

# Momento angular en libros de texto de nivel universitario básico

## Angular momentum in basic university level textbooks

Elena Hoyos<sup>1\*</sup>, Gabriel Callojas<sup>1</sup> y Marta Cecilia Pocovi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, Avenida. Bolivia 5150, CP 4400, Salta. Argentina.

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avenida. Bolivia 5150, CP 4400, Salta. Argentina.

\*E-mail: hoyosele@gmail.com

### Resumen

Se realiza un análisis de la presentación del concepto de momento angular en una muestra de libros de texto de mecánica básica a nivel universitario. Dicho estudio es llevado a cabo con base en un protocolo que permitió identificar aspectos de la presentación que podrían favorecer la aparición de sobre-simplificaciones en lectores i.e.: la falta de explicitación del paso de discreto a continuo, el uso exclusivo de cuerpos simétricos en las situaciones consideradas y el planteo de la analogía entre el caso lineal y el angular.

**Palabras clave:** Momento angular; Sobre-simplificaciones; Cuerpo rígido.

### Abstract

An analysis of the presentation of the concept of Angular Momentum within a basic-university-level textbook sample was carried out. A protocol was designed to allow the identification of those aspects in the presentation that might favor the existence of over-simplifications among readers, i.e.: the lack of explicitly showing the way in which the passage from the discrete analysis onto the continuous one is carried out, the exclusive use of symmetrical bodies among the considered physical situations, and the use of the analogy between the angular and the linear case.

**Keywords:** Angular momentum; Over-simplifications; Rigid body.

## I. INTRODUCCIÓN

La Mecánica Clásica, consta de un cuerpo de definiciones de conceptos básicos y de enunciados de leyes fundamentales. Tradicionalmente, a nivel universitario, algunos temas en los cuales se aplican los conceptos y leyes de la Mecánica Clásica son: fuerzas centrales, cuerpo rígido y oscilaciones. En el estudio de estos temas, resulta relevante la identificación del alcance y de las condiciones de validez de la Mecánica Clásica. En este trabajo se analizaron algunos aspectos relacionados con la presentación del concepto de momento angular que resulta fundamental en, por ejemplo, el planteo de problemas de dinámica de un cuerpo rígido. La introducción de este concepto en los libros posee algunas características distintivas. En primer lugar, el contexto en el que se introduce puede diferir en los distintos textos y, consecuentemente, esto podría afectar su aprendizaje por parte de los estudiantes (lectores). La segunda característica distintiva de una presentación del momento angular asociado a un cuerpo rígido radica en que difiere de acuerdo al nivel de matemática alcanzado previamente por los lectores a los que está dirigido el texto: el desarrollo del momento angular haciendo uso de herramientas matemáticas avanzadas permite el análisis de propiedades o características del concepto que no se manifiestan en las versiones más básicas y simplificadas. En este sentido, se distinguirán dos niveles de presentación del concepto en los libros de texto que se condicen con dos instancias de la currícula de una carrera de Licenciatura en Física: el primer nivel se va a identificar como “universitario básico” y corresponde a una presenta-

ción dirigida a estudiantes que conocen las herramientas del Análisis Matemático en una variable (derivación e integración). El segundo nivel de abordaje en los libros de texto, se denominará “universitario superior”, y es aquel apuntado a lectores que cuentan con las herramientas del Análisis Matemático en varias variables, la resolución de ecuaciones diferenciales y el Análisis Variacional. La coherencia y coordinación entre el contenido mostrado en textos de distinto nivel es importante para facilitar la comprensión de un tema por parte de los lectores a medida que avanzan en su formación.

En este trabajo se analizó la presentación del concepto de momento angular, en libros de texto universitarios utilizados en cursos de Mecánica Clásica de nivel básico y como un antecedente para el estudio del abordaje de este concepto en textos de nivel superior.

