de una traslación infinitesimal del sistema, conserva el impulso lineal del mismo.

La idea es, entonces, plantear, con base en el marco teórico de la próxima sección, un camino constructivo del teorema de Noether inverso al modelo axiomático clásico, que permita una *simbolización* progresiva y sólida de los diferentes conceptos involucrados. Forma de construcción que, de acuerdo con el método planteado, pueda *abstraerse* como un *esquema conceptual* susceptible de aplicación a cualquier otro tema, de cualquier materia del trayecto pedagógico. Una aclaración importante es que la metodología se plantea como un *ensayo* de aplicación de una teoría semiótica cognitiva de aprendizaje a una propuesta didáctica. Que en este caso se trate el teorema de Noether no obsta que la aplicación pueda hacerse a otros temas.

Se desarrollan, de manera simultánea a la aplicación, conceptos nuevos de la teoría. En este artículo se introducen por primera vez los conceptos de *coforma* (forma ligada al contenido), *generalización de contenido-forma* y *generalización de forma*. El ensayo se basó en una experiencia de implementación parcial de la propuesta didáctica mediante clases virtuales durante la pandemia y por lo tanto no sistemática y con elementos insuficientes para una evaluación. Sin embargo, sí fue útil para completar las ideas del ensayo e introducir nuevos elementos teóricos.

Una implementación sistemática de la propuesta didáctica y evaluación de sus resultados queda pendiente para cuando las condiciones la posibiliten en condiciones de presencialidad o bimodalidad.

II. MARCO TEÓRICO

El método presentado se basa en la teoría semiótica cognitiva del aprendizaje (TSCA) (González, 2012, 2018). Aquí puntualizamos algunos aspectos y desarrollamos otros. Esta concepción toma, en primer lugar, los desarrollos de García (2000, 2006), Piaget (2002), Piaget y García (1984) según los cuales los conocimientos se construyen con base en una *tríada dialéctica*, es decir, tres etapas solidariamente vinculadas, basadas en los *atributos* de un objeto conceptual, en *las relaciones* generadas por dichos atributos y en las *estructuras* en que se organizan estas relaciones y que por ello la denominamos también *organización*.

Pero luego se toma nota de que, para ser *significativo*, un concepto debe transformarse en un *signo: algo, para alguien (interpretante), en alguna relación (representamen), por algo (fundamento)* (Peirce, 1974; Magariños de Morentin, 2008; Marafioti, 2002; Vitale, 2002). Y por lo tanto de acuerdo con la clasificación de Peirce (1974) estos son o un *ícono* o un *índice* o un *símbolo*, cada uno, a su vez, por su propia definición, formando una triada con otros dos signos. De acuerdo con el enfoque de las *tríadas dialécticas* (García, 2000; Piaget-García, 1984) el pasaje de una etapa a otra se realiza mediante *generalizaciones* (y estas a su vez mediante *abstracciones*) clasificadas como *inductivas* o *completivas*, que a su vez tienen aspectos *proactivos* y *retroductivos*, lo que permite tener pasajes hacia adelante y hacia atrás entre etapas. Sin embargo, queda implícito y no debidamente enfatizado, que las mismas dependen de lo que Vygotsky (1995) define como *grado de generalidad*, que, cualitativamente, indica una ubicación en una recta de generalidad que va en la dirección *concreto→ abstracto*, desde la cual, un concepto es *construido*. Por lo tanto, una *generalización* y por lo tanto una *abstracción* consiste en una *operación* que incrementa el *grado de* generalidad como aspecto central y luego se *clasifica su tipo* en relación con su ubicación en la *tríada dialéctica.* Desde el punto de vista *semiótico*, el *tránsito* por la *tríada* es un proceso *dinámico* de *simbolización*.

Dado un *grado de generalidad*, la TSCA plantea que las tríadas dialécticas introducidas por Piaget y García (1984) *son las mismas* que las que definen el sistema de signos de Peirce. Y que la *retroducción* es la operación de *inferencia abductiva* introducida por Peirce (1974). Esta postulación permite establecer una correspondencia entre ambas concepciones, lo que incluye las *formas e inferencia*. La correspondencia planteada es: *atributos* ←→ *íconos (caso)*, *relaciones* ←→ *índices (resultado)*, *estructura* ←→ *símbolos (regla)*.

