REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

VOLUMEN 33, NÚMERO 3 | JULIO-DICIEMBRE 2021 | PP. 167-182

ISSN: 2250-6101

O que é o paradoxo EPR? Uma reconstrução didática do artigo de Einstein, Podolsky e Rosen

What is the EPR paradox? A didactic reconstruction of the article by Einstein, Podolsky and Rosen

Ramon Wagner[1]*, Alfonso Werner da Rosa[2], Nathan Willig Lima[1], Matheus Monteiro Nascimento[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves 9500 - Caixa Postal 15051 - CEP 91501-970 - Porto Alegre, RS, Brasil.

[2]Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, BR 285, São José – CEP 99052-900 – Passo Fundo, RS, Brasil.

***E-mail: ramonwagner1934@hotmail.com**

Recibido el 16 de julio de 2021 | Aceptado el 18 de noviembre de 2021

Resumo

O objetivo deste trabalho é proporcionar uma reconstrução didática do artigo de Einstein, Podolsky e Rosen, introduzindo os aspectos teóricos necessários para a compreensão do trabalho (os quais usualmente são apresentados nas fases iniciais dos cursos de Mecânica Quântica), discutindo a estrutura do argumento original e explicando o paradoxo a partir das próprias colocações retiradas do artigo. A partir da apresentação que estamos propondo, o paradoxo EPR pode ser apresentado em disciplinas introdutórias de Mecânica Quântica da graduação (para bacharelado e licenciatura), viabilizando a compreensão da discussão sobre a completude da teoria quântica proposta por Einstein, Podolsky e Rosen e o entendimento da gênese do conceito que, posteriormente, ficaria conhecido como emaranhamento quântico.

Palavras-chave: EPR; Teoria quântica; História e filosofia; Fontes primárias; Emaranhamento.

Abstract

The objective of this work is to provide a didactic reconstruction of the article by Einstein, Podolsky e Rosen, introducing the theoretical aspects necessary for the understanding of the work (which are usually presented in the initial phases of Quantum Mechanics courses), discussing the structure of the original argument and explaining the paradox from the very statements taken from the article. Based on the presentation we are proposing, the EPR paradox can be presented in introductory undergraduate courses in Quantum Mechanics (for bachelors and licentiate degrees) enabling the understanding of the discussion on the completeness of quantum theory proposed by Einstein, Podolsky and Rosen and by the genesis of the concept that would later become known as quantum entanglement.

Keywords: EPR; Quantum theory; History and philosophy; Primary sources; Entanglement.

I. INTRODUÇÃO

No início do século XX, diferentes estudos sobre a natureza da radiação e da matéria culminaram no que hoje denominamos Teoria Quântica (TQ). Entende-se, de uma forma geral, que a primeira formulação axiomática[1] da TQ tenha sido proposta por von Neumann (1932) e, até hoje, no contexto didático, são apresentadas reformulações dessa abordagem postulacional (Cohen-Tannoudji, Diu e Laloë, 1977; Freire Jr., 2011; Ostermann, Pereira, Cavalcanti e Pessoa Jr, 2012). A interpretação desse formalismo matemático, entretanto, foi alvo de disputa não somente na gênese da Teoria (Jammer, 1974) bem como vem suscitando confrontos na comunidade de físicos ao longo de toda história da TQ (Freire, 2015).

Um episódio importante nessa história foi a conferência de Solvay, em 1927, na qual foi protagonizado um grande debate entre Einstein e Bohr sobre a interpretação da Teoria[2]. Embora se considere que Bohr tenha saído vitorioso, dando origem ao que ficou conhecido posteriormente como Interpretação da Complementaridade[3] (Cushing, 1994; Howard, 2004), Einstein seguiu descontente não somente com a descrição indeterminista da realidade; mas, sobretudo, com o que – posteriormente – ele explicitou como um afastamento da visão de mundo realista[4].

Um dos principais argumentos de Einstein contra a interpretação da Complementaridade e a favor de uma interpretação realista da TQ foi apresentado em seu artigo intitulado "*A descrição da realidade física fornecida pela mecânica quântica pode ser considerada completa?*", escrito em 1935 juntamente com Boris Podolsky e Nathan Rosen (1935). As discussões trazidas nesse trabalho ficaram conhecidas, posteriormente, como o paradoxo EPR.

Alguns livros didáticos tradicionais de TQ abordam o paradoxo EPR (Auletta, Fortunato e Parisi, 2009; Gottfried e Yan, 2003; Griffiths, 2011), adotando, entretanto, um formalismo matemático diferente ou analisando situações diferentes com relação ao que foi apresentado no trabalho original – usualmente em partes mais avançadas dos cursos. Por isso, muitas vezes o paradoxo EPR não é tratado em disciplinas de graduação, principalmente na licenciatura em Física, apesar de sua importância histórica. Ademais, na área de Ensino de Física, alguns trabalhos também discutem o paradoxo EPR (Griffiths, 1987; Reisler, 1971) – mas não apresentam uma reconstrução didática do trabalho original.

Nesse sentido, buscando contribuir para o ensino de TQ, nosso objetivo, no presente trabalho, é apresentar uma reconstrução didática do artigo de Einstein, Podolsky e Rosen, explicitando quais são seus pressupostos e qual é a estrutura do argumento; valendo-se do exemplo e do formalismo do próprio trabalho. Reproduzindo, assim, de forma didática a discussão original. Discutimos, também, as consequências que o paradoxo EPR trouxe no desenvolvimento da TQ.

Conforme argumentamos, tal abordagem permite que o paradoxo EPR seja tratado em fases mais iniciais da formação de físicos (bacharéis e licenciados). Ademais, o presente trabalho se alinha com a perspectiva de que trazer fontes históricas primárias pode contribuir para enriquecer o ensino da TQ, permitindo que os alunos de graduação tenham contato com as ideias dos autores, suas argumentações, objetivos e preocupações (Karam, 2020; Lima, Cavalcanti e Ostermann, 2021; Lima e Karam, 2021).

Para fazer tal apresentação, na seção II, apresentamos fundamentos da TQ, passando pelo formalismo necessário para a compreensão dos principais elementos abordados no artigo EPR. Ao fazer isso, pretendemos conectar a discussão subsequente, sobre o artigo EPR, com tópicos vistos nos cursos e livros tradicionais de TQ. Na seção III, abordamos o paradoxo EPR em si, abrangendo a estrutura do argumento utilizado no artigo original, o experimento mental que foi proposto pelos autores, a descrição do problema e, por fim, as conclusões que Einstein, Podolsky e Rosen chegaram. Na seção IV, é apresentada uma discussão acerca do argumento utilizado no artigo EPR e suas implicações no desenvolvimento da TQ. Por fim, na seção V, fazemos nossas considerações finais apresentando algumas sugestões para o uso dessa discussão nos cursos de TQ em nível de graduação, tanto para bacharelado quanto para licenciatura em Física.

