

# Conceito de massa e a relação massa-energia no conteúdo de relatividade especial em livros didáticos de física

Concept of mass and the mass-energy relationship in the special relativity content of the physics textbooks

Ricardo Capiberibe Nunes <sup>†1\*</sup>, Wellington Pereira de Queirós <sup>1</sup>, Jefferson Adriany Ribeiro da Cunha <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências do Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Bloco V – Rua Ufms - Vila Olinda– CEP 79070-900 - Campo Grande, MS, Brasil.

<sup>2</sup> Professor Adjunto IV do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, Av. Esperança, s/n - Campus Samambaia – CEP 74690-900 - Goiânia, GO, Brasil.

\*E-mail: [ricardo.capiberibe@ufms.br](mailto:ricardo.capiberibe@ufms.br)

Recibido el 7 de febrero de 2022 | Aceptado el 31 de marzo de 2022

## Resumo

A Teoria da Relatividade Especial promoveu, no começo do século XX, uma revolução paradigmática e introduziu novas interpretações sobre o conceito de massa (inércia) e como essa se relaciona com a energia. Ao longo dos anos, diversos autores tentaram apresentar esses conceitos para um público mais geral, por meio da divulgação científica e da transposição didática. Infelizmente, nessas adaptações tem se evidenciado a presença de alguns erros conceituais e inconsistências. Neste trabalho analisamos os tópicos de Relatividade Especial nos livros didáticos de física aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) – 2018 que abordam os conceitos de massa e a relação massa-energia, desta análise apontamos que estas obras apresentam incongruências. Por serem problemas persistentes e recorrentes, eles já se tornaram obstáculos epistemológicos e por isso exigem uma investigação mais cuidadosa que mostre a sua origem e se eles são ou se tornaram incongruentes. Por essa razão, nosso trabalho não se limita apenas em apontar em quais livros elas aparecem, mas traz uma ampla reflexão sobre cada uma dessas incongruências, dialogando com vários autores, visando servir de subsídio para licenciandos, professores, alunos e autores de livros e divulgadores da ciência.

**Palavras chave:** Ensino de ciências; Livros didáticos; Teoria da relatividade especial; Conceito de massa; Relação massa-energia.

## Abstract

The Theory of Special Relativity promoted, in the beginning of the 20th century, a paradigmatic revolution and introduced new interpretations on the concept of mass (inertia) and how it is related to energy. Over the years, several authors have tried to present these concepts to a more general public through scientific dissemination and didactic transposition. Unfortunately, these adaptations have shown the presence of some conceptual errors and inconsistencies. In this paper, we analyze the topics of Special Relativity in physics textbooks approved in the National Textbook Program (PNLD) – 2018

<sup>†</sup> Este é o nome civil da autora que é travesti, mas prefere ser chamada pela sua razão social: Clair de Luma Capiberibe Nunes e pelos pronomes de tratamento: ela/dela.

address the concepts of mass and the mass-energy relationship and we point out that these present inconsistencies. As they are persistent and recurrent problems, they have already become epistemological obstacles and therefore require a more careful analysis to show their origin and they are or have become incongruous. For this reason, our work is not limited to pointing out which books they appear in, but it brings a broad reflection on each of these inconsistencies, dialoguing with various authors, aiming to serve as a subsidy for undergraduates, teachers, students and book authors and publishers of the science.

**Keywords:** Science teaching; textbooks; Special relativity theory; Mass concept; Mass-energy relation.

## I. INTRODUÇÃO

No começo da década de 2000, poucos livros didáticos (LD) abordavam conteúdos de física moderna (Ostermann & Ricci, 2002), porém, as pesquisas e discussões em ensino de física apontam sobre a importância de se abordar tópicos de física moderna no ensino de ciências. Nessa ocasião, Ostermann & Ricci (2002, 2004) apresentaram dois artigos alertando sobre algumas inconformidades na abordagem do conteúdo de Teoria da Relatividade Especial (TRE) presentes em poucas obras brasileiras, que na ocasião, já tratavam desse assunto e em livros internacionais, que muitas vezes servem de fonte para licenciandos e autores de livros didáticos (Osterman, Ricci, 2004) apresentam: (1) uma abordagem inadequada sobre a contração relativística e aparência visual dos corpos que sofrem esse efeito; (2) a apresentação do conceito (problemático) de massa relativística. Em paralelo aos trabalhos de Ostermann & Ricci (2002, 2004), Martins (1998, 2012) apontou que livros didáticos e de popularização da ciência apresentam concepções equivocadas sobre a relação massa-energia,  $E = mc^2$ . Recentemente, Nunes, Queirós e Cunha (2021) mostraram que as incongruências apontadas por Ostermann & Ricci (2002) sobre a aparência visual de uma contração de Lorentz, ainda estão presentes nos doze livros didáticos de física aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2018).

Tendo vista que há poucos trabalhos que promovem discussões abordando o ensino de relatividade na educação básica (Sampaio *et al.*, 2019) propusemos fazer uma análise do conteúdo de TRE com todos os 12 LD de física aprovados pelo PNLD-2018, verificando como estes livros abordam o conceito de massa e a relação massa-energia, verificando se foram erradicadas as incongruências levantadas por Ostermann & Ricci (2004) e Martins (1998, 2012).

Assim, esse ensaio apresenta os resultados obtidos por essa análise e foi estruturado da seguinte forma: na seção *Incongruências Conceituais sobre a Relatividade Especial*, discutimos as incongruências denunciadas por Ostermann & Ricci (2004) e Martins (1998, 2012). Optamos por fazer uma discussão detalhada, dialogando com vários autores, para que o material produzido nessa seção, e suas respectivas subseções, possa servir de subsídios para licenciandos, professores, estudantes e autores de LD. Em seguida, detalhamos a metodologia que empregamos para fazer a análise. A seguir, apresentamos os resultados e discutimos, em subseções, cada uma das incongruências detectadas. Por fim, apresentamos as considerações finais.

Convém enfatizar que esse trabalho não visa minimizar a importância dos LD e seus respectivos autores. Estamos cientes que o LD é um material complexo, que envolve diversas dimensões e, por essa razão, esse trabalho não deve ser usado para emitir um juízo conclusivo sobre a qualidade dos LD. Estas discussões visam contribuir para o aperfeiçoamento do conteúdo dos LD e dar subsídios que auxiliem os educadores e educandos nas discussões sobre TRE.

## II. INCONGRUÊNCIAS CONCEITUAIS SOBRE A RELATIVIDADE ESPECIAL

Como dito na introdução neste ensaio, buscamos verificar se as incongruências conceituais em relatividade denunciadas por Ostermann & Ricci (2004) e Martins (1998, 2012) aparecem nos LD de física aprovados no PNLD-2018. Como estas inconsistências apareceram em LD aprovados no PNLD-2012 (Neves, 2014) e no PNLD-2015 (Jardim, Otoya, Oliveira, 2015), e são recorrentes em livros técnicos e de divulgação científica nacionais e internacionais (Ostermann, Ricci, 2004, Martins, 1998, 2012, Nunes, Queirós, 2020), trata-se então de concepções sobre a relatividade que já se enraizaram e se tornaram obstáculos epistemológicos, no sentido proposto por Bachelard (1996). A superação destes obstáculos, diz-nos Bachelard (1984) exige a prática da filosofia do não, isto é, aprender a dizer não a essas percepções incongruentes (Moreira, Massoni, 2016, p. 27).

