

# La enseñanza de la teoría de la relatividad restringida de Einstein, estado de la cuestión

## Teaching Einstein's theory of special relativity, state of the art

Xabier Prado<sup>1</sup>, José Manuel Domínguez-Castiñeiras<sup>1</sup>, Iván Area<sup>2</sup>, Ángel Paredes<sup>3</sup> y Jorge Mira<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Facultade de Ciencias da Educación, Departamento de Didácticas Aplicadas, Universidade de Santiago de Compostela, 15782-Santiago de Compostela, España.

<sup>2</sup>Escola de Enxeñaría de Telecomunicación, Departamento de Matemática Aplicada II, Universidade de Vigo, 32004-Ourense, España.

<sup>3</sup>Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo, Departamento de Física Aplicada, Universidade de Vigo, 32004-Ourense, España.

<sup>4</sup>Facultade de Física, Departamento de Física Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela, 15782-Santiago de Compostela, España.

\*E-mail: [fisica.visual@gmail.com](mailto:fisica.visual@gmail.com)

Recibido el 18 de marzo de 2020 | Aceptado el 4 de mayo de 2020

### Resumen

El objetivo del presente trabajo es obtener una visión global sobre la problemática de la enseñanza de la relatividad restringida de Einstein desde la perspectiva del pensamiento del profesorado y de las propuestas didácticas para su enseñanza. La información se ha obtenido de las bases de datos *Web of Science*, *Scopus*, *Educational Resources Information Center* y *Google Scholar*. Se ha seleccionado en función de su fiabilidad y validez, su rigor metodológico y el cumplimiento de los criterios de calidad científica buscada, teniendo en cuenta los índices de valoración de las revistas científicas *Journal Citation Reports (JCR)*, *Scimago Journal Rank (SJR)* e *Índice Compuesto de Difusión Secundaria (ICDS)*. En este estudio se ha puesto de manifiesto el pensamiento del profesorado, así como las propuestas didácticas para la enseñanza de la teoría de la relatividad restringida de Einstein. Forma parte del marco teórico de la investigación de tesis de doctorado del primer firmante, en la que se diseñó, implementó y evaluó una propuesta de enseñanza basada en la geometría de Minkowski, para estudiantes de Bachillerato (17-18 años).

**Palabras clave:** Relatividad restringida de Einstein; Geometría de Minkowski; Pensamiento del profesorado; Propuestas de enseñanza; Revisión bibliográfica.

### Abstract

The objective of the present work is to obtain a global vision on the problem of the teaching of Einstein's special relativity from the perspective of the teachers' thinking and the didactic proposals for its teaching. The information has been obtained from the *Web of Science*, *Scopus*, *Educational Resources Information Center* and *Google Scholar* databases. It has been selected based on its reliability and validity, its methodological rigor and compliance with the desired criteria of scientific quality, taking into account the evaluation indexes *Journal Citation Reports (JCR)*, *Scimago Journal Rank (SJR)* and *Secondary Diffusion Compound Index (ICDS)*. To facilitate the analysis of the information, it was classified into two categories: teachers' thinking and difficulties about Einstein's

RRT, and didactic proposals for teaching Einstein's RRT. The conclusions have revealed the thinking of the teachers as well as the didactic proposals for the teaching of Einstein's theory of special relativity. It is part of the theoretical framework of the first signer's doctoral thesis research, in which a teaching proposal based on Minkowski geometry was designed, implemented and evaluated for high school students (17-18 years old).

**Keywords:** Einstein's special relativity; Geometry of Minkowski; Teachers' thinking; Teaching proposals; Bibliographic review.

## I. INTRODUCCIÓN

La teoría de la relatividad restringida de Einstein (en lo sucesivo, TRR), además de su relevancia en el ámbito científico, entraña un conocimiento de la física necesario para comprender diferentes aspectos de las producciones culturales del siglo XX. La notabilidad del tema se traslada al currículo de educación de niveles preuniversitarios en el ámbito internacional. Así, por ejemplo, en Stadermann, Berg y Goedhart (2019, apéndice A, tabla VII) se puede acceder a información curricular en la que se puede consultar el interés que suscita la TRR en varios países de Europa, Australia y Canadá y cómo se propone su enseñanza en el último curso de secundaria superior. Del mismo modo, en Argentina, dicho interés se contempla en el último curso del ciclo superior de educación secundaria de la orientación de Ciencias Naturales, en el marco de la Física (DGCyE, 2010, p. 125), y, en España, en la asignatura de Física de segundo y último curso de bachillerato (BOE, 2015, nº. 3, p. 272).

La TRR, al igual que la física moderna en su conjunto, ofrece un activo campo de investigación didáctica tanto por la relevancia de sus contenidos como por el carácter contraintuitivo de gran parte de sus resultados, lo que supone un interesante problema didáctico.

Para profundizar en esta problemática, hemos formulado las siguientes preguntas de investigación cuya solución nos parece fundamental para el conocimiento de las principales dificultades y aportaciones para el aprendizaje y enseñanza de la TRR: ¿Cuál es la forma de pensar del alumnado cuando utiliza la TRR para explicar hechos y fenómenos? ¿Cuál es el pensamiento del profesorado cuando explica la TRR a sus alumnas y alumnos? ¿Qué propuestas didácticas se han diseñado y aplicado para la enseñanza y el aprendizaje de la TRR?