[1] A formulação axiomática se refere à organização da teoria em uma sequência de postulados, os quais não necessitam de demonstração para que sejam aceitos. É um trabalho que busca elaborar e sintetizar a Teoria Quântica (Bunge, 2007)

[2] Parte da discussão entre Einstein e Bohr pode ser encontrada no livro "Teoria atômica e descrição da Natureza" (Niels Bohr, 1934)

[3] Existe na literatura uma distinção entre Interpretação da Complementaridade de Bohr e a Interpretação de Copenhague (Gomatam, 2007). No presente artigo vamos nos referir ao termo Interpretação da Complementaridade. A Interpretação da Complementaridade possui três diferentes proposições (Jammer, 1966) complementaridade onda-partícula (natureza dual da radiação e matéria), a complementaridade paralela (duas grandezas de um mesmo modelo físico não podem ser medidas com precisão absoluta) e complementaridade circular (complementaridade entre a descrição dada pela equação de Schrödinger e a realizada por uma medição experimental).

[4] Para uma visão realista, o ente real existe "em si", independente do nosso conhecimento (Bunge, 1973). A visão de mundo realista de Einstein, mais especificamente, trata da capacidade de predizermos com 100% de probabilidade o valor de uma quantidade Física, independente da forma como é realizada a medição.

II. FUNDAMENTOS DA TEORIA QUÂNTICA

Nessa seção, apresentamos alguns elementos fundamentais para compreensão da discussão do paradoxo EPR. Para tanto, referimo-nos a alguns conceitos usualmente apresentados em cursos de TQ. Primeiramente, apresentamos os conceitos (subseção A) e, na sequência, apresentamos a descrição de uma partícula livre (subseção B).

A. Principais elementos usados por Einstein, Podolsky e Rosen

Para compreender o argumento presente no artigo escrito por Einstein, Podolsky e Rosen, mapeamos seis conceitos fundamentais de TQ, os quais apresentamos na sequência, em diálogo com textos didáticos contemporâneos.

A.1. Estados e função de onda

Em diferentes teorias físicas, existem representações matemáticas específicas nas quais podem-se encontrar as informações sobre o sistema físico. Por exemplo, na Mecânica Clássica, ao conhecer a lagrangeana ou a hamiltoniana é possível descrever a evolução mecânica do sistema. Na termodinâmica, ao conhecer a função entropia ou a energia interna que descreve o sistema (ou qualquer potencial termodinâmico), podemos obter todas as informações sobre o sistema.

Na TQ, o conceito fundamental é o de *estado quântico*, representado por uma *função*[5] *de onda*. Ao conhecer a função de onda, podemos obter todas as informações possíveis sobre um sistema. Einstein, Podolsky e Rosen falam sobre *estado* da seguinte forma:

> *Para ilustrar as ideias envolvidas, vamos considerar a descrição mecânico-quântica do comportamento de uma partícula com um único grau de liberdade. O conceito fundamental da teoria é o conceito de estado, que deveria ser completamente caracterizado pela função de onda ψ, que é uma função das variáveis escolhidas para descrever o comportamento da partícula.* (Einstein *et al.*, 1935, p. 778)

Se estamos descrevendo a função de onda na representação da posição, temos uma função $\Psi(x,t)$ para descrever o sistema. Como veremos na sequência, essa função pode ser obtida a partir da solução da Equação de Schrödinger juntamente com condições iniciais e de contorno. A $\Psi(x,t)$ tem natureza complexa de forma que para conectar a descrição matemática com os resultados empíricos também será necessário usar a função complexo-conjugada $\Psi^*(x,t)$.

A.2. Interpretação probabilística da função de onda

De acordo com a interpretação estatística de Born, assumimos que a probabilidade de encontrarmos uma partícula, em um problema unidimensional, entre dois pontos a e b é apresentada no artigo da seguinte forma:

> *De acordo com a mecânica quântica, podemos dizer que a probabilidade relativa de que uma medição da coordenada terá resultado situado entre a e b é:*
>
> $$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a$$
>
> *Como essa probabilidade é independente de a , mas depende apenas da diferença $b - a$, vemos que todos os valores de coordenada são possíveis.* (Einstein *et al.*, 1935, p. 778)

Se integrarmos essa função entre os limites de $-\infty$ e $+\infty$ a probabilidade de a partícula estar nesse intervalo é de 100% :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{1}$$

[5] A descrição dos sistemas físicos na Teoria Quântica é dada por meio de um objeto matemático denominado vetor de estado, conceito que substitui as posições e velocidades na Mecânica Clássica (Laloë, 2001). O vetor de estado não é uma propriedade de um sistema físico, mas um procedimento experimental para testar e/ou preparar sistemas físicos.

A.3. Observáveis e operadores

Na TQ, existem algumas propriedades do sistema que podem ser determinadas a partir de uma sequência de operações físicas ou medições, "correspondendo a cada quantidade fisicamente observável A existe um operador, que pode ser designado pela mesma letra" (Einstein *et al.*, 1935, p. 778). Essas propriedades podem ser representadas por letras maiúsculas (exemplo: A, B, X Y) ou letras com acento circunflexo (exemplo: $\hat{p}, \hat{q}, \hat{E}$) e levam o nome de "observáveis". Os operadores que representam grandezas físicas observáveis podem atuar sobre as funções de onda. Alguns exemplos de operadores que representam os observáveis posição, momento, energia mecânica e energia cinética são respectivamente (Griffiths, 2011):

$$\hat{q} = x \tag{2}$$

$$\hat{p} = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3}$$

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4}$$

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{5}$$

Para que um operador possa representar uma grandeza observável ele precisa ser, necessariamente, um operador auto-adjunto (hermitiano)[6]. Na TQ matricial, em que os operadores são representados por matrizes, a matriz que representa um operador hermitiano é igual à sua transposta conjugada. Tal condição garante que os autovalores associados à medição (o que será discutido no próximo item) sejam números reais. O valor esperado (valor médio) de um observável $Q(p,x)$ pode ser expresso da seguinte forma (Griffiths, 2011)

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx \tag{6}$$

A.4. Decomposição espectral e medidas

As autofunções de um operador hermitiano se dividem em duas categorias, dependendo se o espectro do operador é discreto ou contínuo. No primeiro caso, quando os autovalores formam um conjunto discreto, as autofunções estão no espaço de Hilbert e constituem estados realizáveis fisicamente (são quadrado-normalizáveis). No segundo caso, quando os autovalores estão distribuídos em um intervalo contínuo, as autofunções não são quadrado-normalizáveis (no entanto, é possível formar pacotes de onda que sejam normalizáveis) e, portanto, não representam funções de onda possíveis.

Ademais, os espectros discretos têm duas propriedades importantes, seus autovalores são reais e as autofunções pertencentes a autovalores distintos são ortogonais.

Adicionando a condição de ortogonalidade mais a condição de normalização (ortonormalidade) é possível expressar

$$\int \psi_m^*(x)\psi_n(x) = \delta_{mn} \tag{7}$$

Para os espectros contínuos, embora as funções não sejam ortogonais no sentido usual, obtém-se uma outra forma de ortonormalidade, denominada ortonormalidade de Dirac (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1977):

$$\int \psi_x^* \psi_{x'} dx = \delta(x - x') \tag{8}$$

Como pode ser observado na equação acima, diferentemente da representação da ortonormalidade do espectro discreto, o espectro contínuo tem a sua ortonormalidade expressa na forma de uma delta de Dirac $[\delta(x - x_0)]$.