Por isso, para superarmos essas incongruências conceituais, é necessário estudá-las em sua origem, mostrar porque elas são ou se tornaram incongruentes, dispendo de argumentos sólidos e um diálogo profícuo com outros autores, construindo uma interpretação mais adequada sobre a Teoria da Relatividade Especial. Por essa razão, optamos em discutir cada uma das três incongruências em subseções próprias. Em cada uma delas faremos uma pequena contextualização histórica sobre o conceito e apresentaremos um arsenal de argumentos sólidos que mostram porque elas são incongruentes e, por essa razão, a formação de um espírito científico exige que digamos não a elas.

## A. O Conceito de Massa Relativística

O conceito de massa apresenta uma rica história (Jammer, 1999, 2009), mas que muitas vezes é omitida dos livros didáticos e técnicos. Inicialmente, o conceito de massa confundia-se com as noções de peso ou de matéria (Jammer, 1999, 2009). Algumas narrativas atribuem ao filósofo natural e matemático italiano Galileu Galilei à definição moderna de massa, porém, isso não é verídico (Westfall, 1966, Jammer, 1999, 2009). Foi Newton, em seu *Principia*, que tentou fornecer uma definição rigorosa de massa, distinguindo a massa inercial, que ele associou a quantidade de matéria de um corpo (Newton, 2012a, p. 39), e a massa gravitacional, que ele associou a interação gravitacional, mas não especulou sobre a sua natureza (Westfall, 1993, Cohen, 1999, Jammer, 1999, 2009). Newton também realizou experimentos envolvendo pêndulos cujo bulbo era feito de diferentes materiais e concluiu que a massa inercial e massa gravitacional eram equivalentes (Whittaker, 1952, 1953, Westfall, 1993, Cohen, 1999, Newton, 2012). No século XVIII, Euler definiu a massa inercial como uma medida da inércia do corpo por meio do coeficiente entre força e aceleração (Jammer, 1999). Embora a obra de Newton e a definição de Euler tenham ganhado forte adesão, principalmente a partir do século XVIII (Whittaker, 1952, Westfall, 1966, 1993, Cohen, 1999, Jammer, 1993, 1999, 2009), porém alguns comentaristas e críticos denunciaram um caráter circular entre as definições de massa e força (Poincaré, 1902, Whittaker, 1952, Westfall, 1993, Cohen, 1999, Jammer, 1999, 2009).

No final século XIX, os desenvolvimentos na eletrodinâmica indicavam que a natureza última da massa poderia ser eletromagnética (Poincaré, 1895, 1900, 1902, 1904, 1905, 1906, 1908, Lorentz, 1912, 1931, Langevin, 1913, Whittaker, 1953, Martins, 1989, 2005, 2015, Darrigol, 1995, 1996, 2003, 2004, 2006, Miller, 1997). Ainda no final do século XIX, estudos envolvendo elétrons em altas velocidades, mostravam que sua inércia crescia à medida que sua velocidade se aproxima da velocidade da luz. O fato mais curioso é que a variação da massa inercial do elétron era diferente para as direções longitudinais e transversais, em relação ao movimento (Langevin, 1913, Whittaker, 1953, Fadner, 1988, Martins, 1989, 2005, 2012, 2015, Darrigol, 1995, 1996, 2003, 2004, 2006, Costa, 1995, Miller, 1997). Em 1898 e 1900, o físico Phillip Lenard (1862-1947) mediu a razão  $e/m$  (sendo  $e$  é a carga do elétron,  $m$  sua massa) para elétrons em velocidades próximas a da luz e detectou um aumento de sua massa (MARTINS, 2005, 2015). Estes resultados foram confirmados em 1901, pelo físico Walter Kaufmann (1871-1947) (Miller, 1997, Martins, 2005, 2015). Em 1902, o físico Max Abraham (1875-1922), mostrou que a variação da massa do elétron dependeria da direção em que a força externa é aplicada sobre a carga (Miller, 1997, Martins, 2005, 2015). De forma simplificada, Abraham mostrou que é mais fácil acelerar (ou desacelerar) um elétron do que defletir-lo, pois no primeiro caso a inércia é menor (Martins, 2005, 2015). Embora, o modelo matemático proposto por Abraham tenha sido contestado por Bucherer e, posteriormente, por Lorentz, todos eles concordavam com as implicações qualitativas apresentadas por Abraham (Fadner, 1988, Martins, 1989, 2005, 2012, 2015, Darrigol, 1995, 1996, 2003, 2004, 2006, Miller, 1997).

Paralelo a esses desenvolvimentos, em 1900, Henri Poincaré mostrou que a radiação também deveria apresentar uma massa inercial (Poincaré, 1900, Lorentz, 1912, 1931, Langevin, 1913, Whittaker, 1953, Kantor, 1954, Fadner, 1988, Martins, 1989, 2005, 2012, 2015, Darrigol, 1995, 1996, 2003, 2004, 2006, Miller, 1997). Posteriormente, Abraham e Hasenöhrl, mostraram que uma caixa perfeitamente espelhada, cheia de radiação, deveria sofrer um aumento de sua inércia (Lorentz, 1912, 1931, Langevin, 1913, Whittaker, 1953, Kantor, 1954, Fadner, 1988, Martins, 1989, 2005, 2012, 2015, Darrigol, 1995, 1996, 2003, 2004, 2006, Miller, 1997). Embora todos estes resultados tenham aparecido antes dos trabalhos de Einstein, eles foram assimilados pela Teoria da Relatividade. Assim, logo que a Teoria da Relatividade surgiu, os pesquisadores reconheceram três tipos de massa inercial (Langevin, 1913, Costa, 1995, Miller, 1997, Martins, 1989, 2005, 2012, 2015):

1. Massa cinética, associada a energia eletromagnética de uma carga em movimento;
2. Massa maupertuisiana de Poincaré, que está associado a quantidade de movimento (momento) dos corpos ponderáveis e da radiação;
3. Massa acelerativa, de Abraham, que está associada a força aplicada sobre um corpo ponderável. Essa massa acelerativa pode ser longitudinal (quando a força aplicada sobre o corpo é paralela ao vetor deslocamento dele) ou transversal (quando a força aplicada sobre o corpo é perpendicular ao seu vetor deslocamento).

Em seu ensaio de 1905, Einstein estudou a variação da inércia dos elétrons em movimento uniforme como uma consequência do princípio da relatividade e propôs que esse efeito deveria ser verificado em todos os corpos ponderáveis (Einstein, 1905a). Einstein (1905b) também deduziu uma regra para transformação das massas longitudinal e transversal, porém a dedução desta última estava incorreta (Cullwick, 1983, Miller, 1997, Martins, 2015). Em 1906, Planck corrigiu o erro de Einstein e apresentou a forma relativística da hamiltoniana (Planck, 1906, Whittaker, 1953, Miller, 1997, Martins, 2015). A partir da hamiltoniana, Planck definiu o momento generalizado e a partir dele, mostrou que todas as massas inerciais poderiam ser deduzidas a partir desse princípio (Planck, 1906, Whittaker, 1953, Miller, 1997, Martins, 2015). Em 1908 e 1909, G. N. Lewis e R. C. Tolman, desenvolveram, a partir do trabalho de Planck, os

fundamentos básicos da dinâmica relativística (Lewis, Tolman, 1909, Martins, 2015). Esse trabalho superou aos de seus predecessores porque desenvolvia a dinâmica relativística sem fazer uso de argumentos eletromagnéticos.