Para contestar dichas cuestiones se ha procedido a una exhaustiva revisión bibliográfica que ha permitido establecer el estado de la cuestión sobre el aprendizaje y la enseñanza de la TRR. La primera de ellas ha sido abordada en un trabajo precedente (Prado, Domínguez-Castiñeira, Area, Paredes y Mira, 2020) y las otras dos constituyen el objetivo de este artículo: proporcionar, a la luz de investigaciones anteriores, una perspectiva global sobre la problemática de la enseñanza de la TRR desde la que se contemplan las formas de pensar del profesorado, así como las propuestas didácticas para su enseñanza.

Este trabajo forma parte del marco teórico de la investigación de tesis de doctorado del primero de los firmantes (Prado, 2010, 2012), mediante la que se diseñó, aplicó y evaluó una propuesta didáctica, basada en la formulación geométrica de Minkowski (2012), para la enseñanza de la relatividad restringida de Einstein (Naber, 2012). Dicha propuesta se investigó con estudiantes de último curso de bachillerato (17-18 años).

Consideramos que esta revisión bibliográfica constituye un instrumento eficaz para ayudar al profesorado a fundamentar su acción en el aula; a los investigadores en didáctica de las ciencias experimentales, para el diseño, aplicación y evaluación de propuestas de enseñanza sobre el tema; a ambos destinatarios, para seguir investigando, innovando y enseñando a partir del conocimiento elaborado con anterioridad, por el ahorro de tiempo y esfuerzo que supone. Por último, pero no menos importante, para contribuir a la alfabetización científica de la población.

Este trabajo puede enmarcarse en las siguientes líneas de investigación: Desarrollo del pensamiento científico, y Diseño, implementación y evaluación de propuestas de enseñanza que utilizan la geometría de Minkowski.

En el apartado de implicaciones, se desarrolla una actividad ilustrativa de cómo se puede plantear de forma gráfica y responder geoméricamente la pregunta formulada por Einstein (1905): ¿Depende la inercia de un cuerpo de su cantidad de energía?

## II. MÉTODO

Para la selección de la bibliografía analizada se han utilizado las bases de datos y se han establecido los criterios que se indican a continuación.

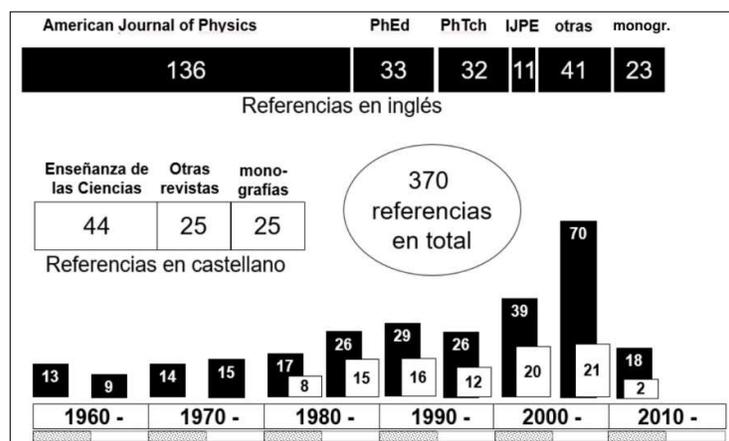
## A. Recuperación de la información. Fuentes documentales

La búsqueda de la literatura se ha realizado consultando las bases de datos *Web of Science*, *Scopus*, *Educational Resources Information Center* y *Google Scholar*. Están especializadas en ciencias humanas y sociales y contienen amplia información sobre revistas y recursos relacionados con la educación.

En el cuadro 1, se recoge un resumen de las revistas consultadas, el número de referencias por revista y el período de tiempo revisado (décadas), correspondientes a la investigación de tesis de doctorado citada (1960-2011) y actualizadas hasta 2020. En la parte superior, resaltado en negro, se muestran las revistas revisadas en inglés, así como el número de referencias correspondientes a cada una de ellas, y las monografías consultadas. En el apartado "otras", para no complicar el cuadro, se agrupan las revistas en las que el número de referencias recogidas fue menos significativo. En el centro de la figura, a la izquierda, se representan, en blanco con borde negro, las revistas revisadas en español y, a la derecha, el número total de referencias recogidas (370). En la parte inferior, se muestran las frecuencias de las referencias seleccionadas, en negro las escritas en inglés y en blanco las redactadas en castellano, distribuidas según las décadas revisadas.

Para la revisión se han utilizado las siguientes palabras clave: Enseñanza de las Ciencias; Relatividad restringida de Einstein; Geometría de Minkowski; Dificultades de aprendizaje; Dificultades de enseñanza; Propuestas de enseñanza (*Science Education*; *Einstein's special relativity*; *Geometry of Minkowski*; *Learning difficulties*; *Teaching difficulties*; *Teaching proposals*).

Para la elaboración de este trabajo, se han seleccionado las referencias más representativas del tema abordado.



CUADRO 1. Revistas consultadas, referencias por revista y período de tiempo revisado en décadas (de Prado, 2012).

## B. Análisis de la fiabilidad y validez de la información. Criterios de selección

- *El objetivo de la revisión*: Obtener una visión global sobre la problemática de la enseñanza de la relatividad restringida de Einstein desde la perspectiva del pensamiento del profesorado y de las propuestas didácticas para su enseñanza.
- *La fiabilidad y validez de los artículos*: Se ha tenido en cuenta su rigor metodológico y si cumplen los criterios de calidad científica buscada. Para ello se han utilizado los índices de valoración de las revistas científicas, *Journal Citation Reports* (JCR), *Scimago Journal Rank* (SJR) e *Índice Compuesto de Difusión Secundaria* (ICDS).