Por otro lado, la *primera etapa*, *icónica*, contiene elementos que serán considerados como *contenidos* con propiedades que resultan de generalizaciones de relaciones entre elementos constitutivos de etapas previas. La TSCA sostiene la idea de que el aprendizaje parte de un *resultado*, que es un *evento* que se le *presenta* al sujeto como una *configuración específica* constituida por elementos del contenido, y que genera un *problema, planteo* o *preguntas* que podrían *resolverse descubriendo relaciones* posibles entre los *atributos* de los elementos del contenido. A partir del *resultado* (justamente específico, único, realmente existente, y por eso *índice*), considerado como un *caso*, se enfoca *retroductivamente* en los atributos de los elementos, *construyendo relaciones* que lo *expliquen*. Se *infiere* qué *caso* podría corresponder al *resultado* a partir de la *relación hipotetizada.* Esto ocurre en la *segunda etapa*, que por eso será *indicial* y ligada al *contenido*. Esta *relación* así construida, constituye una *primera generalización*.

Por ejemplo, si se estuviera conceptualizando la conservación del impulso lineal y la energía en un choque de cuerpos, un *resultado* puede ser un choque específico de bolas de billar, un experimento de choque de cuerpos *planificado* en el laboratorio o un problema de choque con datos específicos. En dicho *resultado*, los elementos son los cuerpos con las características que los definen (elásticos o rígidos, su forma y tamaño), la superficie en que se desplazan (con o sin rozamiento) y los conceptos de impulso lineal y energía se consideran propiedades de dichos cuerpos. Por lo tanto, la *conservación*, se establecerá como una *relación específica* (para la *configuración específica* del *resultado*) de entre las posibles *relaciones* que se intenten y puedan encontrar, entre estos *atributos*.

Esta *relación*, cuando se plantea como *novedad* para quien la postula, constituye un *descubrimiento* y tiene carácter de *hipótesis* o *abducción*. En cambio, si las relaciones son ya conocidas y forman parte del *interpretante* del sujeto, o fueron explicadas mediante algún *ejemplo*, la *identificación* o *explicitación* del *caso* conduce a una *deducción* (aplicación de la regla *ya conocida* en forma genérica al caso para obtener el resultado) o a una *inducción* (la regla*, ya conocida* para algunos elementos, se *extiende* a los elementos del resultado)

En la segunda etapa, es posible producir *abstracciones sucesivas* y aplicar *operaciones* que puede realizar el sujeto en forma *deductiva* para obtener alguna(s) *propiedad(es)* de las *relaciones*, pero *aún* vinculada(s) con *elementos el contenido*. Por esto, a la forma que adquiere tal propiedad la denominamos *coforma*. La *secuencia* de operaciones sobre las relaciones hasta llegar a la *coforma* puede, a su vez, *abstraerse* (*extraerse*) constituyendo un *esquema conceptual*. Las *abstracciones sucesivas* y el *esquema conceptual* constituyen una *segunda generalización* denominada de *contenido-forma*. La *extensión* del *esquema conceptual* a otros contenidos implica una *generalización inductiva*, mientras que las generalizaciones que *adicionan propiedades* son las que Piaget y García denominaron *constructiva* o *completiva* (Piaget y García, 1984; García, 2000)*.*

Por último, la sucesión de *abstracciones* aplicadas a las *relaciones* va desligando progresivamente a la *coforma* del contenido específico hasta producir un *desprendimiento total* del contenido y la *coforma* se transforma en *forma*, lo que constituye una *generalización de forma*. Llegamos así a la tercera fase de la *tríada dialéctica*.

La forma se convierte en *símbolo* en dos sentidos: como expresión de su *grado de generalidad* en el *tercer nivel* de la tríada y como *forma desprendida del contenido*. Esta forma se organiza con otras del mismo tipo en la tercera etapa como *relaciones de relaciones*, formando una *estructura* u *organización de formas*. Asimismo, los *esquemas conceptuales* de la *coforma* ligados, *abstraídos* y *desprendidos del contenido*, se transforman en *esquemas conceptuales* de la *forma*, es decir, *instrumentos endógenos* susceptibles de ser eventualmente aplicados a otros contenidos.