A função delta de Dirac $\delta(x - x_0)$ representa uma distribuição infinitamente alta e infinitesimalmente estreita em x_0, cuja área é 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \tag{9}$$

[6] Essa afirmação é a mais tradicionalmente difundida. Porém, existem formulações menos restritivas, em que mesmo os operadores não-adjuntos têm autovalores reais (Bender *et al.*, 2003; Mostafazadeh, 2001)

Ao multiplicarmos uma função $f(x)$ por $\delta(x-a)$, obtemos o mesmo resultado que seria encontrado ao multiplicar $f(a)$ pela função $\delta(x-a)$, pois o produto será sempre zero (Butkov, 1988), a não ser pelo ponto $f(a)$:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \tag{10}$$

De forma que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = f(a) \tag{11}$$

o que é conhecido como propriedade de filtragem da função delta de Dirac. Existem diferentes formas de representar a delta de Dirac. Uma possível forma pode ser obtida por sua representação como uma transformada de Fourier. Lembrando que uma função pode ser expressa pelo par Fourier, dado por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ikx}dk \tag{12}$$

e

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx \tag{13}$$

Escolhendo então $f(x) = \delta(x)$ em (12):

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ikx}dk \tag{14}$$

Então,

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-ikx}dx \tag{15}$$

Utilizando a propriedade de filtragem (11) teremos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{ikx}dx = e^{ik0} = 1$, dessa forma

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{16}$$

substituindo (16) em (14) tem-se:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk \tag{17}$$

resultando na forma integral da função delta de Dirac, a qual é chamada de representação de Fourier da função delta. Quando deslocada da origem, assume a forma

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)}dk \tag{18}$$

No formalismo da TQ, um sistema físico isolado pode se encontrar em um estado formado pela sobreposição dos autoestados de um determinado operador:

$$\psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t) + \cdots + c_n\psi_n(x,t) \tag{19}$$

em que $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t)$ e $c_n\psi_n(x,t)$ são autoestados de um observável. Segundo o postulado de projeção de Von Neumann, quando uma medida de tal observável é realizada, o estado do sistema "colapsa" para um dos possíveis autoestados. A probabilidade da medida resultar no autovalor correspondente ao autoestado ψ_i é dada por $|c_i|^2$ (Sakurai e Napolitano, 2013). Tal fenômeno de passagem de um estado sobreposto para um único autoestado é o que foi denominado colapso da função de onda.

Conforme já mencionamos, a decomposição espectral depende da característica do espectro (discreto ou contínuo), sendo que a função ψ pode ser escrita como uma somatória (espectro discreto) ou uma integral (espectro contínuo) dos autoestados de um observável ou ainda, ter características mistas. A forma mais geral de representação de uma função de onda como combinação linear dos autoestados de um operador pode ser expressa da seguinte forma (Landau e Lifshitz, 1977):

$$\Psi(q) = \sum_n a_n\Psi_n(q) + \int a_f\Psi_f(q)df \tag{20}$$

Para o entendimento do artigo EPR, é importante reconhecermos os autoestados do operador posição e momento. Com operador posição dado pela expressão (2), tem-se que seus autoestados podem ser representados por uma delta de Dirac, pois:

$$\hat{q}\psi = \hat{q}\delta(x-a) = a\delta(x-a) = a\psi \tag{21}$$

Por outro lado, com o operador momento dado pela expressão (3), pode-se mostrar que seus autoestados têm a forma de uma exponencial complexa:

$$\hat{p}\psi = \hat{p}e^{ikx} = \hat{p}e^{i\left(\frac{2\pi p}{h}\right)x} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\left(\frac{2\pi p}{h}\right)x} = pe^{i\left(\frac{2\pi p}{h}\right)x} = p\psi \tag{22}$$

em que foi usada a relação de de Broglie, na qual $k = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi p}{h}$.

Uma síntese das representações e descrições (Griffiths, 2011), com alguns complementos, dos espectros discreto e contínuo podem ser observados na tabela abaixo

Quadro I. Comparação da descrição matemática e diferenças entre os espectros discreto e contínuo.

ESPECTRO DISCRETO	ESPECTRO CONTÍNUO
Ortonormalização x Ortonormalidade de Dirac	
$\int \psi_i^*\psi_j\, dx = \delta_{ij}$	$\int \psi_p^*\psi_p dp = \delta(p-p')$
Expansão da função de onda	
$\psi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s\vartheta_s(x)$	$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_p u_p(x)dp$
Quadrado da norma	
$\sum c_i\psi^* c_i\psi = \sum \lvert c_i\rvert^2$	$\int c(p)\psi^* c(p)\psi dp = \int dp\lvert c(p)\rvert^2$

A.5. Evolução temporal para um sistema fechado: equação de Schrödinger

Enquanto o colapso da função de onda se refere à evolução de um sistema mediante o processo de medida. Quando um sistema está isolado, a evolução temporal da função de onda se dá de forma determinista e pode ser obtida com a solução da equação de Schrödinger[7], que pode ser expressa da seguinte forma para o caso unidimensional:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{23}$$

Uma forma de resolver a Equação de Schrödinger é buscando soluções que podem ser expressas por separação de variáveis, isto é,

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t) \tag{24}$$

aplicando (24) em (23), podemos obter[8]

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}t \tag{25}$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V\psi(x) = E\psi(x) \tag{26}$$

A equação (26) é conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo. A solução de (24) é simplesmente:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{27}$$

[7] Para uma discussão sobre a derivação da função de onda, ver Lima e Karam (2021)

[8] Para mais detalhes ver (D. J. Griffiths, 2011)

A solução de (26) depende do potencial V do sistema sendo estudado. De uma forma geral, a solução da equação de Schrödinger é dada por:

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \quad (28)$$

Ademais, a solução geral da equação de Schrödinger pode ser expressa como uma combinação linear de soluções separáveis[9]

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x,t) \quad (29)$$

A.6. Princípio da incerteza

Podemos expressar o Princípio da Incerteza Matematicamente da seguinte forma:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (30)$$

As variáveis σ_x e σ_p representam o desvio padrão da posição e do momento respectivamente[10]. Pode-se entender o princípio da incerteza da seguinte forma: podemos preparar um grande número de sistemas físicos idênticos. Se medirmos a posição de uma partícula em cada sistema, teremos uma distribuição de valores de posição. Podemos também medir o momento da partícula em cada um dos sistemas. Quanto mais bem localizada for essa partícula, isto é, quanto menor for o desvio padrão sobre as medidas de posição obtidas para os sistemas idênticos, maior será o desvio padrão da medida de momentum obtido para o mesmo conjunto de sistemas, e vice-versa (Griffiths, 2011). É possível mostrar, matematicamente, que essa relação de Incerteza é consequência do fato de os operadores posição e momento não comutarem. De uma forma geral, para dois operadores que não comutam, pode-se obter uma relação entre suas incertezas:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2 \quad (31)$$

onde $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ é o comutador de dois operadores (Griffiths, 2011, p. 110). No artigo de Einstein, Podolsky e Rosen, a discussão sobre a incerteza é apresentada da seguinte forma:

> *De forma mais geral, é mostrado na mecânica quântica que, se os operadores correspondentes a duas grandezas físicas, digamos A e B, não comutam, isto é, se AB≠BA, então o conhecimento preciso de um deles impede o conhecimento do outro. Além disso, qualquer tentativa de determinar o último experimentalmente alterará o estado do sistema de modo a destruir o conhecimento do primeiro.* (Einstein ***et al.***, 1935, p. 778)

Para o caso específico do artigo EPR, a relação de comutação[11] entre posição e momento pode ser expressa como

$$[Q, P_x] = \frac{h}{2\pi i} \quad (32)$$

B. Exemplo: partícula livre

Para a partícula livre, a equação de Schrödinger independente do tempo tem a seguinte solução

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = Ae^{(\frac{2\pi i}{h})px} + Be^{-(\frac{2\pi i}{h})px} \quad (33)$$

[9] Estamos escrevendo a solução geral como um somatório por simplicidade. Deve-se notar, entretanto, que isso só é adequado para sistemas confinados. Para um sistema não confinado, o espectro do operador hamiltoniano é contínuo e a solução geral é dada por uma integral.