*Até esse momento, todos os estudos sobre a dinâmica relativística utilizavam o eletromagnetismo como ponto de partida. Lewis e Tolman produziram uma versão da dinâmica de partículas que era independente do eletromagnetismo, ou seja, que partia apenas de conceitos mecânicos — que é o modo como atualmente se apresenta essa teoria em livros didáticos. Um dos aspectos importantes do trabalho desses autores foi definir a massa como a razão entre o momentum e a velocidade — ou seja, tomando a equação  $p = m \cdot v$  como uma definição da massa. Desse modo, os antigos conceitos de massa longitudinal e massa transversal (que eram baseados na equação  $F = ma$ ) acabaram sendo abandonados.* (Martins, 2015, p. 239)

Matematicamente, o momento relativístico passou a ser definido a partir da expressão:

$$\vec{p} = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot \vec{v}$$

E o termo entre parêntesis convencionou-se a ser chamado de massa relativística:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

*Segundo essa interpretação, a massa newtoniana (de aqui em diante denotada por  $m$ ) seria tão somente o valor da massa de repouso da partícula, enquanto a massa relativística dependeria da velocidade da partícula em relação ao observador. Portanto, massa não mais seria uma propriedade exclusiva de uma partícula ou um corpo, mas um atributo físico relativo, dependente do observador. Talvez seu maior atrativo seja o de permitir continuar escrevendo o momentum linear relativístico com a forma matemática de seu correspondente newtoniano, apenas substituindo-se a massa newtoniana (massa de repouso) pela massa relativística.* (Ostermann, Ricci, 2004, p. 87)

Essa definição tem sido usada para justificar a razão pela qual um corpo ponderável não pode atingir velocidades iguais ou maiores que a luz, pois sua inércia relativística seria infinita ou imaginária (Ostermann, Ricci, 2004). Porém, como vimos nesse breve histórico, Searle e Thompson já haviam chegado a essa conclusão estudando o campo eletromagnético de elétrons em alta velocidade, anos antes do surgimento da relatividade especial. O fato que queremos chamar a atenção é que a introdução de uma massa relativística traz mais problemas conceituais do que benefícios.

*Um primeiro problema com essa noção é que ela induz a pensar que as expressões para outras grandezas mecânicas podem ser obtidas das correspondentes expressões newtonianas apenas substituindo-se, nelas, a massa newtoniana pela massa relativística. [...] Um segundo problema, e mais grave, com a noção de massa relativística, surge da identificação tácita de  $m_r$  com a medida da inércia de um corpo material que é, por definição, a massa inercial. Tanto na Mecânica Clássica como em sua versão relativística, a massa é sempre definida e medida por suas propriedades inerciais (massa inercial) ou gravitacionais (massa gravitacional). [...] Outra crítica que se pode fazer ao conceito de massa relativística é aquele pode dar ao aluno a impressão de que os efeitos relativísticos são devido a algo que acontece com o corpo, ao passo que eles são uma consequência das propriedades do espaço e do tempo. [...] A massa relativística não é uma grandeza relevante sequer do ponto de vista formal. Sob o ponto de vista histórico, isso fica evidente a partir da necessidade que houve de reformular o conceito newtoniano de momentum linear, para manter a covariância do princípio da conservação do momentum linear, e não o conceito newtoniano de massa. Outra indicação disso é fornecida pela relação existente entre a energia mecânica de uma partícula livre e o valor de seu momentum linear.* (Ostermann, Ricci, 2004, p. 88-90)

Além disso, nos invariantes, que aparecem na formulação 4-vetorial da teoria da relatividade especial, “o conceito de massa relativística não tem lugar nem qualquer função. [...] a massa que aparece nessa formulação é a massa newtoniana.” (Ostermann, Ricci, 2004, p. 90). Como essa formulação é a base da construção da Teoria da Relatividade Geral, “percebemos, então, que a noção de massa relativística é inteiramente supérflua e descartável na teoria da relatividade inteira, incluindo a gravitação.” (Ostermann, Ricci, 2004, p. 91). Do ponto de vista do ensino de ciências, o conceito de massa relativística deve ser suprimido nas aulas sobre relatividade.

*Com isso, se evitaria que o aluno fosse induzido, em seu contato formal com a RR [Relatividade Restrita], a utilizar este conceito; e, ao mesmo tempo, se reforçaria a ideia de que é o momentum linear relativístico que difere do newtoniano no limite de velocidades relativísticas, e não a massa relativística de sua correspondente newtoniana. Na RR se deveria, desde o início, falar apenas em uma massa, a massa newtoniana, evitando-se inclusive a expressão dúbia massa de repouso. Muito*

*mais adequado é introduzir o conceito de momentum linear relativístico do que o de massa relativística. O conceito de momentum linear newtoniano é bastante usado no ensino médio (a chamada quantidade de movimento), e valeria a pena mostrar como ele é generalizado na RR. Infelizmente, poucos livros didáticos disponíveis para o ensino médio o fazem.* (Okun, 1989, p. 99)

Dadas essas dificuldades, a tendência mais comum entre os educadores é considerar o conceito de massa relativística como supérfluo e potencialmente danoso, pois pode levar a uma concepção incongruente da teoria da relatividade (Hecht, 2009, Jardim, Otoya, Oliveira, 2015). Na proposta de reconstrução educacional da Teoria da Relatividade para o Ensino Médio, apresentada por Kamphorst *et al.* (2021) ao periódico *Science and Education*, o conceito de massa relativística não é abordado. Por outro lado, há alguns pesquisadores e educadores que insistem na relevância do conceito de massa relativística (Sandin, 1991; Hecht, 2009). Uma síntese dos argumentos a favor do ensino do conceito de massa relativística aparece em um manifesto de Sandin (1991). O principal argumento dos defensores é que “a massa relativística pinta um quadro da natureza que é bela em sua simplicidade” (Sandin, 1991, p. 1036) e remove-la de todos os livros didáticos seria uma forma de censura (Sandin, 1991, p. 1036).

Infelizmente, os argumentos de Sandin (1991) não superam as críticas levantadas por Okun (1989), Ostermann & Ricci (2004), Hecht (2009) e Jardim, Otoya & Oliveira (2015). Por essa razão, acreditamos que a abordagem mais adequada é aquela adotada por Kamphorst *et al.* (2021), isto é, não introduzir o conceito de massa relativística.