III. METODOLOGÍA CONSTRUCTIVA

El teorema de Noether establece, mediante la formulación lagrangiana, una vinculación entre *las simetrías* de una configuración con las *constantes de movimiento* correspondientes. El método constructivo supone que ambas propiedades son conceptos ya elaborados previamente, por lo que diremos que corresponden a una formulación prelagrangiana. La formulación lagrangiana no hará sino expresar las conservaciones ya conocidas con una *forma* nueva que las tenga como casos particulares. Pero, a su vez, posibilitará encontrar *nuevas* conservaciones, con lo cual estará generando nuevo contenido.

Por ello, la primera tarea de un camino constructivo del teorema de Noether será trabajar los conceptos de simetría, esencialmente de traslación (homogeneidad del espacio), rotación (isotropía del espacio) y temporal, a lo cual se dedica una actividad completa. Por otro lado, en la práctica de repaso de la formulación prelagrangiana, se deben rever (relaborar) los *teoremas de conservación*.

La metodología constructiva de un concepto dado supone, en el marco de la TSCA, una construcción que va del *contenido* a la *forma*, como ya fue señalado. A su vez, y por eso mismo, supone una construcción conceptual *en etapas,* cuyas ubicaciones en el programa de una materia debe concordar con la introducción de los conceptos *subordinados*, en la *red de conceptos necesarios* para dicha construcción. En este caso consideramos cuatro etapas:

La etapa A de construcción de las relaciones entre *simetrías* y *conservación*, que corresponde a los *contenidos* con los que se construirá el teorema, principalmente con la formulación prelagrangiana y parcialmente con la lagrangiana, en su etapa inicial.

La etapa B en la cual con los *contenidos* introducidos se construyen las lagrangianas *específicas*, como *atributos* de las configuraciones específicas y se intentan formular las relaciones trabajadas en la etapa A. Esta etapa es inmediatamente posterior a la adquisición de los conceptos de lagrangiana y ecuaciones de Lagrange y puede planificarse como parte de los ejercicios de elaboración de estos conceptos.

En la etapa C se realiza la primera generalización con la que se considera en forma genérica (es decir simbólica, no específica) a la lagrangiana, pero manteniendo las coordenadas de las configuraciones específicas, de modo que la construcción utiliza parcialmente al contenido que, sin embargo, sigue siendo el referente de la generalización que nos llevará a la *forma* y que por ello llamaremos *generalización de contenido-forma*. Se desarrollan las *operaciones* que efectivamente construirán la *coforma* (forma aún ligada al contenido) y que construirán el *esquema conceptual de la generalización*.

Finalmente, en la etapa D dicha *coforma* se desprende de toda referencia al contenido específico transformándose en *forma pura*. Se produce una gener*alización de forma* aunque siempre a partir de lo construido en la etapa C, que se constituye así en un contenido de un *grado de generalidad* superior al de la configuración específica.

En la figura 1 se representa esquemáticamente la dinámica de generalizaciones ya explicadas producidas en la *tríada dialéctica*.

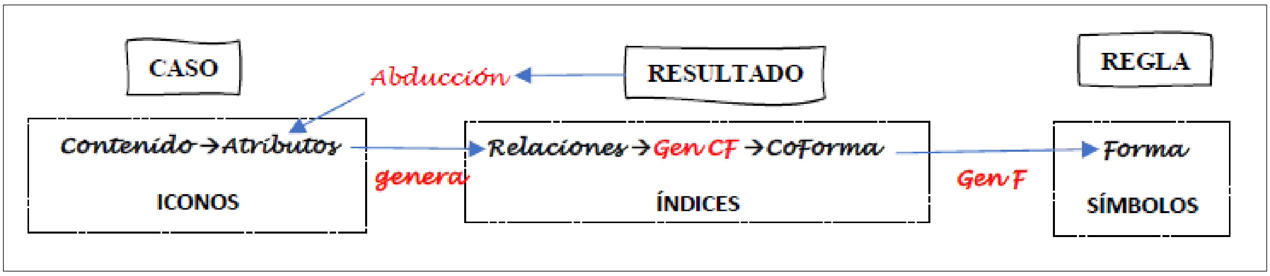

FIGURA 1. Esquema de evolución conceptual dada por la tríada dialéctica, desde el contenido a la forma, donde GenCF significa generalización de contenido-forma y GenF, es la generalización de forma.