[10] A representação pode ser escrita como $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ e $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$. Sendo que $\langle x\rangle$ e $\langle p\rangle$ são os valores esperados de x e p, da mesma forma que $\langle x^2\rangle$ e $\langle p^2\rangle$ são os valores esperados dos observáveis ao quadrado.

[11] A relação de comutação entre posição e momento pode ser escrita da seguinte forma (Sakurai & Napolitano, 2013):

$$[q_i, p_j] = \frac{ih}{2\pi}\delta_{ij}$$

Essa relação implica que q e p_x são observáveis incompatíveis, sendo impossível encontrar autoestados simultâneos de q e p_x;

incluindo a parte dependente do tempo $e^{(-\frac{iEt}{\hbar})}$, então

$$\Psi(x,t) = Ae^{ik(x-(\frac{\hbar kt}{2m})} + Be^{-ik(x+(\frac{\hbar kt}{2m})} \tag{34}$$

Nesse caso, o primeiro termo se refere a partícula se movendo para a direita e o segundo termo para a partícula e movendo em sentido negativo, para a esquerda. A função de onda não é normalizável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2(\infty) \tag{35}$$

A solução da equação de Schrödinger dependente do tempo pode ser escrita como uma combinação linear de soluções separáveis, conforme discutido na seção anterior

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{i(kx-(\frac{\hbar k^2 t}{2m})} dk \tag{36}$$

essa função pode ser normalizada para um $\phi(k)$ apropriado. Porém, carrega um intervalo de k e, portanto, um intervalo de energias e velocidades. É possível determinar $\phi(k)$ para que coincida com a função de onda inicial:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{ikx} dk \tag{37}$$

A solução do problema, genérico, para a partícula livre é (36), em que

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0)\, e^{-ikx} dx \tag{38}$$

III. O ARGUMENTO EPR

Para Einstein, Podolsky e Rosen, em uma teoria completa, deve haver um elemento teórico correspondente a cada elemento de realidade, de forma que um critério para a realidade de uma quantidade física é a possibilidade de realizar previsões sem alterar o sistema (Einstein *et al.*, 1935). Mais especificamente, as teorias físicas devem levar em consideração uma distinção entre os elementos da realidade objetiva e os conceitos físicos operados pela teoria.

A partir disso, para que possamos julgar a pertinência de uma teoria física, os autores formulam duas perguntas que devem ser feitas frente a ela: 1) a teoria é correta? 2) a descrição dada pela teoria é completa? Para que uma teoria seja considerada completa é necessário que cada elemento da realidade seja relacionado a um elemento teórico, ou: "*cada elemento da realidade física deve ter uma contrapartida na teoria física*"(Einstein *et al.,* 1935, p. 777). Os autores chamam essa imposição de *condição de completude*.

A TQ, na forma concebida por Bohr, Heisenberg, e a Interpretação da Complementaridade, assume que a função de onda, ψ, nos fornece a descrição completa para um sistema. Essa função de onda é expressa como a sobreposição de autoestados de um operador que representa uma grandeza física observável. Ao fazer uma medida, não temos como saber previamente qual autovalor a medida fornecerá, apenas a probabilidade de se obter aquele autovalor. Ademais, pelo princípio da incerteza, ao fazermos a medida de um observável A, o sistema se encontrará em um autoestado do operador A. Nesse momento, o sistema não estará em um autoestado de um operador B (que não comuta com A) mas em uma sobreposição de autoestados de B. Ou seja, nunca é possível ter o sistema simultaneamente no autoestado de dois operadores que não comutam e isso significa que o sistema não tem os valores de A e B definidos simultaneamente.

Segundo os autores, a conclusão usual da TQ para isso é afirmar que "*quando o momento de uma partícula é conhecido, suas coordenadas não possuem realidade física*" (p. 778). Assim, os autores elencam duas consequências para esse problema: *"(1) A descrição da TQ para a realidade dada pela função de onda é incompleta ou (2) quando os operadores correspondentes a duas quantidades físicas não comutam, as duas quantidades não podem ter realidade simultânea*" (p. 778).

Como a TQ, em sua forma usual, assume que a função de onda nos fornece uma descrição completa da realidade física de um sistema, Einstein, Podolsky e Rosen apresentam um experimento mental que tem por objetivo provar por absurdo a incompletude da TQ. Basicamente, os autores partem do pressuposto que a TQ está completa e, com a análise do experimento mental, mostram que, obrigatoriamente, tal premissa conduz à noção de que as grandezas posição e momento devem ser reais simultaneamente – o que contradiz a interpretação usual. Logo, a conclusão é que a TQ está incompleta. A estrutura do argumento está representada na Figura 1.

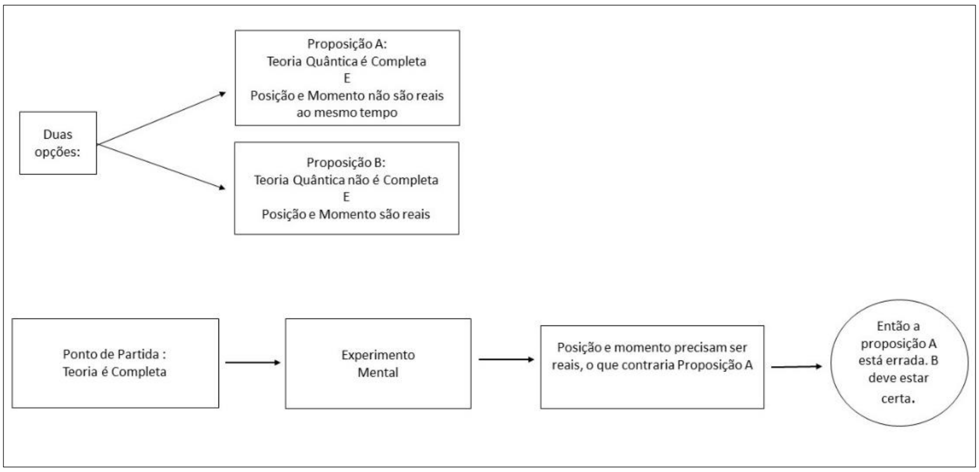

FIGURA 1. A imagem representa a estrutura do argumento EPR, contendo as duas principais proposições relacionadas ao fato de a TQ ser completa ou incompleta, com base na realidade simultânea atribuída à posição e ao momento. Através do experimento mental, Einstein, Podolsky e Rosen mostram que p e x têm realidade simultânea, o que descartaria o argumento de que a Teoria Quântica é incompleta.