## II. FUNDAMENTACION TEORICA Y PLANTEO DEL PROBLEMA

Tradicionalmente, el estudio de la Mecánica Clásica, inicia con el análisis del movimiento de una partícula. Para ello se definen conceptos como fuerza, cantidad de movimiento, energías, torque, momento angular, entre otros, estos temas se fundamentan teóricamente con las leyes de Newton, los teoremas de conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento angular. Seguidamente se analiza el comportamiento de un sistema de partículas, para lo cual se aplica la teoría desarrollada en un nuevo contexto. Un ejemplo frecuente de esos sistemas son aquellos que se encuentran bajo la acción de las fuerzas centrales; para este análisis, se requiere enfatizar las condiciones de validez aprendidas previamente. Posteriormente, se analiza el movimiento de un cuerpo rígido, utilizando lo aprendido tanto para una partícula como para un sistema de partículas. Nuevamente, se deben establecer o recordar las consideraciones necesarias para la aplicación de lo ya aprendido en este nuevo contexto en el que también se incorporan nuevos conceptos. La Mecánica Clásica tiene condiciones de validez que limitan su aplicación y es relevante recordarlas cada vez que se enseña un tema nuevo en ese contexto. La importancia de la dinámica del cuerpo rígido en Física no se ve reflejada aún en el número de investigaciones en Enseñanza de Física existentes en Argentina. Este trabajo constituye un puntapié inicial para su estudio detallado ya que es un ejemplo de un concepto al que se recurre, por su utilidad, en contextos en los que no fue definido. Analizar los problemas que presenta el aprendizaje de la dinámica de cuerpo rígido es una tarea muy amplia en cuanto a los conceptos y leyes que involucra. En esta primera aproximación al tema, se trabajó sobre uno de los conceptos esenciales para la descripción de la dinámica del cuerpo rígido: el momento angular.

De la experiencia en clases se concluye que la mayor parte de los alumnos de nivel universitario incluye la lectura de textos como una de las estrategias de aprendizaje más comunes e importantes. Nist y Simpson (2000) y Kelly (2007), mostraron, por ejemplo, que el 85% de los alumnos universitarios utilizan los libros de texto para aprender. La importancia de los libros en el proceso enseñanza-aprendizaje trasciende su influencia en la comprensión de la materia; también son utilizados por los profesores como una guía en la elección de qué enseñar y cómo secuenciar el aprendizaje. En este sentido, el análisis de cómo los libros de texto presentan los distintos conceptos de Física constituye un aspecto importante en el estudio complejo del aprendizaje que logran los estudiantes a partir de ellos. En particular, este tipo de análisis fue elegido como la herramienta para iniciar el estudio futuro y más amplio acerca del aprendizaje y la enseñanza del concepto de momento angular.

Existen estudios en los cuales se han detectado problemas de comprensión de textos avanzados y que se relacionan al aprendizaje logrado en primera instancia, a un nivel más básico. En particular, la Teoría de la Flexibilidad Cognitiva desarrollada por Spiro, Coulson, Feltovich y Anderson (2013) define lo que se espera de los lectores en una situación de “aprendizaje avanzado”, i.e., lograr un entendimiento profundo, razonar con los conceptos adquiridos y aplicarlos flexiblemente en diversos contextos. La misma teoría identifica una característica de la comprensión que manifiestan los lectores avanzados al leer un texto de este nivel: es común que estos estudiantes incorporen en sus explicaciones acerca de lo leído, los tratamientos simplificados del material estudiado anteriormente. En otras palabras, la forma simplificada en la que se han adquirido esos conocimientos previamente puede promover, en algunos estudiantes, estrategias de simplificación, que luego restringen su capacidad para el procesamiento de situaciones complejas. Estas ideas sobre-simplificadas y originadas en aprendizajes previos a nivel básico que manifiestan alumnos avanzados al leer textos más complejos, actúan a modo de pre-concepciones (pg. 642) que impiden o interfieren con la comprensión de lo leído.

En los niveles básicos de enseñanza, para poder iniciar el aprendizaje de la mayoría de los conceptos se plantean situaciones extremadamente simples (teóricas) que deben cumplir una gran cantidad de condiciones para ser válidas. Esta simplificación tiene el propósito de centrar al estudiante en el concepto a aprender. Una vez comprendido el concepto en la situación más simple posible, se lo aplica a situaciones más complejas (paulatinamente menos teóricas), de modo que se van reduciendo las simplificaciones realizadas inicialmente. Este proceso continúa hasta llegar a describir situaciones reales (no teóricas) con el objeto de lograr que los estudiantes puedan analizar cualquier situación,