A. Contenidos específicos y exploración de relaciones con la formulación prelagrangiana

En esta etapa, tanto las simetrías como las conservaciones se *presentan* como dos de las posibles *propiedades* obtenidas de manera teórica o experimental de algunas *configuraciones específicas*. Propiedades de los *contenidos* con los que se construirá la *forma* del teorema. Dicha *presentación*, en esta concepción, constituye un *resultado*, es decir, un conjunto de elementos (contenido) susceptible de *generar relaciones* entre sí a partir de sus *propiedades* o *atributos*.

Es importante que las configuraciones sean *específicas* pues cada una debe ser un *índice* (*signo* de la concreta existencia material de la configuración) a partir del cual se producirán las generalizaciones.

Entre estas propiedades presentadas, algunas pueden corresponder ya a la formulación lagrangiana, cuyo conocimiento previo al teorema incluye la construcción de la *lagrangiana* y las *ecuaciones de Lagrange*.

La presentación del resultado puede organizarse, por ejemplo, mediante una tabla en la que figuren al inicio de las filas las configuraciones específicas, cuyas propiedades, cada una encabezando una columna, deben obtener los estudiantes mediante recursos de la formulación prelagrangiana o de la F. L. según corresponda. Esta forma de organización facilita el establecimiento de relaciones entre propiedades y, en especial, entre simetrías y conservaciones. Y por ello, el *resultado* así presentado abre la posibilidad de *descubrir* las relaciones entre simetrías y conservaciones, estableciéndose como *hipótesis*, implícita o explícita, en lugar de recibirlas como enunciado de un teorema.

Tomando como referencias a las figuras 2 y 3 presentamos *un formato de tabla* que en la primera columna lista cuatro configuraciones específicas en cuatro filas, y en las cuatro columnas restantes se listan posibles propiedades como *potencial*, *simetrías, vínculos* y *conservaciones* (el estudiante puede agregar columnas con nuevas propiedades si lo considera pertinente). La tabla debe ser llenada por los estudiantes en dos etapas: primero una individual y luego mediante una discusión colectiva.

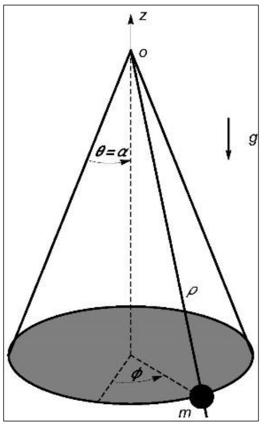

FIGURA 2. Cuenta de masa *m* engarzada en una varilla con un extremo fijo en el punto *o* que se mueve sobre la superficie externa de un cono. Esta configuración específica es *contenido*, dos de cuyas *propiedades* son la *simetría de rotación* y la *conservación de* L_z relacionadas por el teorema de Noether.

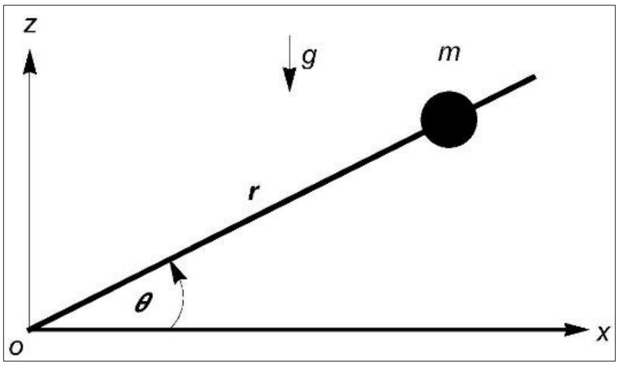

FIGURA 3. Cuenta de masa *m* engarzada en una varilla con un extremo fijo en el punto *o* que se mueve en un plano vertical. Esta figura representa a las configuraciones de las filas 2 y 4 de la tabla 1, donde se indican las *propiedades* de *simetría* y de *conservación* relacionadas por el teorema de Noether.

En la tabla I colocamos lo que se esperaría que respondan, que no es necesariamente lo que responderán. En la tabla deben colocarse solo las propiedades que consideren que se cumplan, de otra forma los espacios quedan vacíos.

TABLA I. Configuraciones específicas (primera columna) con algunas de sus propiedades (columnas 2 a 5).