## C. Sistematización de la información. Resultados y discusión

Para sistematizar los resultados, realizar el análisis y formular las implicaciones en la enseñanza, se ha categorizado la información disponible. Señalaremos que, aunque las categorías resultantes se han inferido de los trabajos de investigación revisados, se reformularon y agruparon de modo que nos permitieran extraer las dificultades de enseñanza y las propuestas didácticas encontradas en los contextos de habla española e inglesa.

Como se ha indicado, el objetivo de esta investigación es analizar, mediante la bibliografía seleccionada, las formas de pensar del profesorado sobre la TRR así como las propuestas didácticas para su enseñanza. En consecuencia, se han establecido las siguientes categorías para organizar el análisis de la información: Pensamiento y dificultades del profesorado acerca de la TRR de Einstein; Propuestas didácticas para la enseñanza de la TRR de Einstein.

### III. PENSAMIENTO Y DIFICULTADES DEL PROFESORADO ACERCA DE LA TRR DE EINSTEIN

Se han revisado las dificultades que encuentra el profesorado para enseñar la TRR. El objetivo es verificar si la complejidad de los conceptos implicados puede inducir ideas alternativas no deseables, tanto desde la perspectiva científica como desde la propia didáctica. Numerosos autores abordaron este tema durante la segunda mitad del siglo XX y en este contexto Alemañ (1997) puso de manifiesto que el profesorado trabajaba con ideas como:

- Que la ecuación de Einstein,  $E = mc^2$ , solo es útil para transformar unidades de masa en energía o viceversa. El cuadrado de la velocidad de la luz sería un factor de conversión análogo a la densidad. Esta interpretación oscurece la universalidad de la equivalencia entre masa y energía frente al carácter particular de las relaciones de densidad.
- Que un cuerpo acelerado nunca alcanza la velocidad de la luz porque la masa relativista crece con la velocidad. Concepción que se relaciona con la anterior.
- Que en la relatividad los conceptos de sistema de referencia, sistema de coordenadas y observador, son completamente equivalentes. Aunque estos están estrechamente relacionados, la noción de sistema de referencia (SR) es esencial para el tratamiento de la relatividad. Sin embargo, contrariamente a esta forma de pensar, un mismo SR puede admitir diversos sistemas de coordenadas y no todos los SR tienen por qué contener un observador.
- Que la relatividad nació como resultado de la insatisfacción causada por los resultados negativos de Michelson y Morley al tratar de detectar el movimiento absoluto con respecto al éter. Sin embargo, Einstein afirmó, aunque conocía el citado experimento, que tuvo poca o ninguna influencia en el desarrollo de su teoría de la relatividad (Pais, 2005).
- Que la TRR trata los procesos en condiciones extremas de velocidad o energía. Por lo tanto, sería mejor prescindir de ella debido a sus complicaciones teóricas y su alejamiento de la vida cotidiana. Contra este tipo de argumento, debe señalarse que los efectos relativistas tienen aplicaciones y resultados prácticos y tangibles.
- Que realizaban aplicaciones inapropiadas de los conceptos de sistema de referencia y evento, incluso en el marco de la cinemática clásica.

Por otra parte, Mermin (1994) señala el error de algunos profesores que conceden a la transformación matricial de Lorentz un papel esencial para la enseñanza de la teoría de la relatividad, y argumenta que a ningún profesor se le ocurriría, por ejemplo, introducir matrices ortogonales como punto de partida para explicar el concepto de rotación espacial.

Además, Baierlein (2006) abordó dos “mitos” o errores comunes en la enseñanza de la TRR. El primero es la presentación de la transformación de Galileo como una especie de límite de baja velocidad para la transformación de Lorentz, lo que puede generar confusión. El segundo es la existencia de dos enfoques diferentes para la invariabilidad de la velocidad de la luz, el primero relacionado con el movimiento de la fuente y el segundo asociado con el movimiento del observador. Estas concepciones podrían provocar la desorientación de los estudiantes si no se analiza la relación existente entre ellas.

Pérez y Solbes (2006) detectaron varias estrategias que consideran inadecuadas para la enseñanza de la TRR. Entre las más comunes se pueden citar:

- Introducir el tema con el experimento crucial de Michelson-Morley, pues este enfoque empirista oscurece el carácter esencialmente ontológico de la TRR.
- Enfocar el desarrollo de la relatividad en la brillante creación de un solo hombre, Einstein, ignorando la naturaleza colectiva del avance científico.
- Omitir o, por el contrario, exagerar, el cambio de los paradigmas físicos.

De Ambrosio y Levrini (2010) determinaron que las dificultades se pueden identificar y abordar en las etapas iniciales, cuando el profesorado se acerca a la propuesta y diseña sus propios caminos didácticos. Por su parte, Sezgin (2011) verificó que el profesorado en formación inicial tiene dificultades específicas y considerables con respecto a conceptos como los de tiempo propio, dilatación del tiempo, masa y densidad relativista.