A. O experimento mental proposto

Com o que foi apresentado na seção II, podemos discutir o experimento mental proposto por Einstein, Podolsky e Rosen:

> *Para este propósito, vamos supor que temos dois sistemas, I e II, que permitimos interagir do tempo $t = 0$ até $t = T$, após o qual supomos que não há mais nenhuma interação entre as duas partes. Supomos ainda que os estados dos dois sistemas antes de $t = 0$ eram conhecidos. Podemos, então, calcular com a ajuda da equação de Schrödinger, o estado do sistema combinado I + II em qualquer momento subsequente; em particular, para qualquer $t > T$. Vamos designar a função de onda correspondente por Ψ. Não podemos, no entanto, calcular o estado em que qualquer um dos dois sistemas é deixado após a interação. Isso, de acordo com a mecânica quântica, pode ser feito apenas com a ajuda de outras medições, por um processo conhecido como a redução do pacote de onda. Vamos considerar o essencial deste processo*. (Einstein *et al.*, 1935, p. 779)

Fizemos um esquema simples (Figura 2) para representar o que é proposto pelos autores. Dois sistemas podem interagir em uma certa região do espaço, pela qual passam de $t = 0$ até $t = T$. Para $t > T$, as partículas não interagem mais. Se conhecemos o estado inicial do sistema, podemos descrever o estado do sistema em qualquer tempo usando a equação de Schrödinger. Mas isso não nos permite saber o estado em que cada sistema é deixado após a interação. Para isso, precisaríamos fazer alguma medida (usando algum tipo de detector).

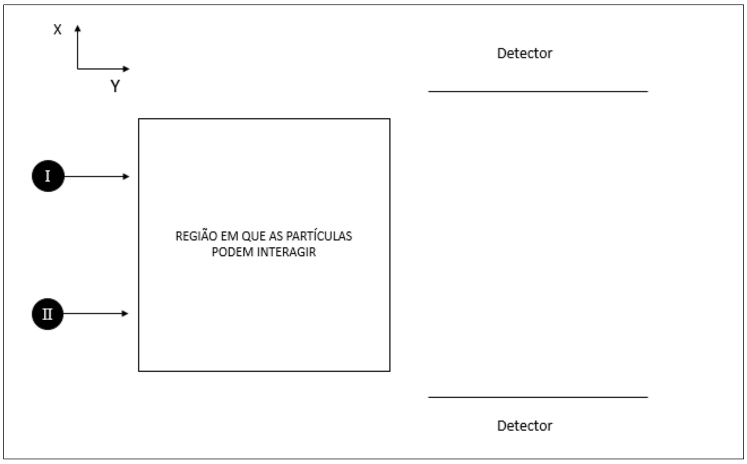

FIGURA 2. A imagem acima ilustra a situação explicada por Einstein, Podolsky e Rosen, onde dois sistemas, I e II interagem em uma determinada região e por um breve intervalo de tempo. Conhecendo os sistemas I e II no instante t=0 é possível descrever a interação I+II através da Equação de Schrödinger. Mas para sabermos as informações do sistema após essa interação, seria necessário realizar uma medição.

O percurso adotado no artigo EPR é partir do pressuposto de que a TQ é uma teoria completa e mostrar que isso conduz à noção de que dois operadores que não comutam representam grandezas que sim existem simultaneamente – o que contradiz a interpretação usualmente adotada. Para isso, propõem um operador A representando uma grandeza observável. Esse operador possui um conjunto discreto de autovalores a_1, a_2, a_3, ... correspondendo aos autoestados $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1)$ ... em que x_1 representa a variável do primeiro sistema. Então a Ψ (função de onda do sistema composto) pode ser expressa em termos de funções de x_1:

$$\Psi = \sum \psi_n(x_2) u_n(x_1) \tag{39}$$

Em que $\psi_n(x_2)$ faz o papel de coeficiente da expansão de Ψ na base formada pelos autoestados ortonormais do operador A, desempenhando o papel dos c_n na expressão (29). Os autores, então, comentam:

> *Suponha agora que a quantidade A é medida e verifica-se que tem o valor a_k. Então se concluiu que após a medição o primeiro sistema é deixado no estado dado pela função de onda $u_k(x_1)$ e que o segundo sistema é deixado no estado dado pela função de onda $\psi_k(x_2)$.* (Einstein *et al.*, 1935, p. 779)

Com o processo de medida, então, obtemos o sistema I em um autoestado do operador A. Tal resultado, entretanto, é fruto de termos escolhido a grandeza A para ser medida. Por outro lado, poderíamos ter escolhido fazer uma medida com uma grandeza B, cujo operador não comuta com A. Nesse caso, os possíveis resultados de medida são os autovalores b_1, b_2, b_3 do operador correspondentes aos autoestados $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1)$. Nesse caso, podemos escrever $\Psi(x)$ expandindo-a em termos dos autoestados de B:

$$\Psi = \sum \phi_s(x_2) v_s(x_1) \tag{40}$$

Analogamente ao que discutimos anteriormente, $\phi_s(x_2)$ deve ser entendido como o coeficiente de expansão em termos da base formada pelos autoestados ortonormais do operador B. Da mesma forma, também, se fazemos uma medida e verificamos que o sistema I está no autoestado $v_r(x_1)$, então, também sabemos que II está no autoestado $\phi_r(x_2)$. O importante no argumento é perceber que podemos escolher se queremos medir a grandeza A ou a grandeza B no sistema I. Isso, entretanto, determina qual é o estado do sistema II. Como os sistemas não interagem, qualquer medição no sistema I **não pode alterar** o sistema II. Logo, as grandezas associadas aos estados que o sistema II assume já deveriam ser reais antes mesmo da medição. Aqui já está a essência do argumento EPR.

Einstein, Podolsky e Rosen, entretanto, vão mais adiante e exemplificam o problema supondo que A e B são os operadores posição e momento. Nesse caso, ao invés de termos espectros discretos, trataremos de espectros contínuos. Assim, os autores propõem escrever a função de onda da seguinte forma

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \tag{41}$$

em que x_0 é uma constante. Veja que ao escrever a Ψ com essa decomposição espectral, estamos representando uma "soma" sobre os autoestados do operador momento para o sistema I, dado pela equação (34), isto é, para uma partícula livre (visto que as partículas não estão mais interagindo):

$$u_p(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h} p x_1} \tag{42}$$

Logo, a função associada ao sistema II é dada por

$$\psi_p(x_2) = e^{\frac{2\pi i}{h}(x_0 - x_2)p} \tag{43}$$

A qual também representa uma partícula livre. Existe, entretanto, um detalhe importante: enquanto $u_p(x_1)$ é autoestado do operador $p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}$ com autovalor associado +p. $\psi_p(x_2)$ é autoestado do operador $p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}$ associado com o autovalor $-p$. Ou seja, Einstein, Podolsky e Rosen descrevem duas partículas livres com momentos opostos. Esse detalhe é extremamente importante: como as partículas interagiram durante um intervalo de tempo, isoladas do resto do universo, temos, por conservação de momento, que seus momentos resultantes devem ser opostos. É esse fato que faz com que, ao medir o momento do sistema I, saibamos necessariamente o momento do sistema II. Caso contrário, teríamos uma violação de uma lei Física. É justamente essa característica do experimento mental de Einstein que torna as duas medidas "atadas" uma à outra, que dá origem ao que, posteriormente, foi denominado de *emaranhamento quântico* (discutiremos esse ponto na próxima seção). Assim, no caso de expandirmos a função Ψ, temos

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2)u_p(x_1)dp \tag{44}$$

Por outro lado, podemos representar a função de onda como autoestado do operador posição:

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(x_2)v_x(x_1)dx \tag{45}$$

em que

$$v_x(x_1) = \delta(x - x_1) \tag{46}$$

no qual x é o autovalor associado para o operador x_1. E, analogamente,

$$\phi_x(x_2) = h\delta(x + x_0 - x_2) \tag{47}$$

que é autoestado do operador x_2 com autovalor $x + x_0$. Se usamos a representação de Fourier da delta de dirac, conforme discutimos na subseção A.4, vemos que

$$\phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i/h(x-x_2+x_0)p}dp \tag{48}$$

Dessa forma, se substituirmos (48) em (45) e usarmos a propriedade da filtragem, retomamos a descrição dada por (41) – mostrando que as descrições são consistentes na descrição da mesma realidade. Sintetizamos os resultados no quadro II.