Configuración	Potenciales	Simetrías	Vínculos (ecuaciones y fuerzas)	Conservaciones
1-Fig. 2 con 2 gl (ρ, ϕ*)*	$V_g = mgz$	S_ϕ, S_t	$\theta = \alpha, \quad \boldsymbol{f}_v = \lambda \nabla \theta$	L_z, E
2-Fig. 3 con 2 gl (r, θ*) o (x,z) según la relación que se quiera establecer*	$V_g = mgz$	S_x, S_t	$\boldsymbol{f}_v = 0$	p_x, E
3-Fig. 3 con1gl (r) y con $\theta = \Omega t$	$V_g = mgz$		$\theta = \Omega t, \boldsymbol{f}_v = \lambda(t) \nabla\, \theta$	
4-Fig. 3 con 2 gl y con $g = 0$		S_θ, S_x, S_z, S_t	$\boldsymbol{f}_v = 0$	$L_y, p_x,\ p_z, E$

Donde S_ξ es una simetría de rotación según el ángulo ξ; S_i una simetría de traslación según la coordenada cartesiana i; S_t es una simetría temporal. Mientras que L_i y p_i significan, componente i del momento angular o lineal y E es la energía mecánica. Este es un ejemplo de una elección posible de configuraciones, lo importante es que sean *configuraciones específicas*, con propiedades específicas, entendiendo por esto como el punto de partida de *sucesivas generalizaciones* basadas en ellas. Las propiedades de la tabla son, a su vez, *resultados,* ya que son casos particulares de generalizaciones previas (como los teoremas de conservación de la formulación prelagrangiana) aplicadas a estas configuraciones específicas que expresan, por ejemplo, relaciones entre fuerza resultante y conservación de momento lineal o torque resultante y conservación de momento angular.

B. Reconstrucción mediante la formulación lagrangiana de las relaciones obtenidas previamente

Logrado el establecimiento de relaciones entre las simetrías S_ξ, S_i, S_t y las conservaciones correspondientes L_i p_i , E estamos en condiciones de formularnos la siguiente pregunta: *¿cómo expresar estas relaciones entre simetrías y conservaciones mediante la formulación lagrangiana?*

En la tabla, las simetrías consideradas corresponden a coordenadas *cíclicas*, es decir la simetría referida a una sola coordenada y no a una combinación de ellas, lo que facilita la construcción progresiva de la *forma*. Y les proponemos trabajar solo con las simetrías espaciales, dejando para una elaboración posterior la simetría temporal.

Inicialmente dejamos trabajando a los estudiantes en la construcción de la lagrangiana de cada configuración y la utilización de las ecuaciones de Lagrange con el propósito de responder la pregunta formulada. La idea es lograr que deduzcan que las coordenadas asociadas a las simetrías de traslación y rotación son cíclicas y lleguen a las conservaciones correspondientes.

Este es el primer nivel de *generalización formal*, en el cual trabajamos con las *lagrangianas específicas* de las configuraciones de la tabla, que luego caracterizaremos.

Luego se formula una nueva pregunta acerca de cómo encontrar la conservación correspondiente a una simetría combinada de rotación y traslación como la helicoidal en la que las variables no son cíclicas, entonces la deducción no es tan directa ni sencilla e introduce la *necesidad* de un teorema de Noether.

C. Generalización de contenido-forma: coforma

Es un segundo nivel de generalización *formal*. En primer lugar, se realiza un salto en el *grado de generalidad* en relación con las configuraciones específicas de la tabla. Se produce una *abstracción* de la forma de la lagrangiana considerándola *simbólicamente*. La configuración ya no es la específica de la tabla, sino una más general que la tenga como caso particular. Consideramos una lagrangiana genérica pero que tenga la misma simetría, los mismos grados de libertad y las mismas coordenadas que la configuración específica, sin considerar *a priori* que alguna de las la coordenadas asociadas a la simetría sea cíclica.

Por ejemplo, en relación con la figura 3, la configuración presenta simetría de traslación según x, por lo que tomamos una *lagrangiana simbólica* de la forma $L(x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi})$. Por su parte, la configuración correspondiente a la figura 2 presenta una simetría de rotación según ϕ y tomamos, en este caso, una *lagrangiana simbólica* $L(\phi, \dot{\phi}, \rho, \dot{\rho})$. Sin embargo, no se asume *a priori* que x o ϕ sean cíclicas. En este caso la definición de simetría consiste en la existencia de una *transformación infinitesimal de coordenadas que deje invariante a la lagrangiana*, es decir, que cumpla que δL=0.