aún aquellas que son complejas e irregulares, lo cual constituye una de las características del aprendizaje avanzado. Según Spiro (2013), en el aprendizaje avanzado, es común que los estudiantes realicen sobre-simplificaciones de situaciones complejas e irregulares, que tienen su origen en lo aprendido en los niveles iniciales de aprendizaje. Es decir que, algunos estudiantes analizan situaciones complejas como si fuera la situación más simple estudiada inicialmente. Spiro hace una descripción más detallada de las posibles simplificaciones y encuentra que las semejanzas superficiales entre fenómenos distintos son tratadas de manera que propician que las situaciones estudiadas no presenten diferencias (tratan lo continuo como discreto, lo dinámico como estático, lo multidimensional como unidimensional); la representación conceptual se plantea como independiente del contexto; existe un exceso de confianza en estructuras de conocimiento recopiladas previamente; también se encuentra una tendencia a mantener una división rígida del conocimiento en partes que no interactúan entre sí.

Justamente en el estudio del momento angular en la dinámica de cuerpo rígido a nivel superior, los estudiantes deben aplicar este concepto adquirido previamente a nivel básico, en un nuevo contexto. Desde la mirada de Spiro *et al.* (2013), el aprendizaje del momento angular en la dinámica de cuerpo rígido en cursos universitarios de nivel superior, correspondería a un “aprendizaje avanzado”. Según la Teoría de la Flexibilidad Cognitiva (Spiro *et al.*, 2013), el estudio previo y simplificado de un concepto presentado en textos de las asignaturas básicas, podría generar preconcepciones sobre-simplificadas asociadas con ese aprendizaje previo.

Esta situación de sobre-simplificación puede también presentarse dentro del mismo nivel básico. O sea, si el concepto de momento angular es definido en el contexto de, por ejemplo, dinámica de la partícula que se estudia antes que la dinámica del cuerpo rígido, es probable que los estudiantes desarrollen el tipo de preconcepciones descritas por la Teoría de Flexibilidad Cognitiva, al aprender a partir de textos en los cuales se presenta el concepto en un contexto nuevo (cuerpo rígido).

En este trabajo se determinó la localización de la introducción del concepto de momento angular en el conjunto de temas incluidos en los libros de Mecánica de nivel universitario básico. Es decir, se determinó si el momento angular es definido previamente al estudio de la dinámica de cuerpo rígido, si es utilizado en más de un contexto en el texto o si es definido en el contexto del movimiento del rígido. Además, se identificaron las simplificaciones que se realizan en estos textos, que pudieran resultar en estrategias de sobre-simplificación en los lectores de textos de cursos de nivel superior.

La pregunta de esta investigación, es entonces: “¿Cuáles son las características de la presentación del concepto de momento angular en los textos utilizados en un curso de Física universitaria de nivel básico? y, con base en estos resultados, ¿Se puede prever de manera fundamentada, la posible existencia de sobre-simplificaciones que se verían favorecidas al estudiar nuevamente el tema en un curso de nivel superior?”

### III. METODOLOGIA

En este trabajo se va a analizar la presentación del momento angular en libros de texto de nivel básico universitario. Esto constituirá un Estudio de Caso que permitirá lograr una caracterización de la presentación realizada por los textos mediante la descripción de sus particularidades y de la identificación de patrones recurrentes. Los libros considerados constituyen la muestra que permitirá el estudio en profundidad de los mencionados aspectos de interés para el equipo de investigación.

Para definir los textos a analizar se realizó un relevamiento en la red sobre las bibliografías utilizadas en cursos de nivel básico universitario de Mecánica Clásica en carreras de Licenciatura en Física de la Argentina, y se encontraron aquellas propuestas en los programas de diez universidades nacionales de las siguientes provincias: Salta, Tucumán, Catamarca, Río Cuarto, San Luis, Córdoba, La Plata, Mar del Plata y la Pampa. Así, la muestra de libros considerados la constituyeron aquellos que más se repiten en los programas encontrados, los libros son: [A] Alonso y Finn (1971), [B] Resnick, Halliday y Krane (2010), [C], Sears, Young y Freedman (1999), [D] Tipler (2005), [E] Ingard y Kraushaar (1973) y [F] Serway (2008). Se han utilizado citas abreviadas para facilitar la redacción, las citas completas se hallan en la sección Referencias. Los textos [A] y [B] se encontraron en siete listados bibliográficos de los programas considerados; [C], [D] y [E] se repiten en cinco listados; y [F] es citado en cuatro. Es importante destacar que existen otros textos que son citados menos veces, que no se analizaron en este trabajo.