## B. Concepções Equivocadas Sobre a Relação Massa-Energia

Na subseção anterior, vimos que o surgimento da relação massa-energia,  $E = mc^2$ , está estreitamente conectado com os estudos sobre uma suposta natureza eletromagnética da massa e precede o surgimento da Teoria da Relatividade Especial (Ives, 1952, Fadner, 1988, Martins, 1989, 2005). Porém, foi com Einstein que esta relação foi popularizada e se tornou um símbolo da Teoria da Relatividade e da própria física. Segundo Martins (2012, p. 122): “a equação  $E = mc^2$  é uma das mais famosas de toda física, e tem sido apresentada de forma errônea tanto na divulgação científica quanto em livros didáticos”.

Outras incongruências estão relacionadas a maneira como a relação massa-energia é interpretada. Uma destas incongruências está relacionada sobre o limite de validade desta equação. “Praticamente todos os textos de divulgação sobre relatividade apresentam essa equação como sendo totalmente geral, ou seja, válida para todas as formas de energia: a toda massa  $m$  estaria associada uma energia  $E$  dada por  $E = mc^2$ , e vice-versa.” (Martins, 2012, p. 123). É verdade que Einstein (1905b) inferiu que essa relação fosse uma lei geral, porém, Planck (1907) mostrou que essa equação é válida apenas para um ponto material ou para um sistema fechado que não esteja sob ação de pressões externas. Planck (1907) mostrou que para sistemas extensos sobre ação de pressões externa, a variação da inércia do sistema é devido a variação da entalpia, portanto a relação massa-energia deve ser substituída por uma relação massa-entalpia (*cf.* Martins, 2012, p. 139-144). Einstein (1907) também mostrou que uma barra horizontal em movimento uniforme, sendo comprimida por forças de mesma intensidade em cada uma de suas extremidades, também apresentará um aumento de sua inércia, mas que essa relação não obedece a equação massa-energia. Também nos estudos sobre sistemas extensos e contínuos, “o próprio conceito de massa inercial maupertuisiana deve ser abandonado, sendo necessário utilizar um novo conceito, o de tensor de momento-energia” (Martins, 2012, p. 123). Além disso, uma pesquisa conduzida por Sílvia Petean, mostrou que a relação massa-energia não se aplica para o caso da energia potencial elétrica (Martins, 1989, 2012, Petean, 1991). Então, qual o limite de validade desta equação?

*Pode-se afirmar (embora não estejamos provando isso aqui) que a relação  $E = mc^2$  é válida apenas para sistemas isolados. Ela pode ser interpretada de forma correta da seguinte forma: "Se a energia total de um sistema isolado é  $E$ , então esse sistema tem uma massa inercial  $m = E/c^2$ ." (Martins, 2012, p. 123)*

A segunda incongruência associada a relação massa-energia é aquela denunciada por Martins (2012), que afirma que esta equação estabelece uma equivalência entre massa e energia e que por isso, na teoria da relatividade, pode-se eliminar o conceito de massa. Trata-se de um equívoco conceitual, como podemos ver na explanação longa, porém necessária de Martins (2012, p. 124-125):

*Mesmo se fosse uma relação geral, essa equação não poderia ser interpretada como uma equivalência nem como uma conversão entre massa e energia. Vejamos o motivo. De acordo com o próprio significado da palavra equivalente, duas coisas podem ser consideradas equivalentes quando "têm o mesmo valor", em algum sentido. Por exemplo, 32° Fahrenheit são equivalentes a 0 ° Celsius e 4,2 Joules são equivalentes a 1 caloria. Nesses dois exemplos, estamos utilizando nomes diferentes para indicar uma mesma coisa (certa temperatura, ou certa quantidade de energia). É como utilizar os nomes "estrela matutina" e "estrela vespertina" para indicar Vênus: trata-se de designações diferentes para um mesmo objeto. Se massa e energia fossem equivalentes, isso significaria que essas palavras representam a mesma coisa, descritas de formas*

diferentes. Nesse caso, a relação  $E = mc^2$  seria um simples tipo de definição e não seria uma lei física. Ninguém considera, por exemplo, que a equação de conversão de calorias para joules ou de temperatura Celsius para temperatura Fahrenheit seja uma lei física. Se  $E = mc^2$  estabelecesse uma equivalência entre massa e energia, essa relação jamais poderia prever fenômenos nem ser testada experimentalmente, e sua utilidade científica seria muito pequena. É fácil de ver, no entanto, que massa e energia não são nomes diferentes para uma mesma coisa. São grandezas físicas que são definidas e medidas de modos independentes. Em princípio, podemos medir a massa de um corpo, depois fornecer-lhe ou retirar-lhe energia (por exemplo, por passagem de calor) e medir novamente sua massa. Os processos de medida de massa e de energia são totalmente independentes, e podemos testar se as variações de massa e energia são proporcionais ou não, se dependem do tipo de energia fornecida, e se obedecem à relação quantitativa  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ . Essa relação foi confirmada, por exemplo, no estudo de reações nucleares. É claro que, na prática, não conseguimos fazer esse tipo de teste em experimentos de laboratório ordinários porque as variações de massa seriam inferiores à sensibilidade de nossos instrumentos; mas basta sabermos que isso é possível em princípio para vermos que se trata de uma lei física, com conteúdo empírico, que pode ser testada – e não uma definição disfarçada”.

Além disso, agrava o fato de que a massa total de um sistema pode ser aferida, porém o mesmo não se aplica a energia total, nesse caso só podemos medir a variação de energia do sistema (Martins, 2012, p. 125). Novamente, é verdade que Einstein (1905b) propôs que a inércia de um sistema seria uma medida de sua energia total, porém, como essa conclusão deriva da premissa que essa equação descreve uma lei geral, mas como, posteriormente, essa premissa foi refutada por Planck (1907) e pelo próprio Einstein (1907), a conclusão também deve ser rejeitada. Também é preciso ver que as deduções que estabelecem a correlação entre a variação e de massa e a variação de energia para corpos ponderáveis, tomam como ponto de partida o teorema trabalho-energia bem como a relação entre massa e velocidade (Martins, 2012, p. 125). Portanto, “estender essa relação para a massa de repouso da partícula exige um salto conceitual” (Martins, 2012, p. 125).

A terceira incongruência, também denunciada por Martins (2012), afirma que existe uma transformação entre massa em energia e vice-versa. Alguns autores ainda inferem a partir desse fato que a relatividade introduz um novo tipo de lei de conservação: a da massa-energia.