Quadro II. O quadro mostra as funções e os respectivos valores dos seus coeficientes de expansão dependo da escolha que tomarmos em relação a medição de $\hat{p}$ ou $\hat{q}$. Escolhendo medir o momento, a posição não ficará bem definida, sendo possível adotar $u_p(x_1)$ como autoestado e $\psi_p(x_2)$ como coeficiente de expansão. O mesmo vale para a escolha da posição, onde podem ser observados o autoestado $v_x(x_1)$ e o coeficiente de expansão $\phi_x(x_2)$. Pode-se destacar ainda que ao multiplicarmos, nos dois casos, o autoestado pelo seu respectivo coeficiente de expansão obtemos a função de onda do sistema composto. Na parte do momento através da integral de forma direta e na parte da posição através da representação da função delta pela integral de Fourier.

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x_1-x_2+x_0)p}dp$$

Se escolhermos $\hat{p}$	**Se escolhermos $\hat{q}$**
$u_p(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h}px_1}$	$v_x(x_1) = \delta(x - x_1)$
$\psi_p(x_2) = e^{\frac{2\pi i}{h}p(x_0-x_2)}$	$\phi_x(x_2) = h\delta(x + x_0 - x_2)$
p bem definido	x bem definido
x não definido	p não definido

Ou seja, quando escolhemos se vamos medir a posição ou o momento do sistema I, definimos em qual estado estará o sistema II (por conta do emaranhamento criado pela conservação de momento). Observamos que os autoestados do operador posição e momento são significativamente distintos. Como os sistemas não estão interagindo, entretanto, a medida no sistema I não pode afetar o estado no sistema II. Logo, deve-se concluir que as duas grandezas representadas por operadores que não comutam devem ter realidade simultaneamente. Os valores de posição e momento já deveriam ser reais independentemente das medidas. Com isso, os autores, concluem:

> *Anteriormente, provamos que (1) a descrição mecânico quântica da realidade dada pela função de onda não está completa ou (2) quando os operadores correspondentes a duas quantidades físicas que não comutam as duas quantidades não podem ter realidade simultânea. Começando, então, com a suposição de que a função de onda dá uma descrição completa da realidade física, chegamos à conclusão de que duas quantidades físicas, com operadores que não comutam, podem ter*

> *realidade simultânea. Assim, a negação de (1) leva à negação da única outra alternativa (2). Somos, portanto, forçados a concluir que a descrição mecânico-quântica da realidade física dada pelas funções de onda não está completa.* (Einstein *et al.*, 1935, p. 780)

O ponto principal é que o estado possível para o sistema II depende da medida feita no sistema I. Assim, ao escolher qual grandeza medir no sistema I, **instantaneamente,** se teria um estado definido para o II caso esse estado já não existisse antes. Portanto, ainda que implicitamente, o argumento está montado sobre a impossibilidade de se transmitir qualquer informação instantaneamente – o que violaria a Teoria da Relatividade Especial (discutiremos isso na próxima seção). Em outras palavras, o argumento assume a noção de **localidade** nas interações físicas. Por fim, os autores concluem

> E*nquanto nós mostramos, então, que a função de onda não provê uma descrição completa da realidade física, deixamos aberta a questão se tal descrição completa existe ou não. Nós acreditamos, entretanto, que tal teoria é possível.* (Einstein *et al.*, 1935, p. 780)

IV. DISCUSSÃO SOBRE O ARGUMENTO EPR

O artigo EPR, apresentando críticas à completude da TQ, gerou diversas consequências para o desenvolvimento da teoria. Primeiramente, deve-se ressaltar que a proposta dos autores não foi aceita por Niels Bohr, que – também em 1935 – publicou um artigo com mesmo título do artigo de Einstein, Podolsky e Rosen – reafirmando sua defesa da interpretação da complementaridade:

> *Mostra-se que certo "critério de realidade física" formulado em artigo recente com o título acima de A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen contém uma ambiguidade essencial quando aplicado a fenômenos quânticos. Nesse contexto, um ponto de vista denominado "complementaridade" é explicado, a partir do qual a descrição da mecânica quântica dos fenômenos físicos parece cumprir, dentro de seu escopo, todas as demandas racionais de completude.* (Bohr, 1935, p. 696)

Ademais, como mencionamos, o experimento mental proposto no artigo EPR indica um novo tipo de fenômeno físico: quando dois sistemas quânticos interagem, a função de onda resultante passa a correlacionar os resultados de medida sobre um sistema com as propriedades do outro sistema – de forma que eles não podem mais ser representados independentemente. Como discutimos, ao propor a função de onda dada pela expressão (40), Einstein, Podolsky e Rosen conseguem, ao determinar o estado da partícula I, instantaneamente, determinar o estado da partícula II.

Esse novo fenômeno foi explorado de forma mais profunda por Schrödinger (1935, 1936) – que cunhou o termo “emaranhamento” para caracterizar tal fenômeno. Mais do que isso, Schrödinger reconhece que o emaranhamento não é simplesmente uma característica da TQ, é “A” característica, mostrando de forma incontestável enquanto essa se afasta da Física Clássica:

> *Quando dois sistemas, dos quais conhecemos os estados por seus respectivos representantes, entram em interação física temporária devido a forças conhecidas entre eles, e quando após um tempo de influência mútua os sistemas se separam novamente, então eles não podem mais ser descritos da mesma maneira como antes, viz. dotando cada um deles com um representante próprio. Eu não chamaria isso de um, mas sim o traço característico da mecânica quântica, aquele que força todo o seu afastamento das linhas clássicas de pensamento. Pela interação, os dois representantes (ou funções ψ) tornaram-se emaranhados.* (Schrödinger, 1935, p. 555)

Assim, podemos dizer que o argumento EPR consistiu em revelar o fenômeno do emaranhamento na TQ. Para os autores, tal fenômeno deve ser considerado inaceitável visto que ele indica a possibilidade de fenômenos não-locais. Isto é, ao medir uma partícula, instantaneamente, a outra partícula é afetada não importa o quão distante ela esteja. Partindo da noção de localidade, os autores defendem uma visão realista, defendendo que duas grandezas representadas por operadores que não comutam devem existir simultaneamente.