Justamente estamos trabajando con referencia a un contenido del que, mediante un *proceso de generalización*, parte de su *especificidad* se va *simbolizando*. Es decir, parte del *contenido* se va perdiendo y transformando en *forma* (cuando el contenido de referencia se *desprendió* totalmente de la *forma*), pero al coexistir ambos, *parte del contenido* y *forma en construcción*, será una *generalización* que denominaremos de *contenido-forma*.

En segundo lugar, para encontrar la *relación necesaria* entre *simetría y conservación*, desarrollamos *operaciones* con el mismo nivel o grado de generalidad: primero establecer la *operación de simetría* que deja invariante a la lagrangiana lo que es asumido como hipótesis. Segundo un *desarrollo en serie de Taylor* en las coordenadas y velocidades generalizadas que utilice la simetría. Tercero, las *ecuaciones de Lagrange* que son las que contienen la dinámica y nos llevan a la conservación correspondiente. Veamos esto para cada simetría.

C.1. Simetría de traslación

1. Consideramos primero la simetría de traslación, que tiene como referencias a las configuraciones 2 y 4 de la tabla 1, pero con una lagrangiana genérica y producimos la transformación infinitesimal constante y arbitraria $x' \rightarrow x + \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, para la cual $\dot{x}' = \dot{x}$ y entonces $\delta x = \epsilon$ y $\delta \dot{x} = 0$, que implican que $\delta L = 0$.

2. Ahora realizamos un desarrollo en serie de Taylor, tomando como dato la invariancia de la lagrangiana ante la traslación:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} = \frac{\partial L}{\partial x}\epsilon = 0 \tag{1}$$

3. Y utilizamos la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\epsilon = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = cte \tag{2}$$

De la ecuación 1 podríamos haber concluido que $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ y luego usar la ecuación de Lagrange correspondiente para llegar al mismo resultado de la ecuación 2, pero la idea de hacerlo así en este segundo nivel de generalización es *abstraer* la secuencia de las operaciones, lo que constituirá un *esquema conceptual de operaciones* que, junto a la abstracción de la lagrangiana, constituye la *generalización* de *contenido-forma. A* la *conservación* que es la derivación de esta generalización la denominamos *coforma*:

$$\boxed{\underbrace{\delta x = \epsilon, \delta \dot{x} = 0 \rightarrow \delta L = 0}_{S}} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}}_{ES}} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\epsilon}_{EL}} \rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = cte}_{C}} \quad (3)$$

Esquema conceptual:

*Simetría **S** → Expansión en serie **ES** → Ecuaciones de Lagrange **EL** → Conservación **C***

De esta manera, se probó que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = cte$ y que no depende de una lagrangiana particular, sino solo la propiedad de simetría de traslación según x que se asume como propiedad de la configuración a la cual corresponde dicha L, con lo cual se produce la generalización:

Generalización de contenido-forma: abstracción de contenido específico + esquema conceptual de operaciones

C. 2. Simetría de rotación

Podemos repetir los mismos pasos para la simetría de rotación cuyo referente de contenido es la configuración 1 de la tabla de propiedades, con solo hacer el reemplazo $x \rightarrow \phi$ en el punto i-

$$\boxed{\underbrace{\delta \phi = \epsilon, \delta \dot{\phi} = 0 \rightarrow \delta L = 0}_{S}} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \phi}\delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\delta \dot{\phi}}_{ES}} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \phi}\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\epsilon}_{EL}} \rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cte}_{C}} \quad (4)$$

En ambos casos tenemos el mismo esquema conceptual y de generalización: partiendo de la configuración específica se hace una abstracción simbólica de la lagrangiana, pero preservando las coordenadas y grados de libertad. Luego se aplican las operaciones que nos lleven a la construcción de la *coforma*, en este caso la conservación *relacionada* con la simetría. Obtenida esta, la generalización de contenido específico más el esquema conceptual de operaciones, constituye una *generalización de contenido-forma* y el estadio de construcción de la forma es una *coforma*.