*Se a energia pudesse se transformar em massa, teríamos várias consequências estranhas. Em primeiro lugar, a energia não se conservaria pois, quando surgisse massa, desapareceria energia. Seria a soma  $E + m \cdot c^2$  que se conservaria. Em segundo lugar, se a equação  $E = m \cdot c^2$  for válida e, além disso, a energia puder ser transformada em massa, nem a massa nem a energia se conservam. No entanto, tanto a massa quanto a energia se conservam. Essa interpretação está equivocada. Suponhamos que um corpo A recebe calor do corpo B. Tanto a energia quanto a massa de A vão aumentar, e tanto a massa quanto a energia de B vão diminuir. A energia total do sistema e a massa total do sistema  $A + B$  são constantes. [...] [Portanto,] se tanto a massa quanto a energia se conservam, é claro que um não pode se converter ou transformar no outro. (Martins, 2012, p. 125-127)*

Alguns autores tratam a matéria como sinônimo de massa, e usam como “prova” da transformação de massa em energia, o processo de aniquilação entre um elétron e um pósitron. Trata-se também de uma interpretação equivocada:

*Consideremos agora um exemplo que é muitas vezes citado como “prova” de transformação de massa em energia: um elétron e um pósitron podem se aniquilar, produzindo dois ou três fótons de radiação  $\gamma$ . Nesse caso, se não levarmos em conta a massa maupertuisiana dos fótons, a massa não se conservaria; mesmo assim, seria inadequado falar em transformação de massa em energia, pois a energia total inicial é igual à energia total final. Se levarmos em conta a massa maupertuisiana da radiação  $\gamma$  tanto a massa quanto a energia se conservaram. Vemos, assim, que um ponto crucial em todas essas discussões é saber se podemos ou não atribuir uma massa à radiação. Como já dissemos, não se pode atribuir uma massa de repouso à luz no vácuo; mas pode-se associar a ela uma massa dinâmica. Muitas vezes, as pessoas que falam sobre transformação de massa em energia estão confundindo massa com matéria e energia com radiação. Na aniquilação de um elétron e um pósitron temos, inicialmente, matéria (em certo sentido); depois da aniquilação não temos matéria, mas temos radiação. Teríamos, assim, uma transformação de matéria (massa) em radiação (energia). Na física clássica, a massa era realmente identificada com a quantidade de matéria do corpo. No entanto, na teoria da relatividade, o conceito é muito diferente. Se matéria e massa fossem o mesmo conceito, não poderíamos falar sobre a variação de massa de uma determinada quantidade de matéria, quando essa matéria é acelerada. Da mesma forma, não se deve identificar os conceitos de energia e radiação. A radiação tem energia, mas um corpo material também tem energia. (Martins, 2012, p. 125-127)*

Acreditamos que o melhor exemplo para desconstruir a concepção de equivalência ou transformação entre massa e energia é aquele também proposto por Martins (2012):

*Enfim, vale a pena comparar a equação  $E = mc^2$  da relatividade com a relação  $E = hf$ , da teoria quântica. Por que motivo, no segundo caso, ninguém fala em equivalência entre energia e frequência, ou transformação de energia em frequência? Nos*

dois casos temos uma constante universal ( $c$  ou  $h$ ) relacionando duas grandezas físicas, que são proporcionais. Essas duas equações são exatamente da mesma natureza. Nenhuma delas estabelece nem equivalência nem possibilidade de transformação de uma coisa na outra. (Martins, 2012, p. 128)

Por fim, uma quarta incongruência bastante popular envolvendo essa relação, é aquela apontada por Nunes & Queirós (2020) na qual afirma-se que a luz não tem massa. Assim, convém perguntar: “pode-se associar uma massa à luz? Depende do tipo de massa. Não faz sentido associar uma massa acelerativa à luz, pois ela não pode ser acelerada (pelo menos no vácuo). Mas pode-se associar à radiação uma massa maupertuisiana.”. (Martins, 2012, p. 118). Esse foi o raciocínio empregado por Poincaré (1900) e, posteriormente, por Einstein (1906). Os dois pesquisadores concluíram que a massa associada da luz é dada por (Martins, 2012, p. 120):  $m = p/c = E/c^2$ .

Portanto, a luz apresenta um tipo particular de massa, porém não podemos associar essa inércia a uma massa de repouso, pois não existe referencial inercial onde a luz esteja em repouso. (Martins, 2012).

### III. METODOLOGIA

A partir das incongruências levantadas por Ostermann & Ricci (2002, 2004) e Martins (2012) e discutidas nas subseções da seção anterior, estabelecemos duas categorias *a priori* para orientar a análise dos livros didáticos (Tabela I).

**TABELA I.** Categorias conceituais para análise do conteúdo. Fonte: Autoral.

Categoria	Conceito	Breve Descrição
1	Conceito de massa na TRE	Não se deve introduzir o conceito de massa relativística. Discussões sobre a impossibilidade de se atingir ou superar a velocidade da luz no vácuo devem ser abordadas a partir do conceito de momento ou energia.
2	Relação massa-energia ( $E=mc^2$ )	Algumas formas de energia apresentam uma inércia e que se pode atribuir uma massa dinâmica à luz (mas não é possível estabelecer uma massa de repouso para luz). Além disso, não há transformação e equivalência entre massa (ou matéria) e energia. Não é uma lei geral.

O material para análise foram os capítulos que abordam de Teoria da Relatividade nos livros didáticos de Física aprovados pelo PNLD-2018, e podem ser vistas na Tabela II.

**TABELA II.** Livros didáticos analisados. Fonte: Autoral.

Código	Título	Autor(es)	Ano
A	Física 3: Eletricidade, Física Moderna	Biscoula, Bôas, Doca	2016
B	Física: Eletromagnetismo, Física Moderna	Guimarães, Piqueira, Carron	2016
C	Física 3: Interação e Tecnologia (2016)	Gonçalves Filho & Toscano	2016
D	Física 3: Eletromagnetismo, Física Moderna	Bonjorno <i>et al.</i>	2016
E	Compreendendo a Física: Eletromagnetismo e Física Moderna	Gaspar	2017
F	Física para o Ensino Médio 3: Eletricidade, Física Moderna	Kamamoto & Fuke	2017
G	Física em Contextos 3	Pietrocola <i>et al.</i>	2016
H	Física por Aula 3: Eletromagnetismo – Física Moderna	Barreto Filho & Silva	2016
I	Conexões com a Física 3: Eletricidade – Física do Século XXI	Martini <i>et al.</i>	2016
J	Física, Ciência e Tecnologia 3: Eletromagnetismo, Física Moderna	Torres <i>et al.</i>	2016
K	Ser Protagonista – Física 3	Válio <i>et al.</i>	2016
L	Física 3: Contexto & Aplicações	Máximo, Alvarenga, Guimarães	2017

Para cada obra analisada, atribuímos uma nomenclatura: **C**, quando o conceito é apresentado no livro de maneira correta; **I**, quando o conceito é apresentado no livro de maneira incorreta; **A**, quando o conceito não é apresentado no livro. Por fim, após a análise, construímos uma tabela para sintetizar os resultados obtidos (*cf.* Tabela III).

#### IV. RESULTADOS E ANÁLISES

A pesquisa evidenciou que apesar dos esforços do MEC e a constante reformulação dos livros didáticos, os problemas conceituais apontados por Ostermann & Ricci (2004) e Martins (1998, 2012) ainda estão presentes nos livros. A Tabela 3, sintetiza as incongruências encontradas em cada obra.

TABELA III. Ficha de análise e quantificação. Fonte: Autoral.

Livros Didáticos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Conceito de Massa	I	I	A	I	C	I	A	I	A	C	I	C
Relação Massa-Energia	I	I	I	I	I	I	A	I	I	I	I	I

Nas próximas subseções discutiremos detalhadamente cada uma destas incongruências.