Para realizar el análisis de los textos se diseñó un protocolo en el que se enumeraron las siguientes características a identificar:

- i) Contextos en los que se presenta la idea de momento angular a lo largo del libro.
- ii) Definición: Se examinó la definición de momento angular, tanto en el contexto inicial como en los otros contextos, determinando cómo se extiende la definición inicial a los distintos casos.

iii) Explicación cualitativa del concepto: Se identifican las explicaciones cualitativas acerca del momento angular en cualquiera de los contextos en los que se trabaja.

iv) Condiciones físicas que acompañan a la definición: Se estudiaron las condiciones físicas que se explicitan tanto en la presentación de la definición propiamente dicha como en su aplicación a casos concretos.

#### IV. RESULTADOS

El análisis realizado en los libros se resume a continuación. En esta exposición de resultados, se ha utilizado el siguiente formato para facilitar su lectura: primero se realiza un resumen de la presentación en cada libro, luego, se detalla el análisis de los aspectos enumerados en el protocolo.

##### [A] Alonso y Finn (1971)

i) Contexto en el que se presenta la definición: La primera vez que se define el momento angular es en el capítulo 7: Dinámica de una partícula, en la sección “7.13. Momento angular”, y se la aplica en la sección “7.14. Fuerza Central”. Se retoma el concepto en el capítulo 9 “Dinámica de un sistema de partículas”, en la sección “9.4. momento angular de un sistema de partículas”. En el capítulo 10, “Dinámica de Cuerpo Rígido”, en la sección “10.2. momento angular de un cuerpo rígido”, se vuelve a retomar el concepto de momento angular ahora aplicado a un cuerpo rígido.

ii) Definición: En la definición inicial de momento angular  $\vec{L}$  para una partícula respecto de un punto O cualquiera, se recuerda la expresión de la Cantidad de Movimiento  $\vec{p}$  y se escribe la ecuación  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . El vector posición  $\vec{r}$  se muestra en el gráfico y no se hace ninguna aclaración lingüística al respecto. Se encuentra la ecuación dinámica  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ , en la cual  $\vec{\tau}$  es el torque resultante sobre la partícula. En la presentación del concepto de Fuerza Central, se utiliza la ecuación dinámica para describir el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza de este tipo. En el tema Sistema de Partículas, se utiliza la definición de momento angular para una partícula con el objeto de analizar de forma detallada un sistema de dos partículas; luego se generaliza para sistemas de cualquier número de partículas y se concluye que el momento angular del sistema es la suma de los momentos angulares de las distintas partículas, analizando también la ecuación dinámica. En la introducción del capítulo 10, se define cuerpo rígido como un caso especial de un sistema de partículas, y se especifica el eje de rotación, también se escribe la ecuación dinámica y, en la siguiente sección, se trabaja con una partícula del cuerpo para encontrar el momento angular; para ello, se aplica la definición se realiza el desarrollo sólo con la componente del momento angular en la dirección del eje de rotación. Así, se define momento inercia I, se escribe el momento angular del cuerpo rígido como la suma de los momentos angulares de las partículas que lo constituyen.

iii) Explicación cualitativa del concepto: en ningún caso se elaboran explicaciones cualitativas.

iv) Condiciones: Se presenta la definición del momento angular para una partícula en un caso general, sin restricciones de ningún tipo. Luego se analiza el movimiento de una partícula en un plano, estableciendo que este tipo de movimiento deja invariante la dirección del momento angular. También se plantea el movimiento circular de una partícula, encontrando que en este caso el momento angular es paralelo a la velocidad angular. En el análisis de un sistema de partículas, también se presenta el caso general, sin restricciones. Cuando se estudia la rotación del cuerpo rígido, se trabaja respecto de un eje, y se establece que este eje debe pasar por un punto fijo en un sistema inercial o por el centro de masa del cuerpo. Se establece que el momento angular total no es paralelo al eje de rotación, y se encuentra su componente en la dirección del eje de rotación. Se afirma sin fundamentación que existen tres direcciones para las cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación a las cuales se las presenta como ejes principales de inercia. Por último, se establece que si un cuerpo rota alrededor de un eje principal de inercia el momento angular total es paralelo a la velocidad angular.