C.3. Simetría helicoidal

Justamente, la pregunta acerca de cómo obtener la constante de movimiento para una simetría helicoidal al final de la etapa B implica aplicar el esquema conceptual de operaciones ya obtenido en los casos anteriores, planteando la simetría correspondiente al potencial con dependencia $V(\phi - \kappa z)$, lo que resulta en la siguiente secuencia:

$$\boxed{\underbrace{\delta z = \epsilon, \delta \phi = \kappa\epsilon, \delta \dot{z} = 0, \delta \dot{\phi} = 0 \rightarrow \delta L = 0}_{S}} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\delta \dot{z} + \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\delta \dot{\phi}}_{ES} =}$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \phi}\kappa\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\epsilon + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\kappa\epsilon}_{EL} \rightarrow \underbrace{p_z + \kappa\, p_\phi = cte}_{C}} \quad (5)$$

Como se ve, se vuelve sencillo aplicar el esquema conceptual, pues solo basta extenderlo a las dos variables respetando la operación correspondiente a la simetría helicoidal. Es decir, fue la aplicación de una *generalización inductiva* a las variables cuyas coordenadas siguen siendo específicas y corresponden a las configuraciones de la tabla aunque, al ser *simbólica* la lagrangiana, está *parcialmente desprendida* de la configuración como *contenido*.

D. Generalización de forma: la forma

Para que el *desprendimiento del contenido* sea completo y la *forma sea pura* es necesario *abstraer* ahora tanto las coordenadas que remitían a las configuraciones específicas, como los grados de libertad. Asimismo, se pueden generalizar también las formas de las simetrías haciéndolas depender de las coordenadas.

Esta constituye una *generalización de forma* que tiene como referente indicial a la *coforma* de la etapa C y como *forma* a la expresión final del teorema de Noether, lo que conforma una *díada dialéctica*. Se aplica el *esquema conceptual* previo a las coordenadas generalizadas *abstraídas* $q_i, i = 1..n$ que cumplen las propiedades de simetría $\delta q_i^{\epsilon} = \Psi_i \epsilon$, $\delta \dot{q}_i^{\epsilon} = \dot{\Psi}_i \epsilon$, $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\boxed{\underbrace{\delta q_i = \Psi_i \epsilon \, , \delta \dot{q}_i = \dot{\Psi}_i \epsilon \; \rightarrow \delta L = 0}_{S}} = \underbrace{\sum_i \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i}}_{ES} =$$

$$= \boxed{\underbrace{\sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \; = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) \; = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \epsilon\right)}_{EL} \; \rightarrow \; \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \; = cte}_{C}} \tag{6}$$

donde $\Psi_i = \Psi_i(q)$ puede depender de las coordenadas generalizadas.

Finalmente, como toda generalización, se obtiene con ella algún caso particular, por ejemplo, la conservación vinculada a la simetría helicoidal haciendo $q_1 = \phi$, $q_2 = z$, $\Psi_1 = \kappa$, $\Psi_2 = 1$. Entonces, aplicando la ecuación 6, obtenemos la conservación (ec. 5).

Se puede proponer a los estudiantes desarrollar esta *generalización de forma* utilizando los esquemas construidos en las tapas previas. Pero siempre la aplicación al caso particular es necesaria para cerrar el *ciclo de generalización*.

IV. CONCLUSIONES

El desarrollo desplegado se basa en la evidencia de la práctica de la actividad de enseñanza-aprendizaje de que todo nuevo conocimiento se construye con una orientación que va del *contenido* a la *forma*. O lo que es equivalente en la dirección de una *simbolización creciente*. Esto significa, de acuerdo al marco teórico introducido, que se produce un *proceso de generalización* que es necesario caracterizar.

En TSCA proponemos un proceso que parte de un *resultado* y que por *retroducción* enfoca en los *atributos* del *contenido*. A partir de estos, se *hipotetizan relaciones* que *expliquen el resultado* y que *correspondan* a un *caso*, es decir a una *configuración particular* de elementos del *contenido*, cuyos *atributos generan* las *relaciones*. En esta situación el *caso* se considera una *inferencia* basada en el *resultado* y en la *relación* a la que se suele denominar *regla* y a tal *inferencia* se la define como *abducción* (Peirce, 1974; Magariños de Morentin, 2008; Marafioti, 2002). Luego las *relaciones* se irán abstrayendo y *generalizando* para generar las formas. Las *generalizaciones* son de dos tipos: de *contenido-forma* generando la *coforma* y de *forma*.