De Hosson y otros (2010) encontraron una profunda falta de comprensión de los conceptos de sistema de referencia y evento dentro de un grupo de futuros profesores de física, quienes piensan que los eventos pueden ser simultáneos para un observador pero no simultáneos para otro, incluso cuando ambos están en el mismo SR. En la misma línea, De Hosson y Kermen (2012) señalan que los futuros profesores creen que el orden en que se perciben dos eventos determina el orden de sucesión de cuándo ocurren. Según Turgut, Gurbuz, Salar y Toman (2013) la mayoría de los candidatos a un puesto de profesor de física de grado, tuvieron dificultades con la relatividad del tiempo y con los sistemas de referencia y pocos reconocieron la velocidad de la luz como una velocidad límite que ningún otro objeto puede alcanzar.

Yavas y Kizilcik (2016) intentaron descubrir la razón por la que el profesorado de física en formación inicial tenía dificultades con la TRR. Afirman que los problemas con el formalismo matemático, la determinación del marco de referencia y la transición de la mecánica newtoniana a la relativista dificultaron el proceso de aprendizaje.

#### IV. PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

En esta sección, se analizan las propuestas de enseñanza que se han presentado en la literatura sobre el tema, según el objetivo didáctico al que dedican mayor atención. De este modo, se han establecido las siguientes categorías: propuestas de cambio conceptual; propuestas de divulgación; animaciones; visualización sin cálculo; propuestas de naturaleza geométrica; y propuestas basadas en la geometría del espaciotiempo de Minkowski.

##### A. Propuestas de cambio conceptual

En este apartado se discuten las propuestas de enseñanza que centran su atención en las dificultades didácticas relacionadas con los conceptos relativistas y proponen estrategias genéricas para lograr el cambio conceptual.

Gil y Solbes (1993) proponen un modelo educativo constructivista para introducir la mecánica relativista a partir de la mecánica de Newton. Villani y Arruda (1998) proponen una enseñanza de la TRR por cambio conceptual otorgando un papel esencial a la historia de la ciencia, así como De Ambrosio y Levrini (2010) al analizar la forma de enseñar el concepto relativista del tiempo propio. Levrini (2002) expone el carácter absoluto del espaciotiempo y discute algunas implicaciones para la enseñanza, en particular sugiere un enfoque centrado en proponer al alumnado preguntas simples de contenido histórico-epistemológico, como “¿qué es el espacio?”.

Arriasecq y Greca (2007) establecieron una serie de categorías y subcategorías conceptuales para la enseñanza de la TRR, analizando también el concepto de tiempo como cambio, la contraposición entre el tiempo absoluto y el tiempo relativo y la distinción entre un observador (que mide las magnitudes físicas) y un espectador (que recibe señales de luz y construye imágenes de los eventos). Asimismo Arriasecq y Greca (2012) elaboraron una propuesta didáctica con un enfoque de tipo epistemológico e histórico que demostró ser ventajosa frente a la enseñanza tradicional basada en los libros de texto.

La manera en que se transforman magnitudes dinámicas como el trabajo o las energías cinética y potencial bajo los cambios de referencia en la mecánica newtoniana (transformación de Galileo), han sido objeto de atención reciente por parte de diversos autores (Ginsberg, 2018; Hilborn, 2019), en gran medida por servir de antesala al análisis posterior de estas magnitudes en la TRR.

Pérez y Solbes (2003) comentaron algunos problemas sobre la enseñanza de la relatividad restringida, subrayando la dificultad que entraña el cambio de paradigma (de la relatividad de Galileo a la relatividad restringida de Einstein) y proponen desarrollar una intuición galileana previa durante la educación secundaria obligatoria (de 12 a 16 años). Al analizar las ideas previas sobre el espacio, el tiempo y la masa, indican que muchas de ellas fueron motivadas por los medios de comunicación, especialmente la televisión. Allchin (2004), Meneses y Martín (2015) llegaron a resultados similares.

Scherr, Shaffer y Vokos (2001, 2002), comprueban que las ideas de simultaneidad absoluta y relativa coexisten en la mente de los alumnos después de una secuencia de instrucción y proponen tutoriales específicos para promover la reflexión del alumnado sobre el concepto de simultaneidad. Análogamente, Toledo, Arriasecq y Santos (1997), constatan que los conceptos relativistas no sustituyen a los de la física clásica, sino que ambos coexisten en la mente del alumnado después de la instrucción.

Villani y Pacca (1987) investigan las ideas espontáneas de los alumnos sobre la velocidad de la luz, destacando que dichas ideas se encuentran muy arraigadas en su mente, por lo que proponen abordar la relatividad de Galileo como paso previo a la enseñanza de la TRR. Villani (1992) propone actividades de conflicto cognitivo, en las que se pongan de manifiesto las analogías entre las ideas espontáneas de los alumnos y el desarrollo histórico de los conceptos científicos.

##### B. Propuestas de divulgación

En esta categoría se incluyen las propuestas en las que se simplifican los contenidos con el fin de dirigirse a amplias audiencias o a estudiantes en edades tempranas. El motivo principal que subyace a este enfoque es la consideración de la TRR como un conocimiento necesario para todos los ámbitos y no solo para las personas que eventualmente puedan trabajar con conceptos de la física moderna en sus actividades profesionales.

Varios autores abordaron la divulgación científica de la TRR en museos de ciencia, como Johansson y otros (2006) al analizar la visualización experimental de aspectos particulares de la TRR (como los muones o la antimateria), o Guisasaola y otros (2009).

Algunos investigadores utilizan el recurso de un modelo con una velocidad de la luz mucho menor para presentar los efectos relativistas en una escala humana: Sherin, Tan, Fairweather y Kortemeyer (2017) en el contexto de la visita a un planetario, así como Kortemeyer *et al.* (2013) mediante el escenario de Gamow, en el que la velocidad de la luz es comparable a la de una bicicleta.