##### A. O Conceito de Massa Relativística

Das obras analisadas, a dinâmica relativística está ausente nas obras [C], [G] e [I]. Das que abordam esse tema, somente as [E], [J] e [L] discutem os conceitos de momento e energia relativísticos sem fazer uso do conceito (problemático) de massa relativística. Convém observar que nenhuma destas obras discute o momento relativístico, porém dado o nível introdutório do assunto, não consideramos como um demérito.

Quanto a abordagem, a obra [J] e [L] apresentam de forma sucinta as expressões matemáticas da energia “total” e cinética relativísticas, porém somente a obra [L] discute que à medida que a velocidade tende à velocidade da luz no vácuo, a energia tenderá ao infinito (devido ao fator de Lorentz). Na obra [E], o autor faz uma longa discussão sobre a energia relativística, com base no trabalho de 1906 de Einstein e após deduzir a relação massa-energia, ele apresenta a forma relativística da energia cinética e da energia “total”. O autor não discute o que aconteceria se a velocidade do corpo fosse igual à velocidade da luz, mas esse fenômeno pode ser facilmente inferido pelo professor a partir da equação da energia relativística. Já as obras [A], [D], [F] e [H] trazem uma seção intitulada massa relativística, incorrendo nas incongruências discutidas anteriormente. Destas obras, destacamos que a obra [A] [F] e [H] enfatizam que o aumento da massa não significa um aumento da quantidade de matéria, apenas da inércia. As obras [B] e [K], embora não empreguem o nome *massa relativística*, porém comentem as mesmas incongruências discutidas anteriormente. A obra [B] também enfatiza que “o aumento na inércia (aumento de massa) de uma partícula em virtude de sua velocidade não significa aumento da quantidade de matéria” (Guimarães, Piqueira, Carron, 2016, p. 199).

##### B. Concepções Equivocadas sobre a Relação Massa-Energia

Dos doze livros analisados, somente a obra [G] não aborda a relação massa-energia. Porém, todos os 11 livros cometem uma ou mais incongruências envolvendo essa equação, discutidas na seção 2.3. Primeiro, convém observar que nenhuma destas obras discute a existência de uma massa dinâmica associada à luz, elas se limitam em afirmar que a massa de repouso da luz é nula.

Sobre a afirmação de que a relação massa-energia estabelece uma relação de equivalência (segunda incongruência) entre essas duas grandezas, elas aparecem de forma explícita nas obras [A], [C], [D], [E], [F], [I], [J] e [L]. Nas obras [A], [C], [D], [F] e [I], o termo *equivalência* é empregado sem comentários adicionais. Na obra [J] o autor emprega o raciocínio de uma equivalência, como a de calor e energia ou entre as temperaturas de diferentes escalas termométricas:

*Nessa equação, em que a energia  $E_0$  é medida em joule (J),  $m_0$  é medida em quilograma (kg) e  $c$  é medida em metro por segundo (m/s), pode-se constatar, por exemplo, que 1 g de massa de um corpo equivale a  $9 \cdot 10^{13}$  J de energia, que, por sua vez, é **equivalente** a  $2,5 \cdot 10^7$  kWh (considerando  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ ). Supondo que uma residência consuma, em média, 500 kWh de energia por mês, isso quer dizer que 1 g de massa poderia abastecer essa casa por 50000 meses ou aproximadamente 4166 anos (isso, claro, numa situação hipotética na qual tivéssemos um aproveitamento de 100 % nas reações envolvidas). Sabendo desse potencial, o processo de conversão de massa em energia é utilizado nos reatores das usinas atômicas. A maioria dos físicos de partículas, entretanto, utiliza outra unidade em vez do joule, o chamado elétron-volt (eV), sendo sua relação igual a:  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . (Barreto Filho, Silva, 2016, p. 214, Destaque Nossos).*

Uma discussão semelhante, mas mais sucinta também aparece na obra [L]

*Einstein chegou à equação  $E_0 = mc^2$  relacionando a massa de um objeto com uma nova forma de energia, a energia de repouso, que engloba todas as formas de energia contidas no objeto, e descobriu serem equivalentes os conceitos de energia e massa. Assim,  $1 \text{ kg} = (3,0 \cdot 10^8)^2 \text{ J} = 0,9 \cdot 10^{17} \text{ J}$ .* (Alvarenga, Máximo, Guimarães, 2017, p. 249)

E também na obra [E]:

*Em outras palavras, massa e energia são duas manifestações distintas na mesma realidade física, e o valor  $c^2$  pode ser entendido apenas como um fator de transformação entre essas grandezas. Assim, adotando dois algarismos significativos, as relações entre a unidade de massa,  $1,0 \text{ kg}$  e a de energia,  $1,0 \text{ J}$ , sendo  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , são:  $1,0 \text{ kg} = 9,0 \cdot 10^{16} \text{ J}$  e  $1,0 \text{ J} = 1,1 \cdot 10^{17} \text{ kg}$ . Como a massa expressa em joules ou a energia em quilogramas resultam em valores numéricos em geral pouco convenientes, costuma-se utilizar o elétron-volt (eV) e seus múltiplos como unidade prática de massa e energia, entendidas como uma só grandeza – **massa-energia**.* (Gaspar, 2017, p. 225-226)

Veja que o autor comete o equívoco conceitual de afirmar que a relatividade funde massa e energia (e, por conseguinte as suas leis de conservação) em uma única entidade que ele chama de massa-energia. O que a relatividade introduz, no estudo de sistemas extensos e contínuos, é um tensor momento-energia, uma vez que o conceito de massa maupertuisiana mostra-se inadequado no estudo desses sistemas (Martins, 2012).

Quanto a terceira incongruência, aquela que afirma que massa pode ser convertida (ou transformada) em energia, ela aparece nas obras [A], [B], [D], [E], [H], [I], [J], [K] e [L]. Abaixo apresentamos os trechos onde os autores falam de transformação de massa em energia:

[A]: *“Todas as reações que liberam energia, inclusive as reações químicas exotérmicas, fazem-no devido a uma perda de massa, que se transforma em energia”.* (Biscoula, Bôas, Doca, 2016, p. 273).

[B]: *“Essa expressão representa a famosa equação de Einstein que relaciona as transformações entre matéria e energia. É usada para o cálculo de transformação de massa em energia, ou vice-versa.”* (p. 199).

[D]: *“O quadrado da velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo ( $c^2$ ) corresponde ao fator de conversão da massa em energia e vice-versa”* (Bonjorno et al., 2016, p. 220). *E, mais a frente, os autores escrevem: “Essa fórmula trata da interconversão de massa e energia”* (p. 221).

[E]: Embora a palavra transformação de massa em energia não seja discutida no corpo do texto, ela aparece no exercício 5, cujo enunciado é: *“qual massa de um corpo que, se fosse transformada em energia elétrica, poderia fornecer energia durante 10 anos a uma casa que consome 300 kWh por mês?”* (p. 226).

[H]: *“O processo de conversão de massa em energia é utilizado nos reatores das usinas atômicas. [...] Sabendo desse potencial, o processo de conversão de massa em energia é utilizado em reatores nucleares”* (p. 214).

[I]: *“Nesse processo, os 4 milhões de toneladas de hidrogênio que não viram hélio são convertidos em energia.”* (p. 241).