Se os autores estivessem corretos, a TQ estaria incompleta e estaria faltando a descrição de parâmetros que permitisse, de antemão, caracterizar todas as grandezas físicas do sistema. Esses parâmetros ficaram conhecidos pelo termo “variáveis ocultas”. Assim, embora Einstein, Podolsky e Rosen, não tenham proposto nenhuma alternativa à interpretação da Complementaridade da TQ, o caminho a ser seguido em sua proposta seria encontrar uma teoria de variáveis ocultas locais.

Em 1952, David Bohm (1952a), físico norte-americano, inspirado nas discussões de Einstein, apresenta uma proposta alternativa à interpretação da Complementaridade, propondo uma formulação causal e determinista da TQ em termos de variáveis ocultas. Apesar de sua inspiração nos trabalhos de Einstein, a proposta de Bohm segue tratando de variáveis não-locais[12].

Pode-se parecer que essa discussão sobre existência ou não de variáveis locais e sobre completude ou não da TQ seja um objeto de estudo puramente filosófico, ficando fora do alcance da Física. Entretanto, John Bell (1964) mostrou que seria possível haver uma diferença empírica entre um sistema quântico ter variáveis ocultas locais ou não[13]. Ou seja, Bell conseguiu mostrar que há diferenças físicas mensuráveis que permitem analisar se a interpretação usual da TQ (que implica efeitos não locais) ou a proposta de variáveis locais está correta. Todos os resultados experimentais, até hoje, apontam para a correção da TQ e, portanto, para a existência de fenômenos não-locais, contrariando a concepção do artigo EPR.

Deve-se ressaltar que a não-localidade da TQ não viola a Teoria da Relatividade Espacial, segundo a qual é impossível uma informação ser transportada com velocidade acima da velocidade da luz. Caso isso fosse possível, haveria quebra de nexo causal e poderíamos ter efeitos ocorrendo antes das causas. Isso não significa, entretanto, que não é possível ter algum tipo de fenômeno acima da velocidade da luz. Ele só não pode transportar informação e prover relações de causa e efeito. Por exemplo, imagine que projetemos a luz de lanterna em um anteparo. Se o anteparo está a uma distância d da lanterna, e movemos a lanterna com velocidade angular ω, a imagem da lanterna no anteparo se moverá com velocidade $v = \omega d$. Se a distância for grande o suficiente, a velocidade da imagem no anteparo pode superar a velocidade da luz. Isso não viola a Teoria da Relatividade, pois o fenômeno físico envolve a emissão de luz da fonte até o anteparo e isso ocorre com transmissão de informação da velocidade da luz. Não conseguimos com esse fenômeno transmitir nenhuma informação ou produzir qualquer efeito com velocidade superior à da luz.

O mesmo acontece com o emaranhamento quântico. Quando fazemos uma medida sobre uma partícula, não conseguimos controlar qual resultado podemos obter e, portanto, não temos como causar um efeito específico na outra partícula. Não há nenhum transporte de informação e, portanto, não há nenhum vínculo causal que possa ser estabelecido com esse processo.

Dessa forma, somos levados a concluir que a TQ é uma teoria não local. Como discute Griffiths (2011), o argumento EPR acabou tendo uma história surpreendente. Os autores partiram da localidade para provar o realismo e, com o desenvolvimento histórico, a questão da realidade não ficou definida e ainda abandonamos a localidade.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo EPR é um artigo historicamente muito relevante para o desenvolvimento da TQ. Nele, é apresentada uma crítica à formulação da TQ que se tornou hegemônica e que era defendida por pesquisadores como Niels Bohr. Partindo da noção de localidade, Einstein, Podolsky e Rosen defendem que grandezas representadas por operadores que não comutam devem existir simultaneamente – o que contradiz a interpretação da Complementaridade. Esse argumento teve, entretanto, desenvolvimentos surpreendentes. Primeiramente, conduziu ao reconhecimento do fenômeno do emaranhamento como uma característica fundamental da TQ, conforme argumentou Schrödinger. E, posteriormente, levou ao reconhecimento de que a TQ é uma teoria não-local a partir das verificações experimentais do teorema de Bell.

Reconhecendo sua importância e a possibilidade de apresentá-lo em fases mais iniciais dos cursos de TQ, incluindo para cursos de licenciatura em Física, apresentamos, neste artigo, uma reconstrução didática do artigo original. Para contribuir com o entendimento do argumento, apresentamos na seção II, uma revisão dos conceitos de TQ que são necessários, remetendo-nos ao artigo e aos livros didáticos contemporâneos. Na sequência, na seção III, reconstruímos a derivação e a argumentação do artigo, valendo-nos dos conceitos revisados na seção anterior. Por fim, na seção IV, discutimos brevemente as consequências históricas advindas do artigo e comentamos suas implicações para o entendimento contemporâneo da TQ como uma teoria não-local.

Conforme discutimos na introdução, a apresentação de fontes históricas primárias no contexto do ensino de Física tem sido defendida por diferentes autores. Deve-se atentar, entretanto, que não é qualquer fonte histórica ou qualquer episódio que contribui para as discussões didáticas. Karam (2021), por exemplo, discute que os episódios devem ser cuidadosamente escolhidos para que se adequem ao contexto pedagógico. Nesse sentido, defendemos que o artigo escrito por Einstein, Podolsky e Rosen (1935) é uma fonte extremamente interessante para ser levada para os cursos de teoria quântica do bacharelado e licenciatura.

Primeiramente, trata-se de um artigo curto e, portanto, de rápida leitura. Em segundo lugar, o artigo é estruturado de uma forma lógica e clara, o que permite discutir a própria natureza da argumentação científica. Em terceiro lugar,

[12] O foco do artigo de Bohm (Bohm, 1952a, 1952b) não deixava clara a explicação não-local das variáveis ocultas, mas a interpretação atual dessa questão deixa claro que na verdade a não-localidade já estava presente nessas discussões em torno das variáveis ocultas de Bohm.

[13] Uma apresentação sobre o teorema de Bell para população geral foi apresentada de forma muito clara e acessível em (Mermin, 1985)

o formalismo matemático usado pelos autores é compatível com o formalismo e conceitos vistos em cursos introdutórios de Teoria Quântica, o que torna possível compreendê-lo com relativa facilidade. Por fim, o artigo aborda um dos temas mais importantes, conceitual e historicamente, da Teoria Quântica contemporânea, o emaranhamento quântico, tópico usualmente abordado em fases finais dos cursos de Teoria Quântica (às vezes, nem sendo abordado).

De qualquer forma, deve-se atentar que um texto científico, como um artigo, é muito diferente de um texto didático. Ele foi escrito por especialistas para dialogar com outros especialistas. Por isso, não somente o formato do texto é específico, mas também a linguagem e os conceitos abordados. Para que um texto científico possa ser apresentado no contexto pedagógico, é necessário haver uma preparação, ou transposição didática (Chevallard, 1991). Neste artigo, apresentamos justamente uma narrativa que permite fazer a tradução entre o contexto científico e o didático. Primeiramente, na seção II, apresentamos, de forma estruturada, os conceitos básicos da Teoria Quântica, que são utilizados no artigo EPR. Muitos desses conceitos aparecem no artigo original, mas não são explicados pelos autores (como a representação da delta de Dirac por sua transformada de Fourier, por exemplo). Além de preparar o leitor, fazendo uma conexão com os conhecimentos usualmente apresentados em cursos de quântica, o que, do ponto de vista didático, corresponderia a relacionar o novo assunto aos conhecimentos prévios do aluno, o texto também traz uma representação do argumento em formato de diagrama – ajudando a explicitar o que está em questão na crítica dos autores - e uma representação do experimento mental, o que também não há no artigo original. Entendemos que esses elementos, juntamente com a explicação organizada do argumento, permitem criar a transposição didática necessária.