La presencia y utilidad de los experimentos mentales en los libros de texto y libros de divulgación de física moderna fueron analizadas por Valentzas, Halkia y Scordoulis (2007) enumerando y comentando once experimentos mentales con fines didácticos.

Aunque la literatura sobre la conveniencia de introducir la física contemporánea en la educación secundaria y la necesidad de actualizar sus planes de estudio no es abundante, algunos de los investigadores proponen introducirla a una edad temprana (Aubrecht, 1989; Ostermann y Moreira, 2000). En este sentido, Swinbank (1992) sugiere que todos los estudiantes, incluidos aquellos que no están interesados en estudiar física, deberían recibir información sobre física moderna, en particular sobre relatividad restringida, y propone introducir la física moderna a una edad temprana, presentando una serie de visiones conceptuales.

Por su parte, Valentzas y Halkia (2013) usan experimentos mentales para presentar conceptos relativistas a los estudiantes de secundaria, mientras que Dimitriadi y Halkia (2012) concluyen que las ideas básicas de la relatividad son accesibles para aquellos, incluso aunque persistan las siguientes dificultades: la idea de un marco de referencia absoluto, la identificación de objetos con propiedades fijas, y que los eventos ocurren independientemente de la percepción del observador.

En un caso extremo de esta anticipación, Pitts y otros (2014) estudiaron el efecto de materiales didácticos centrados en aspectos de la relatividad restringida y general en niños de sexto grado de escuela primaria (10-11 años).

Podemos considerar dentro de este apartado de divulgación las propuestas de Egdall (2014), quien describe un curso sobre relatividad para adultos, así como la de Zakamska (2018) al analizar los datos astronómicos de una estrella binaria como un ejemplo práctico para la enseñanza de la TRR, formando parte de un curso en línea.

### C. Animaciones

La teoría de la relatividad está estrechamente relacionada con la integración de los conceptos fundamentales de espacio y tiempo. Posee por lo tanto un carácter intrínsecamente dinámico que se puede presentar de manera eficiente mediante visualizaciones animadas y beneficiarse del potencial didáctico de los recursos audiovisuales en línea.

Los aspectos dinámicos de la teoría, incluida la noción de masa variable, fueron descritos por Angotti, Caldas, Delizoicov, Rüdinger y Pernambuco (1978) utilizando películas y otro tipo de material audiovisual. Mientras que Carson (1998) explica cómo usar un software de hojas de cálculo para enseñar la teoría de la relatividad restringida.

Belloni, Christian y Dancy (2004) utilizan un software llamado *Physlets* y subrayan la necesidad de comenzar la enseñanza de la TRR por el concepto de marco de referencia. El procedimiento de visualización que describieron no se basa en la geometría de Minkowski sino en una aplicación sistemática del concepto de rayo de luz para definir diferentes eventos y sus relaciones.

Pérez y Solbes (2006) consideran que la eficacia didáctica de un método visual basado en el espaciotiempo de Minkowski es limitada. En su lugar recurren a enfoques visuales alternativos con relojes de luz, aplicaciones del teorema de Pitágoras y software de visualización (*applets*), mientras que Alonso y Soler (2006) publicaron una propuesta didáctica para la escuela secundaria superior basada en animaciones informáticas creadas con el software *Modellus*.

El software *Real Time* ha sido utilizado por Savage, Searle y McCalman (2007) en el ámbito universitario para generar diversos resultados gráficos que ayudan a visualizar efectos relativistas complicados, mientras que McGrath, Wegener, McIntyre, Savage y Williamson (2010) proponen utilizar material didáctico basado en la realidad virtual. Sherin, Tan, Fairweather y Kortemeyer (2016) proponen *Open Relativity* como un laboratorio virtual en línea y de código abierto en el que los usuarios pueden realizar sus propios experimentos para explorar los efectos de la relatividad restringida.

### D. Visualización sin cálculo

Los conceptos relativistas se presentan generalmente por medio de un lenguaje matemático que puede ser más o menos abstracto, dependiendo del nivel de los estudiantes. En la escuela secundaria se suele usar la expresión algebraica para el factor gamma, la fórmula de adición de velocidad o la equivalencia masa-energía. En la educación superior, conocimientos más complejos como la trigonometría hiperbólica o la formulación tensorial son adecuados y permiten cálculos más elaborados. Sin embargo, centrarse en estos formalismos puede oscurecer la comprensión de

los procesos físicos reales como un conjunto coherente de nociones relacionadas. Para abordar este problema, diferentes autores han presentado propuestas con énfasis en la visualización asociadas a una reducción del formalismo matemático.

Fiore (2000) recomienda enseñar la TRR utilizando fórmulas geométricas como el teorema de Pitágoras, ejemplos que incluyen el funcionamiento de tubos de televisión o los muones y el retrato de Einstein como un estudiante inadaptado para generar simpatía por su trabajo.

Ruby (2009) sustituye el cálculo por el álgebra simple en la descripción de los fenómenos relativistas, presentando un curso introductorio de física llamado *Non Calculus* (Huggins, 2011), que comienza mostrando el principio de la relatividad como un concepto de validez universal. A partir de esta propuesta, se desarrollan gradualmente los conceptos físicos de los siglos XX y XXI, lo que evita limitar el tema de la relatividad restringida a unos pocos capítulos al final del curso.