[J]: *“Com a teoria da relatividade especial, Einstein mostrou que a massa pode ser considerada uma ‘forma especial’ de energia. Massa pode ser convertida em energia e energia pode ser convertida em massa”* (p. 200).

[K]: *“Em outro artigo, também publicado em 1905, Einstein provou a equivalência entre massa e energia, formulando sua famosa equação:  $E = m c^2$ . Essa equação simples implica que a massa pode ser convertida em energia, e vice-versa.”* (p. 256).

[L]: *“Existem reações em que uma quantidade de matéria pode desaparecer, surgindo energia em seu lugar. Existem também reações que criam matéria, caso tenhamos um suprimento adequado de energia”* (p. 249).

Observe que as obras [B] e [L] apresentam um agravante: elas tratam massa como sinônimo de matéria, uma vez que inferem, a partir da relação massa-energia, que matéria pode ser transformada em energia. Na obra [I], essa incongruência fica subentendida quando os autores afirmam que o *hidrogênio* é convertido em energia.

Quanto a quarta incongruência a interpretação inadequada sobre o processo de aniquilação entre o elétron e o pósitron, ou o processo inverso de criação, ela só aparece superficialmente na obra [L].

É importante enfatizar que destas 11 obras, somente o livro E enfatiza ao leitor que a relação massa-energia é apenas válida para sistemas isolados. Por outro lado, nenhum dos 11 livros alertam que a relação massa e energia não pode ser aplicada para algumas formas de energia, como a energia potencial elétrica. Os autores também chamam a energia relativística de energia total, o que é uma incongruência conceitual, pois essa equação não leva em consideração as energias de configuração (potencial) do sistema.

## V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise sobre como o conceito de massa e a relação massa-energia é abordado nos tópicos de Teoria da Relatividade Especial nos livros didáticos aprovados no PNLD-2018, mostra que apesar dos alertas de Ostermann & Ricci (2004) e Martins (1998, 2012) sobre as incongruências que devem ser evitadas, estas ainda ocorrem em algumas obras. Mais precisamente, o conceito (problemático) de massa relativística, muito difundido em livros técnicos internacionais (Ostermann, Ricci, 2004), apresenta uma adesão menor nos livros didáticos nacionais: três livros optaram em não discutir dinâmica relativística e três livros apresentam essa discussão sem recorrer a esse termo.

Já a relação massa-energia, cujas incongruências são comuns tanto em livros técnicos, como apontam Ostermann & Ricci (2004) e Martins (2012), e livros de divulgação científica, como denúncia Martins (1998, 2012), aparece em 11 das 12 obras analisadas. Os autores ainda defendem que essa relação estabelece uma equivalência, no sentido lato, entre massa e energia, e, inferem com base nessa equivalência, que a massa pode se transformar em energia (ou vice-versa). A obra de Gaspar (2017) estabelece o “princípio de conservação da massa-energia”, o que é inadequado (cf. seção 2.3). Pelo menos duas obras (Guimarães, Piqueira, Carron, 2016, Alvarenga, Máximo, Guimarães, 2017), ainda tratam *massa* como sinônimo de *matéria*, e deduzem que *matéria* pode se transformar em *energia*. Esse tipo de argumento afirma que uma equação que relaciona duas grandezas físicas diferentes, como Energia e Massa, por meio de uma constante, como a velocidade da luz no vácuo ao quadrado, ontologicamente significa que essas grandezas são equivalentes e/ou podem se transformar uma na outra. Isso leva a implicações absurdas, como afirmar que a relação entre Energia e Frequência, mediada pela constante de Planck, permite concluir que Energia é equivalente a Frequência ou que energia pode se transformar em Frequência ou, ainda, por meio da transitividade, de que Massa é equivalente a Frequência e uma pode se transformar na outra.

Acreditamos que essas incongruências não devem ser minimizadas e ignoradas por educadores da educação básica e autores de livros didáticos, pois

*Dado o caráter violador do senso comum intrínseco à Relatividade Restrita, tais tarefas são inevitáveis ao professor. Omitilas, simplesmente, é transmitir erroneamente o conteúdo, reforçando não somente as concepções espontâneas que o aluno evoca da simples leitura do texto, mas também todas aquelas advindas do uso e abuso de temas da Relatividade Restrita na literatura não-científica, no cinema e na televisão, correndo o sério risco de transformar educação científica em ficção científica. (Ostermann, Ricci, 2002, p. 188)*

Como expressamos na *Introdução*, não temos por intenção desmerecer os LD e seus autores, nem apresentar um veredito final sobre a qualidade desse material. Acreditamos que não existe obra completa ou imune a erros, por isso é importante realizar uma leitura crítica, comparando com outras obras e com estudos correlatos na literatura acadêmica. Esse tipo de ceticismo moderado, caracterizado por uma atitude crítica e reflexiva, deve ser estimulado entre os educandos, principalmente em uma época que está sendo definida por discursos de pós-verdade e fake news.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS/MEC – Brasil.

## REFERENCIAS

- Bachelard, G. (1984). *A Filosofia do Não; O Novo Espírito Científico; A Poética do Espaço*. Abril Cultural.
- Bachelard, G. (1996). *A formação do Espírito Científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Contraponto.
- Barreto Filho, B. Silva, C. X. (2016). *Física aula por aula 3: eletromagnetismo, física moderna*. (3 ed.). FTD.
- Biscuola, J. G. Bôas, N. Doca, R. H. (2016). *Física 3: eletricidade, física moderna*. (3 ed.). Saraiva.
- Bonjorno, J. R. et al. (2016). *Física 3: eletromagnetismo, física moderna*. (3 ed.). FTD.