##### [B] Resnick, Halliday y Krane (2010)

i) Contexto en el que se presenta la definición: En este texto la primera característica a resaltar es que se utiliza la expresión, “ímpetu angular” en lugar de “momento angular”. El desarrollo del momento angular se realiza en el capítulo 13 bajo el título de “Ímpetu Angular”. En la sección “13.1: Ímpetu Angular de una partícula”, se presenta por primera vez la definición del momento angular. En la sección “13.2: Sistema de partículas”, se utiliza la definición previa y encuentra el momento angular de un sistema de partículas. En la sección “13.3: Ímpetu angular y velocidad angular”, se recurre a las definiciones previas encontrando el momento angular de un cuerpo rígido.

ii) Definición: La primera definición del momento angular se establece para una partícula. Para ello se identifican previamente todas las magnitudes intervinientes, luego se define el momento angular mediante una ecuación y posteriormente se deduce la ecuación dinámica. Para un sistema de partículas se define al momento angular del sistema como la suma de los momentos angulares de cada partícula, se realiza la aclaración que esto es válido para sistemas donde las partículas tienen movimiento relativo entre ellas o en sistemas donde las partículas tienen relaciones espaciales fijas. En la sección 13.3, se trabaja con un ejemplo de una partícula para analizar si el momento angular y la velocidad angular son o no paralelos, planteando un caso en el que estos dos vectores no son paralelos. También se encuentra la componente del momento angular en la dirección de la velocidad angular. A continuación se analiza la rotación de un cuerpo simétrico formado por dos partículas, en este caso el momento angular y la velocidad angular son paralelas, el texto expresa que se puede “extender este sistema a un cuerpo rígido formado de muchas partículas”, aclara que si el cuerpo es simétrico respecto del eje de rotación el momento angular es paralelo a la velocidad angular.

iii) Explicación cualitativa del concepto: A lo largo del texto se usa como explicación cualitativa la analogía con el ímpetu lineal según la cual se establece que, en el movimiento de rotación, el análogo al ímpetu lineal es el ímpetu angular. Esta analogía se utiliza también cuando se analiza la ecuación dinámica. Cuando se presenta el ejemplo donde la velocidad angular y el momento angular no son paralelos, se expresa que la analogía con las magnitudes lineales no se cumple en este caso.

iv) Condiciones: Se define el eje de rotación en el capítulo 11 y, en el capítulo 12, se deduce la ecuación dinámica calculando los torques respecto del eje de rotación. Se trabaja en un sistema de referencia inercial para definir el momento angular de una partícula, con el eje de rotación fijo. Para un sistema de partículas no se imponen condiciones. En el caso del cuerpo rígido se realiza sólo el análisis para un cuerpo simétrico respecto del eje de rotación.

### [C] Sears, Young y Freedman (1999)

i) Contexto en el que se presenta la definición: La primera vez en la que se define el momento angular es en el capítulo 10: “Dinámica de movimiento de rotación”, en la sección “10.6. Momento angular” y en esta sección se aplica la definición a cuerpo rígido. En el capítulo 9: “Rotación de cuerpos rígidos”, en la sección “9-7 Cálculo del momento de inercia” se define cuerpo rígido.

ii) Definición: La definición inicial de momento angular  $\vec{L}$  se realiza para una partícula respecto de un punto O cualquiera y se escribe la ecuación  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Luego se encuentra la ecuación dinámica  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ , en la cual  $\vec{\tau}$  es el torque resultante sobre la partícula. Se hace referencia a la definición de cuerpo rígido pero no de manera explícita de forma tal que se deja al lector el recuerdo del desarrollo llevado a cabo previamente, para extender la definición de momento angular a un cuerpo rígido. Se analiza el movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje de rotación, para ello se divide al cuerpo en rodajas, se explica que cada partícula de la rodaja realiza un movimiento circular, se aplica la definición del momento angular para una partícula, se establece que el momento angular de la rodaja es la suma de los Momentos Angulares de las partículas. Finalmente se plantea la ecuación dinámica.

iii) Explicación cualitativa del concepto: se hace una breve referencia a la analogía con el momento lineal.

iv) Condiciones: Se presenta la definición del momento angular para una partícula en un caso general, sin restricciones de ningún tipo. Cuando se estudia la rotación del cuerpo rígido, se trabaja con un cuerpo cualquiera que rota respecto de un eje. En el cálculo inicial se establece que el momento angular total no es paralelo al eje de rotación, a continuación se trabaja con un cuerpo simétrico girando alrededor de un eje de simetría y, en este último caso, se plantea la ecuación  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  estableciendo que para un cuerpo rígido que gira alrededor de su eje de simetría el Momento angular y la velocidad angular son paralelos.