### E. Propuestas de naturaleza geométrica

La teoría de la relatividad se ocupa de las propiedades del espacio, el tiempo, otras magnitudes derivadas de ellas y sus transformaciones entre sistemas de referencia. La presentación de esas magnitudes con diagramas del espacio-tiempo, ofrece oportunidades para la comprensión visual de los conceptos relativistas y para la realización de cálculos directos en los diagramas mediante operaciones geométricas.

Así, Romain (1963) analizó las paradojas relativistas utilizando diagramas espaciotemporales para su explicación, visualización y resolución; mientras que Dray (1989) presentó una descripción alternativa de la paradoja de los gemelos aplicando diagramas espaciotemporales definidos en un espacio circular (diagramas cilíndricos).

Mermin (1997) simplificó la forma visual de los diagramas espaciotemporales eliminando los ejes de espacio y tiempo y dejando como referencia principal la velocidad de la luz, que está representada por las líneas inclinadas que definen el cono de luz. El mismo autor (Mermin, 1998), utilizando estos diagramas presenta una justificación visual de los invariantes relativistas identificándolos con la superficie constante de los rectángulos de luz.

Silagadze (2008) estudia desde un punto de vista geométrico la existencia de diferentes modelos de espaciotiempo que cumplen con los requisitos clásicos de espacio (homogeneidad, isotropía) y tiempo (causalidad), junto con el principio de relatividad. Ello se hace sin recurrir a la evidencia experimental con respecto a la velocidad de la luz y proporciona como resultado un conjunto de diversas geometrías.

Kocika (2012) propone utilizar un diagrama geométrico para visualizar la fórmula de Poincaré para la adición relativista unidimensional de velocidades, mientras que Dray (2013) explica tres ejemplos de problemas de relatividad restringida que se pueden resolver mediante diagramas geométricos tridimensionales. El mismo autor (Dray, 2017) presenta enfoques geométricos didácticos para la enseñanza de la relatividad restringida y general, analizando sus pros y sus contras en comparación con metodologías más tradicionales.

### F. Propuestas basadas en la geometría del espaciotiempo de Minkowski

Como se indicó anteriormente, la investigación de tesis doctoral citada (Prado, 2012) centra su atención en la formulación geométrica de Minkowski para la enseñanza de la TRR. Por lo tanto, consideramos con sumo interés las formulaciones geométricas que sobre el tema se publicaron en el pasado. Básicamente utilizan la naturaleza geométrica del espaciotiempo y las posibilidades didácticas de visualización y comprensión que permite.

Véase, por ejemplo, cómo Alemañ y Pérez (2001) afirman que toda la TRR está contenida en los diagramas de Minkowski y analizan varias dificultades y dudas que surgen sobre su utilización. Proponen una construcción didáctica de la transformación de Lorentz a partir de la transformación de Galileo, adoptando un procedimiento visual comparativo. También abogan por un cambio de los programas educativos en el nivel de la educación secundaria para abordar adecuadamente la TRR.

Del mismo modo, Taylor y French (1983) analizan una paradoja relativista sobre la longitud en SR acelerados. Recurren a la formulación geométrica de Minkowski y, contrariamente a la creencia común, muestran que el uso de diagramas espaciotemporales puede ser provechoso para visualizar y comprender las trayectorias libres, además de los movimientos uniformes. Desloge y Philpott (1987), que también tratan los movimientos acelerados en diagramas del espaciotiempo, explican escenarios relacionados con los agujeros negros.

Levrini y diSessa (2008) al analizar las dificultades de los alumnos con el concepto de tiempo propio, indican que la geometría de Minkowski es una herramienta extremadamente poderosa para presentar eventos como centros de atención y apoyarse en la geometría como una forma de coordinarlos. Proponen el debate entre Einstein y Minkowski para resaltar en las clases la importancia de una visión geométrica (Minkowski) frente a un enfoque operacional (Einstein) o algebraico (Lorentz). Del mismo modo, Levrini (2014) compara el abordaje operativo o einsteniano de Resnick (2012), considerado como "tradicional", con el geométrico o minkowskiano de Taylor y Wheeler (1992), en el cual las

propiedades de invariancia de la teoría asumen un papel central y facilitan la apertura posterior hacia la relatividad general.

Con el objetivo de comprobar si la enseñanza basada en diagramas de Minkowski es adecuada para la educación secundaria superior, Cayul y Arriasecq (2015) implementaron una secuencia diseñada para abordar la relatividad restringida de esta manera. Llegaron a la conclusión de que trabajar con diagramas de lápiz y papel es bastante complicado y se necesita demasiado tiempo para las construcciones. Por este motivo, Arriasecq, Greca y Cayul (2017) elaboraron una segunda implementación en la que los diagramas de Minkowski se analizaron con *applets*. Argumentan que esto permite una mejor conceptualización a través de la realización de estimaciones cualitativas y cuantitativas. Indican que las principales dificultades en las actividades relacionadas con estos conceptos tienen que ver con los cálculos numéricos y con el manejo correcto de las ecuaciones algebraicas.

Hemos de indicar además que Bokor (2018), con el que coincidimos, señala que el uso de diagramas espaciotemporales puede ser la base de propuestas didácticas para el aprendizaje de los fenómenos relativistas en niveles básicos de una forma agradable y accesible.