- Cohen, I. B. A Guide To Newton's Principia. (1999). In: Newton, I. *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press.
- Costa, M. A. (1995). *Introdução à Teoria da Relatividade*. (2 ed.). Editora UFRJ.
- Cullwick, E. G. (1981). Einstein And Special Relativity. Some inconsistencies in his electrodynamics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 32(2), 167–176.
- Darrigol, O. (1995). Henri Poincaré's Criticism of Fin de Sicle Electrodynamics. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 26(1), 1–44.
- Darrigol, O. (1996). The Electrodynamical Origins of Relativity Theory. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, 26(2), 241- 312.
- Darrigol, O. (2003). *Electrodynamics from Ampere to Einstein*. Oxford University.
- Darrigol, O. (2004). The Mystery of the Einstein–Poincaré Connection. *Isis*, 95(4), 614-626
- Darrigol, O. (2006). The Genesis of the Theory of Relativity. In T. Damour, O. Darrigol, V. Rivasseau (Eds.), *Einstein, 1905–2005 - Poincaré Seminar 2005*. (pp. 1-31). Birkhäuser.
- Einstein, A. (1905a). Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, 322(10), 891–921.
- Einstein, A. (1905b). Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik*, 323(13), 639–643.
- Einstein, A. (1906). Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie. *Annalen der Physik*, 325(8), 627–633.
- Einstein, A. (1907). Über die von Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie. *Annalen der Physik*, 23(7): 371-384.
- Fadner, W. L. (1988). Did Einstein really discover “ $E=mc^2$ ”? *American Journal of Physics*, 56, 114-122.
- Gaspar, A. (2017). *Compreendendo a Física: eletromagnetismo e física moderna*. (3 ed.). Ática.
- Gonçalves Filho, A. Toscano, C. (2016). *Física 3: interação e tecnologia*. (2 ed.). Leya Brasil.
- Guimarães, O. Piquiera, J. R. Carron, W. (2016). *Física: eletromagnetismo e física moderna*. (3 ed.). Saraiva.
- Hecht, E. (2009). Einstein Never Approved of Relativistic Mass. *The Physics Teacher*, 47(6), 336–341.
- Ives, H. E. (1952). Derivation of the Mass-Energy Relation. *American Journal of Physics*, 42, 540-543.
- Jammer, M. (1993). *Concepts of Space: The History of Theories of Space in Physics*. Dover.
- Jammer, M. (1999). *Concepts of Force: A Study in the Foundations of Dynamics*. Dover.
- Jammer, M. (2009). *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics*. Princeton University Press.
- Jardim, W. T. Otoyá, J, Oliveira, C. G. S. (2015). A teoria da relatividade restrita e os livros didáticos do Ensino Médio: Discordâncias sobre o conceito de massa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(2), 1-7.
- Kamamoto, K. Fuke, L. F. (2017). *Física para o Ensino Médio 3: eletricidade, física moderna*. (4 ed.). Saraiva.
- Kamphorst, F. et al. (2021). An Educational Reconstruction of Special Relativity Theory for Secondary Education. *Science & Education*. DOI: 10.1007/s11191-021-00283-2.

- Kantor, W. (1954). Inertia of Energy. *American Journal of Physics*, 22, 528-541.
- Langevin, P. (1913). L'inertie de l'énergie et ses conséquences. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3(1): 553-591.
- Lewis, G. N. Tolman, R. C. (1909). The Principle of Relativity, and Non-Newtonian Mechanics. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 44, 709–726.
- Lorentz, H. A. (1912). Sur la masse de l'énergie. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 2, 139-153.
- Lorentz, H. A. (1931). *Lectures on theoretical physics*. MacMillan.
- Martini, G et al. (2016). *Conexões com a Física 3: eletricidade, física do século XXI*. (3 ed.). Moderna.
- Martins, R. A. (1982). Force Measurement and Force Transformation in Special Relativity. *American Journal of Physics*, 50, 1008-1011.
- Martins, R. A. (1989). A Relação Massa-Energia e Energia Potencial. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 15, 265-300.
- Martins, R. A. (1998). Como Distorcer a Física: Considerações sobre um Exemplo de Divulgação Científica 2 - Física moderna. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 15(3), 265-300.
- Martins, R. A. (2005). A dinâmica relativística antes de Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(1), 11-26.
- Martins, R. A. (2012). *Teoria Relatividade Especial*. Livraria da Física.
- Martins, R. A. (2015). *A Origem Histórica da Relatividade Especial*. Livraria da Física.
- Máximo, A. Alvarenga, B. Guimarães, C. (2016). *Física 3: contexto & aplicações*. (2 ed.). Scipione.
- Miller, A. I. (1997). *Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and Early Interpretation (1905–1911)*. Springer.
- Moreira, M. A. Massoni, N. T. (2016). *Noções Básicas de Epistemologias e Teorias de Aprendizagem como Subsídios para a Organização de Sequências de Ensino-Aprendizagem em Ciências/ Física*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Neves, J. (2014). *A Uma Análise do Conteúdo da Relatividade Restrita nos Livros Didáticos do Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba.
- Newton, I. (2012). *PRINCIPIA. Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. EdUSP.
- Nunes, R. C. Queirós. W. P. Doze mitos sobre a Teoria da Relatividade que Precisamos Superar. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 37(2), 531-573.
- Nunes, R. C. Queirós. W. P. Cunha, J. A. R. (2021). A aparência visual da contração relativística nos livros de física aprovados no Programa Nacional do Livro Didático-2018. *Revista De Enseñanza De La Física*, 33(3), 101–113.
- Okun, L. B. (1989). The Concept of Mass. *Physics Today*, 42(6), 31-36.
- Ostermann, F. & Ricci, T. S. F. (2002). Relatividade restrita no ensino médio: Contração de Lorentz-Fitzgerald e aparência visual de objetos relativísticos em livros didáticos de física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 19(2), 176-190.
- Ostermann, F. & Ricci, T. S. F. (2004). Relatividade restrita no ensino médio: os conceitos de massa relativística e de equivalência massa-energia em livros didáticos de física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 21(1), 83-102.
- Petean, S. (1991). *O Problema da Relação Massa-Energia Potencial para Interações Eletromagnéticas*. (Dissertação de Mestrado em Física). Universidade Estadual de Campinas.

- Pietrocola, M. *et al.* (2016). *Física em Contextos 3*. Editora do Brasil.
- Planck, M. (1906). Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik. *Vorgetragen in der Sitzung vom*, 23, 136–141.
- Planck, M. (1907). Zur Dynamik bewegter Systeme. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, Erster Halbband*, 13, 542-570.
- Poincaré, H. (1895). A propos de la Théorie de M. Larmor, *L'Éclairage électrique*, 5, 5–14.
- Poincaré, H. (1900). La théorie de Lorentz et le Principe de Réaction. *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, n. 5, 252-278.
- Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion.
- Poincaré, H. (1904). L'Etat et l'Avenir de la Physique mathématique. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 28, 302-324.
- Poincaré, H. (1905). Sur la Dynamique de l'Électron. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 140, 1504-1508.
- Poincaré, H. (1906). Sur la Dynamique de l'Électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 21, 129-176.
- Poincaré, H. (1908). La Dynamique de l'Électron. *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 19, 386–402.
- Sampaio, W. *et al.* (2019). As Teorias da Relatividade no Ensino Básico: Uma Revisão de Literatura para Traçar o Perfil dos Trabalhos Publicados no Brasil entre 2000 e 2018. *Conexões - Ciência e Tecnologia*, 13(4), 45-53.
- Sandin, T. R. (1991). In defense of relativistic mass. *American Journal of Physics*, 59(11), 1032–1036.
- Silva, A. G. *et al.* (2019). Análise da História da Teoria da Relatividade Restrita em Livros Didáticos do Terceiro Ano do Ensino Médio indicados no PNLEM 2015/2017. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, 13(4), 1-13.
- Torres, C. M. A. *et al.* (2016). *Física, Ciência e Tecnologia 3: Eletromagnetismo, Física Moderna*. (4 ed.). Moderna.
- Válio, A. B. M. *et al.* (2016). *Ser Protagonista – Física 3*. (3 ed.). SM Brasil.
- Westfall, R. S. (1966). The Problem of Force in Galileo's Physics, In C. L. Golino (Ed.), *Galileo Reappraised*. (pp. 67–95). University of California Press.
- Westfall, R. S. (1993). *The Life of Isaac Newton*. Cambridge University Press.
- Whittaker, E. T. (1952). *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol 1. American Institute of Physics.
- Whittaker, E. T. (1953). *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol 2. American Institute of Physics.