La generalización de contenido-forma: tomando como referente el contenido específico (en todo o en parte) se producen abstracciones del mismo, así como una secuencia de transformaciones de las relaciones encontradas. De tal secuencia se abstrae un esquema de operaciones que lleva a la coforma.

La *generalización de forma*: cuando la *repetición* del procedimiento anterior pierde por completo la *referencia al contenido*, es decir *se desprende del contenido* la *coforma* y se *transforma* en *forma*.

Aquí se presenta un punto que es *clave* para la *planificación de la enseñanza*: *el grado de generalidad*. Este aspecto introducido por Vygotsky (1995) y que no es tomado en cuenta desde los enfoques teóricos (sí en la actividad práctica en la que le docente debe verificar el avance del aprendizaje) permite *controlar* la *pérdida de referencialidad* del *contenido específico* en un *proceso de generalización progresivo* que se adecue a las posibilidades de elaboración de diferentes estudiantes. Así, en nuestro ejemplo de desarrollo del teorema de Noether hemos tomado inicialmente *configuraciones específicas* con simetría de *traslación* y en forma separada con simetría de *rotación*, con el objeto de hacer las *abstracciones* correspondientes a las variables y a las operaciones. El *esquema conceptual*, que *es el mismo* para los dos tipos de simetría, se puede aplicar a un nuevo tipo de simetría, como por ejemplo la *helicoidal*, que *no es* una combinación de las simetrías de rotación y de traslación, sino una simetría en la que la variable angular se relaciona linealmente con la variable traslacional. Eso debe ser tenido debidamente en cuenta al *extender* dicho esquema a ambas variables. Por otro lado, de las *configuraciones específicas anteriores* solo aparecen la coordenada de traslación y la de rotación, pero con una *lagrangiana genérica* que resulta *invariante* frente a una transformación que respete la relación helicoidal.

La aplicabilidad de las *abstracciones* y del *esquema conceptual* correspondiente a las *sucesivas coformas* se va tornando casi inmediata y evidente. Pero, si así no fuera, un recurso adecuado podría ser la introducción de otras configuraciones específicas. Estas permitirían una mayor *amplitud* en los *grados de generalidad* que llevan de dichas *configuraciones* a las *formas* correspondientes mediante *procesos progresivos de generalización.*

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad Nacional de General Sarmiento por su apoyo y estímulo.

REFERENCIAS

García, R. (2000): *El Conocimiento en construcción*. Barcelona: Gedisa.

García, R. (2006): *Sistemas Complejos*. Barcelona: Gedisa.

González, R. (2012): *Problemáticas del Ingreso Universitario (Matemática y Taller de Ciencia). Enfoque semiótico-cognitivo (Piaget-García, Vygotski, Peirce)*. Los Polvorines: UNGS. Disponible en: http://www.ungs.edu.ar/cm/uploaded_files/publicaciones/469_EDU08%20-%20Problematicas%20del%20ingreso.pdf

González, R. (2018): Rolando García y la teoría de la equilibración. Ensayo de una teoría semiótica-cognitiva del aprendizaje basada en las tríadas dialécticas. En J. A. González Sánchez (Eds.) *¡No está muerto quien pelea!: homenaje a la obra de Rolando V. García Boutigue* (123-149). México: Universidad Nacional Autónoma de México. Disponible en: http://computo.ceiich.unam.mx/webceiich/docs/libro/00A-CompletoHomenaje%20RG_Web.pdf

Magariños de Morentin, J. (2008): *La semiótica de los bordes: apuntes de metodología semiótica*. Córdoba: Comunicarte.

Marafioti, R. (2002) (compilador): *Recorridos semiológicos*. Buenos Aires: Eudeba.

Peirce, C. S. (1974): *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Nueva Visión.

Piaget, J. (2002): *Las formas elementales de la dialéctica*. Barcelona: Gedisa.

Piaget, J., García, R. (1984): *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Piaget, J., García, R. (1997): *Hacia una lógica de las significaciones*. Barcelona: Gedisa.

Vitale, A. (2002): *El estudio de los signos. Peirce y Saussure*. Buenos Aires: Eudeba.

Vucetich, H. (2007): *Introducción a la mecánica analítica*. Buenos Aires: Eudeba.

Vygotsky, L. (1995): *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.