## V. IMPLICACIONES

En este apartado, se presentan las implicaciones derivadas de la revisión bibliográfica realizada. Así mismo se describe un ejemplo, tomado de Prado, Domínguez-Castiñeiras, Area, Paredes y Mira (2018), sobre cómo se puede plantear de forma gráfica y responder geoméricamente a la pregunta formulada por Einstein (1905): ¿Depende la inercia de un cuerpo de su cantidad de energía?

### A. Pensamiento del profesorado

Al revisar la bibliografía seleccionada se ha puesto de manifiesto que la complejidad intrínseca de algunos de los conceptos relacionados con la teoría de la relatividad restringida de Einstein plantea dificultades al profesorado, dando lugar a que sigan persistiendo ideas alternativas a las deseables desde la perspectiva de la ciencia, como las siguientes:

- La creencia de que la física newtoniana es suficiente para interpretar el mundo que nos rodea y que es mejor prescindir de la TRR, dadas las complicaciones teóricas y su alejamiento de la vida cotidiana.
- La suposición de que la ecuación de Einstein sobre la equivalencia entre masa y energía sirve tan solo para transformar las unidades de masa en las de energía y viceversa.
- La concepción de que la masa relativista aumenta su valor con la velocidad.
- La idea de que en la TRR son completamente equivalentes los conceptos de sistema de referencia, sistema de coordenadas y observador.
- El razonamiento, alternativo a la perspectiva científica, de que no hay motivos que obliguen a cambiar los conceptos de la física anterior a Einstein por los conceptos relativistas dado que los efectos relativistas conciernen, no al espacio y al tiempo en sí mismos, sino a nuestras medidas de ellos.

Además, el profesorado utiliza estrategias inadecuadas para la enseñanza de la TRR:

- Presentan la transformación de Galileo como una especie de límite de baja velocidad para la transformación de Lorentz, lo que puede confundir al alumnado.
- Utilizan dos enfoques diferentes (basados en el movimiento de la fuente o del observador) en relación con la invariabilidad de la velocidad de la luz.
- Persisten en un enfoque empirista mediante el experimento de Michelson-Morley, por lo que obvian la problemática conceptual inherente a la TRR.
- Fundamentan el desarrollo de la TRR en la brillante creación de un solo hombre, Einstein, ignorando la naturaleza colectiva del avance científico.
- Omiten, o por el contrario sobrevaloran, el cambio de los paradigmas físicos.

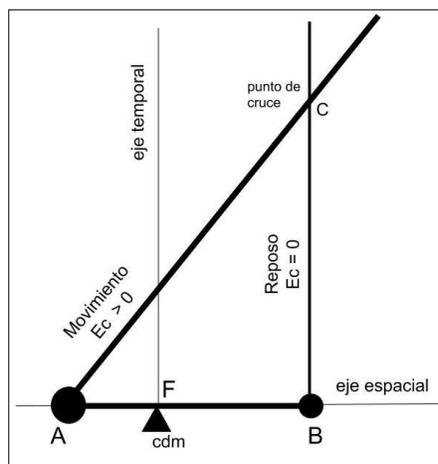
## B. Propuestas de enseñanza

A partir del análisis de la bibliografía seleccionada se ha verificado que hay una ingente cantidad y variedad de propuestas didácticas para la enseñanza de la TRR, lo que es una indicación del interés que suscita el tema. Como ya se mencionó, hemos considerado conveniente establecer las siguientes categorías: propuestas de cambio conceptual; propuestas de divulgación; animaciones; visualización sin cálculo; propuestas de naturaleza geométrica; y propuestas basadas en la geometría del espaciotiempo de Minkowski.

Estas categorías derivan de nuestro convencimiento de que es conveniente enseñar la TRR mediante la geometría de Minkowski. La literatura muestra que el uso de diagramas espaciotemporales es un procedimiento eficiente para responder y explicar preguntas, dilemas y paradojas de la teoría. Para abordar la enseñanza de los conceptos relativistas, las propuestas incluyen principalmente actividades teóricas o experimentales: recursos audiovisuales (cada vez más disponibles en línea), experimentos y analogías, experimentos mentales, relatos históricos, enfoques a partir de la mecánica newtoniana, uso de la geometría, etc.

A continuación se expone la actividad mencionada anteriormente. En dicho ejemplo se resume visualmente el cambio de paradigma de la relatividad de Galileo a la de Einstein.

En la figura 1 se observan las magnitudes notorias (velocidad, masa y energía) en un diagrama espaciotemporal, en el que el espacio y el tiempo se representan, respectivamente, horizontal y verticalmente. De esta manera, un objeto B en reposo sigue una línea vertical, mientras que otro objeto A en movimiento describe una línea inclinada, tanto más cuanto mayor sea la velocidad y, por lo tanto, su energía cinética. Esta será nula en el reposo (objeto B).

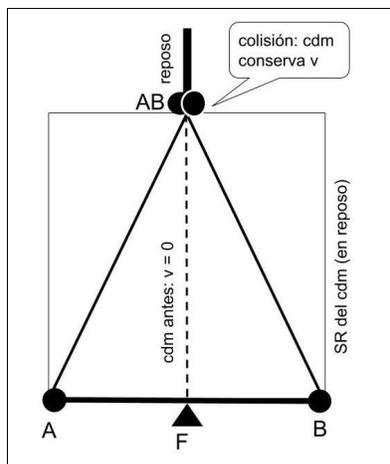


**FIGURA 1.** Diagrama espaciotemporal para dos objetos (A y B) de diferente masa. El objeto B está en reposo, mientras que A se desplaza hacia la derecha. El punto F indica el centro de masas en el instante inicial y al mismo tiempo el fulcro de una balanza espaciotemporal (línea gruesa AB).