### [D] Tipler (1992)

i) Contexto en el que se presenta la definición: La primera vez que se define el momento angular es en el capítulo 10: “Conservación del momento angular”, en la sección “10.2. Momento angular” y es en esta sección en la que se aplica el concepto definido a cuerpo rígido.

ii) Definición: La definición inicial de momento angular  $\vec{L}$  se realiza para una partícula respecto de un punto O cualquiera, como  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Se analiza el caso de una partícula en movimiento circular. Se analiza el momento angular para dos partículas que se mueven en el mismo círculo, se establece que el momento angular total es la suma de los momentos angulares, y se llega a la ecuación  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ . Se extiende la definición de momento angular a un cuerpo rígido, analizando el movimiento de rotación de un disco, se aplica la definición de momento angular a una partícula del disco y luego se suma para todas las partículas del disco.

iii) Explicación cualitativa del concepto: se hace una breve referencia a la analogía con el momento lineal.

iv) Condiciones: Se presenta la definición del momento angular para una partícula en un caso general, sin restricciones de ningún tipo. En el movimiento circular de una partícula se establece que el momento angular y la velocidad angular son paralelos. En el análisis de las dos partículas moviéndose en el círculo, se establece que el eje de rotación pasa por el centro de masa del sistema y que la distribución de masa es simétrica respecto de este eje. Se establece que para todo sistema de partículas que gira alrededor del eje de simetría, el momento angular total es paralelo a la velocidad angular. En el análisis de un cuerpo rígido, se trabaja particularmente con un disco (cuerpo simétrico) y se analiza el momento angular del cuerpo respecto de un eje paralelo al eje de simetría.

#### [E] Ingard y Kraushaar (1984)

i) Contexto en el que se presenta la definición: En este texto la primera característica a resaltar es que se utiliza la expresión, “Momento Cinético” en lugar de “momento angular”. La primera vez que se define el momento angular es en el capítulo 9: “Momento Cinético”, en la sección “9.1. Fuerza central ejercida sobre una partícula. Conservación del momento cinético”, y se la aplica tanto en la sección “9.2. Conservación del momento cinético de dos o más partículas que se ejercen interacciones en un plano” como en la sección “9-3 El momento cinético como vector”. Se retoma el concepto en el capítulo 12 “Ejemplos de fuerzas y movimiento \_ IV”, en la sección “12.2. Ecuaciones del movimiento”. En el capítulo 13, “Ejemplos de fuerzas y movimiento \_ V”, en la sección “13.1. Variación del momento cinético de una partícula”, se vuelve a trabajar con el concepto de momento angular así como en las secciones “13.2: Ejemplos de movimiento de cuerpos simétricos en rotación”, “13.3: Momentos centrífugos y ejes principales” y “13.4 Relación entre la velocidad angular y el momento cinético de un cuerpo rígido”.

ii) Definición: Inicialmente se trabaja con una partícula sometida a una fuerza central en coordenadas polares y se analiza la conservación de la cantidad de movimiento en estas coordenadas, encontrándose una propiedad de movimiento que debe mantenerse constante  $l = p_{\theta}r$  donde  $p_{\theta}$  es la componente  $\theta$  de la cantidad de movimiento e  $l$  es el Momento Cinético. Esta última es una cantidad escalar que también se expresa en función de la velocidad angular. Luego se analiza un sistema de dos masas, se encuentra el momento angular como la suma de los momentos angulares de las partículas. Se establece que un cuerpo real puede considerarse como un sistema de partículas. Se analiza la dirección y el sentido del vector momento angular para una partícula y se expresa la ecuación  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Luego se planea el cálculo del momento angular para un cuerpo rígido como la integral de la expresión  $d\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{v})dM$ . Se aplican las ecuaciones del movimiento de un sistema de partícula al estudio del movimiento bidimensional de un cuerpo rígido y luego a un movimiento tridimensional.