Sugerimos que tal tópico seja abordado em cursos de Teoria Quântica da graduação, seja licenciatura ou bacharelado, logo após a apresentação do formalismo matemático da Teoria. Isso fará com que o tópico seja abordado muito mais cedo do que o é usualmente. Uma possível forma de se fazer isso na sala de aula seria seguir a seguinte sequência. 1) Pedir para os alunos fazerem uma primeira leitura do artigo original e entregar ao professor todas as dúvidas. 2) O professor pode, então, apresentar a revisão teórica necessária (o correspondente à seção II deste artigo) e discutir seu o argumento geral (com as figuras 1 e 2, por exemplo). 3) Os alunos podem fazer uma nova rodada de leitura e, então, 4) o professor apresenta o desenvolvimento do artigo detalhadamente. Pode-se, nesse momento, 5) promover uma discussão na sala sobre o argumento apresentado no artigo. Ao seguir esses passos, entendemos que, primeiramente, gera-se um fator motivacional, provocando nos alunos a vontade de entender um artigo importante da história da Teoria Quântica, escrito por cientistas que contribuíram significativamente para ciência. Na sequência, garante-se que todos os conhecimentos prévios necessários sejam sistematizados de forma a viabilizar a compreensão do texto. Por fim, apresenta-se o artigo e promove-se um debate, de forma que os alunos possam se aprofundar no entendimento do tema e elaborar sua compreensão sobre o tópico em questão.

Esperamos que esse trabalho contribua para a comunidade de Ensino de Física, viabilizando que a discussão sobre tal tema possa ser efetivamente levado para o contexto pedagógico. Entendemos que a discussão do trabalho original em sala de aula pode ser um fator importante de motivação para estudantes de Física e pode contribuir para um melhor entendimento da TQ.

REFERÊNCIAS

Auletta, G., Fortunato, M., & Parisi, G. (2009). *Quantum Mechanics*. New York, USA: Cambridge University Press.

Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*. *Physics Physique Fizika*, *1*, 195–200. https://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195

Bender, C. ., Brody, D. C., & Jones, H. F. (2003). Must a Hamiltonian be Hermitian? *American Journal of Physics*, *71*(11), 1095–1102. https://doi.org/https://doi.org/10.1119/1.1574043

Bohm, D. (1952a). A suggested interpretation of the Quantum Theory in terms of " hidden" variables.I. *Physical Review*, 85(2), 166-179. https://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.166

Bohm, D. (1952b). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II. *Physical Review*, *85*(2), 180–193. https://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.180

Bohr, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Phys. Rev.*, *48*(8), 696–702. https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.696

Bohr, Niels. (1934). *Teoria atómica e a descrição da Natureza*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Bunge, M. (1973). *Filosofia da Física*. Lisboa, Portugal: edições 70.

Bunge, M. (2007). *Física e Filosofia* (1ª ed). São Paulo, Brasil: Perspectiva.

Butkov, E. (1988). *Física Matemática*. Rio de Janeiro, Brasil: LTC.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, França: La Pensée Sauvage.

Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (1977). *Quantum Mechanics*. New York, USA: John Wiley and Sons.

Cushing, J. (1994). *Quantum Mechanics - Historical contingency and the Copenhaguen hegemony*. Chicago, USA: University of Chicago Press.

Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10), 777-780. https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777

Freire Jr., O., Pessoa Jr., O., & Bromberg, J. L. (2011). *Teoria quântica: estudos históricos e implicações culturais*. São Paulo, Brasil: EDUEPB.

Freire, O. (2015). *The Quantum Dissidents: Rebuilding the Foundations of Quantum Mechanics (1950-1990)*. New York, USA: Springer.

Gomatam, R. (2007). Niels Bohr's interpretation and the Copenhagen interpretation - Are the two incompatible? *Philosophy of Science*, *74*(5), 736–748. https://doi.org/10.1086/525618

Gottfried, K., & Yan, T.-M. (2003). *Quantum Mechanics: Fundamentals* (2 ed). New York, USA: Springer.

Griffiths, D. J. (2011). *Introduction to Quantum Mechanics* (2 ed). São Paulo, Brasil: Pearson.

Griffiths, R. B. (1987). Correlations in separated quantum systems: A consistent history analysis of the EPR problem. *American Journal of Physics*, *55*(1), 11–17. https://doi.org/10.1119/1.14965

Howard, D. (2004). Who invented the "Copenhagen interpretation"? A study in mythology. *Philosophy of Science*, *71*(5), 669–682. https://doi.org/10.1086/425941

Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics*. New York, USA: John Wiley and Sons.

Jammer, M. (1966). *The conceptual develpment of Quantum Mechanics*. New York, USA: McGraw-Hill Book Company.

Karam, R. (2020). Schrödinger's original struggles with a complex wave function. *American Journal of Physics*, *88*(6), 433–438. https://doi.org/10.1119/10.0000852

Karam, R. (2021). Considerações metodológicas sobre o uso de fontes primárias no ensino de Física. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, *4*(ed. especial), 1067–1082. https://doi.org/https://doi.org/10.5335/rbecm.v4i3.12908

Laloë, F. (2001). Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems. *American Journal of Physics*, *69*(6), 655–701. https://doi.org/https://doi.org/10.1119/1.1356698

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1977). *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (3th ed). New York, USA: Pergamon Press.

Lima, N., Cavalcanti, C., & Ostermann, F. (2021). Concepções de Dualidade Onda-Partícula: Uma proposta didática construída a partir de trechos de fontes primárias da Teoria Quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *43*, e20200270. https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2020-0270

Lima, N., & Karam, R. (2021). Particle velocity = group velocity: A common assumption in the different theories of Louis de Broglie and Erwin Schrödinger. *American Journal of Physics*, *89*(5), 521–528. https://doi.org/10.1119/10.0003165

Mermin, N. D. (1985). Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Physics Today*, *38*(4), 38–47. https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.880968

Mostafazadeh, A. (2001). Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, *43*(1), 205–214. https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.1418246

Neumann, J. Von. (1932). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (1st ed.). Berlin, Germany: Julius Springer.

Ostermann, F., Pereira, A., Cavalcanti, C. J. de H., & Pessoa Jr., O. (2012). Uma abordagem conceitual e fenomenológica dos postulados da física quântica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *29*(2), 831–863. https://doi.org/10.5007/2175-7941.2012v29nesp2p831

Reisler, D. L. (1971). The Epistemological Basis of Einstein's, Podolsky's, and Rosen's Objection to Quantum Theory. *American Journal of Physics*, *39*, 821–831. https://doi.org/10.1119/1.1986291

Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2013). *Mecânica Quântica Moderna* (2 ed). Porto Alegre, Brasil: Bookman.

Schrödinger, E. (1935). Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *31*(4), 555–563. https://doi.org/10.1017/S0305004100013554

Schrödinger, E. (1936). Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *32*(3), 446–452. https://doi.org/10.1017/S0305004100019137