iii) Explicación cualitativa del concepto: inicialmente se realiza el análisis del movimiento de una partícula sometida a una fuerza central en coordenadas polares. La elección de las coordenadas está asociada al tipo de fuerza que se estudia, dado que las fuerzas centrales tienen sólo componente en la dirección radial, se analiza la conservación de la cantidad de movimiento en estas coordenadas, encontrándose que no se conserva la cantidad de movimiento sino una propiedad del movimiento que se define como momento angular.

iv) Condiciones: Se presenta la definición del momento angular para una partícula sometida a una fuerza central. Luego se analiza un sistema de dos partículas también sometidas a fuerzas centrales. Se extiende a un cuerpo rígido, se resalta que el movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales se desarrolla en el plano mientras que el movimiento de un sistema de partículas y que el de un cuerpo rígido se puede desarrollar en el espacio. Se establece que el movimiento de un cuerpo rígido puede descomponerse en movimientos en distintos planos para su análisis.

#### [F] Serway (1982)

i) Contexto en el que se presenta la definición: La primera vez que se define el momento angular es en el capítulo 11: “Movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje móvil”. En la sección “11.3. momento angular de una partícula”, y en la sección “11.4. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo” se aplica la definición a un cuerpo rígido.

ii) Definición: En la definición inicial de momento angular  $\vec{L}$  para una partícula respecto de un punto O cualquiera, se escribe directamente la ecuación  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Se encuentra la ecuación dinámica  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ , en la cual  $\vec{\tau}$  es el torque resultante sobre la partícula. Luego, se utiliza la definición de momento angular de una partícula para encontrar el momento angular de un sistema de partículas, como la suma de los momentos angulares de las distintas partículas, luego se analiza la ecuación dinámica. Se encuentra el momento angular de un cuerpo rígido como la suma de los momentos angulares de las partículas que lo componen.

iii) Explicación cualitativa del concepto, en ningún caso realiza explicaciones cualitativas.

iv) Condiciones: Se presenta la definición del momento angular para una partícula en un caso general, sin restricciones de ningún tipo. En el análisis de un sistema de partículas, también se presenta el caso general, sin restricciones.

Cuando se estudia la rotación del cuerpo rígido, se trabaja con cuerpos homogéneos que tienen un alto grado de simetría, primero se analiza el rodamiento en un plano y luego se estudia la rotación alrededor de un eje fijo.

## V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

La primera característica que sobresale es que existen distintas formas de referirse al momento angular: Impulso Angular, Momento Cinético y momento angular. En cuanto a la forma de presentación, la mayoría de los textos ([B], [C], [D] y [F]) lo hacen en una sola sección y dos de ellos, en tres secciones no consecutivas ([A] y [E]). Esta última forma de presentación implica un mayor procesamiento de la lectura por parte del que lee ya que deberá recordar o referirse a capítulos anteriores para lograr la comprensión de los posteriores. Esta característica puede pensarse de dos maneras: por un lado, podría resultar positiva ya que el lector se acostumbra a utilizar el concepto en distintos contextos, integrando los conocimientos ya estudiados y ayudando a reducir la acción de compartimentar los contenidos. Por otro lado, podría resultar negativa si los alumnos no logran por sí solos y, a través de la lectura, llegar a incorporar el uso del concepto en distintos contextos.

Excepto el texto [E], en todos los demás, se introduce el tema planteando la definición para una partícula en forma general. En [A], [B] y [F] se extiende dicho análisis para un sistema de partículas. Se destaca que como en [A] se realiza la mencionada extensión en un capítulo distinto a aquel en el cual se presentó el concepto, se lleva a cabo más detalladamente que en los otros dos. El paso al caso del cuerpo rígido es abordado en todos los textos de distinta manera, centrando la presentación en diferentes aspectos. A excepción de [E], en ninguno se menciona que en el paso del caso discreto al continuo la suma de los Momentos Angulares, pasa a ser una integración. En [A] y [C] se plantea inicialmente el análisis en un cuerpo rígido en general (sin ninguna imposición de simetría) mientras que en el resto se analizan casos de cuerpos simétricos en todo momento. En [A] y [F] no se presenta ninguna explicación cualitativa del significado físico del momento angular mientras que en [B], [C] y [D] la explicación se reduce a establecer una analogía entre el caso lineal y el angular (no se alerta al lector acerca de las restricciones de esa analogía). En [A] se especifica que el análisis se realiza respecto de un punto fijo en un sistema inercial o del centro de masa del cuerpo. En [B], en cambio, se limita la presentación a una rotación respecto de un eje fijo. En el resto, no se detallan demasiado las condiciones bajo las cuales se realiza el estudio del movimiento de rotación. Tanto en [A] como en [B] y [D], se llevan a cabo desarrollos que conducen a determinar la relación que existe entre la dirección del momento angular y la de la velocidad angular para ciertos casos. La presentación en el texto [E], se diferencia de las otras en su explicación cualitativa del concepto y en que explicita que el momento angular de un cuerpo rígido se calcula a partir de una integración.

## VI. CONCLUSIONES

Como se estableció anteriormente, las limitaciones de los análisis que se llevan a cabo en las asignaturas básicas son identificados, en la Teoría de la Flexibilidad Cognitiva (Spiro *et al.*, 2013), como una de las causas de las sobre-simplificaciones que tienden a realizar alumnos que leen textos avanzados sobre un tema ya estudiado. En este sentido, las limitaciones identificadas en los párrafos anteriores, podrían corresponderse a los tipos de sobre-simplificaciones que se pueden presentar en cursos superiores. Como ya se dijo, esa teoría alerta que si los estudiantes incorporan las semejanzas superficiales que existen entre los casos complejos y los casos simples (estudiados anteriormente) podrían producirse sobre-simplificaciones que impidan la correcta comprensión de un tema. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, en la mayoría de los textos no se realiza el pasaje del caso discreto al continuo, manteniendo el tratamiento del cuerpo rígido como si fuera un conjunto de partículas discretas. Asimismo, en todos los textos, el tratamiento del tema de momento angular culmina con el planteo de situaciones referidas a cuerpos simétricos las cuales pueden luego resolverse mediante integrales en una sola variable. Como también advierte Spiro *et al.* (2013), el tratamiento de un problema como unidimensional, cuando en realidad es multidimensional, favorece la generación de sobre-simplificaciones en alumnos avanzados. Por último, el uso de la analogía entre la cantidad de movimiento lineal y el momento angular debería ser planteado con precaución ya que Spiro *et al.* (2013) advierten sobre la existencia de “un exceso de confianza en estructuras de conocimiento recopiladas previamente” que podría ser favorecido mediante dicha analogía.

Como ya se dijo, el trabajo aquí presentado, constituye el puntapié inicial para un estudio futuro en el que se identifiquen las pre-concepciones adquiridas por los estudiantes que deben lograr un aprendizaje avanzado en un curso de nivel superior de Mecánica.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Agencia de Promoción Científica y Tecnológica por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo mediante el subsidio correspondiente al proyecto de investigación PICT-2019-2260.

## REFERENCIAS

- Alonso, M. y Finn E. J. (1971). *Física. Vol. I: Mecánica*. México D. F.: Fondo Educativo Interamericano.
- Ingard, U. y Kraushaar, W. L. (1984). *Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas*. Argentina: Reverté.
- Kelly, G. J. (2007). Discourse in Science Classrooms. En (Abell y Lederman, Eds.) *Handbook of Research on Science Education*. (pp. 443-470) London: LEA.
- Nist, S., & Simpson, M. (2000). College studying. En M. Kamil, P. Mosenthal, P. D. Pearson, & R. Barr (Eds.), *Handbook of reading research*. (Vol. III, págs. 645-666). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S. (2010). *Física. Volumen 1 (4ª Ed.)* México: Grupo Editorial Patria.
- Sears, F. W. Zemansky, M. W., Young, H. D., Freedman, R. A. (1999). *Física Universitaria. Volumen 1 (Novena Edición)*. México: Pearson Educación.
- Serway, R. A. (1982). *Física Tomo I 4ª edición*. México: Mc Graw Hill.
- Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J., & Anderson, D. K. (2013). Cognitive flexibility theory: Advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. En D. E. Alverman, N. J. Unrau y R. Ruddell (eds.) *Theoretical Models and Processes of Reading* (pp 544 – 556). Newark, D E: International Reading Association.
- Tipler, P. A. (1992) *Física II (3ª Edición)*, Barcelona: Reverté.