Se puede observar también en esta figura que a partir del instante inicial la masa A se pone en movimiento hacia la masa B (que permanece en reposo), llegando al punto de cruce C con la vertical BC, que indica la posición de la masa B. En este caso, las masas A y B no colisionan.

En la misma figura 1 se presenta una balanza en el instante inicial (segmento AB) que sirve para comparar las dos masas, A y B, a partir de la posición del punto de equilibrio entre las mismas (fulcro, F), semejante a la de Arquímedes (Strathern, 1999). Las masas serán iguales si el fulcro está equidistante de ambas. En caso contrario, la masa mayor desplazará el fulcro hacia ella. En la figura 1 se observa que el fulcro F está desplazado desde el centro del segmento AB hacia la masa A, lo que indica que esta será mayor que la masa B.

Se considera la inercia como la capacidad de arrastre en una colisión, lo que supone un desplazamiento del fulcro hacia la masa que tenga mayor inercia. Para representar la inercia en el diagrama espaciotemporal recurriremos al efecto que produce una colisión frontal inelástica entre dos objetos A y B con masas iguales y velocidades iguales y opuestas y, por lo tanto, con energías cinéticas iguales. En la figura 2 se observa en el origen de coordenadas un punto F que representa el centro de masas como el fulcro de una balanza de brazos iguales y, por lo tanto, según la ley de la palanca de Arquímedes, de masas A y B iguales. La colisión se produce en el punto C, en una posición espacial igual a la del fulcro F, pero en la parte superior del diagrama, es decir, en un instante posterior.



**FIGURA 2.** Colisión inelástica simétrica entre dos objetos A y B de masas iguales, desde el sistema de referencia del centro de masas F. El cdm está en reposo tanto antes como después de la colisión y la simetría de la figura es evidente.

En este caso se utiliza la posición del conjunto (AB) en reposo después de la colisión para localizar el fulcro, proyectándola hacia la base horizontal (eje espacial). A partir de la posición del fulcro (F) podremos conocer si las inercias son iguales o diferentes.

La velocidad del centro de masas, cdm, no se ve alterada en una colisión. La traducción geométrica en el espacio-tiempo de esta propiedad implica que la línea de trazos, que indica en cada momento la posición del centro de masas antes de la colisión, debe mantener la misma inclinación que la línea gruesa, posición de las masas A y B unidas después de la colisión inelástica.

En el caso particular representado en la figura 2, la línea vertical gruesa indica que el conjunto AB está en reposo mientras transcurre el tiempo después de la colisión, por lo que la línea de trazos del cdm antes de la colisión también será vertical.

En realidad, se está midiendo una de las propiedades de la masa, como es su inercia (o capacidad de arrastre en una colisión), por eso F se podría denominar centro de inercias. De este modo se ha establecido una forma geométrica operativa para comparar energías e inercias de diferentes objetos.

En la figura 2 se representa una situación particularmente adaptada a la resolución del dilema de Einstein: una colisión totalmente simétrica. Dos masas iguales (A y B) se lanzan a velocidades iguales y opuestas para colisionar de forma inelástica, quedando unidas después del choque. La simetría de la situación permite decir que el conjunto quedará en reposo después de la colisión, o, lo que es lo mismo, que las inercias de una y otra masa eran iguales antes de la colisión.

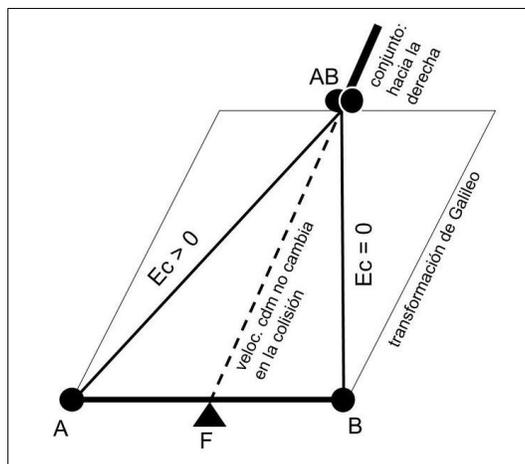
La figura 2 está enmarcada en un cuadrado de espaciotiempo que corresponde con una celdilla unidad del SR del centro de masas.

Realizamos a continuación un cambio de sistema de referencia (figuras 3 y 4), de forma que nos situamos, como observadores, en el mismo estado de movimiento que una de las masas (B). Esto tiene como consecuencia que la masa B estará en reposo, mientras que la otra (A) aumenta su velocidad. El centro de masas ya no estará en reposo, sino que tendrá una velocidad relativa exactamente opuesta a la que adquirió el nuevo SR respecto al anterior.

Al hacer dicho cambio, se rompe la simetría con la que se presentaba la colisión inicialmente (figura 2), puesto que ahora la masa B, que está en reposo, ya no tiene energía cinética, mientras que esta aumentó para la masa A. Podemos, pues, comprobar si la presencia de energía en una de las masas produce o no un efecto de arrastre del fulcro frente a la masa sin energía cinética. En caso de que apareciera dicho efecto, contestaríamos afirmativamente a la pregunta de Einstein, y negativamente en caso contrario. Conviene tener presente que, al hacer esto, no se está alterando el experimento, sino que solo se cambia la forma de observarlo.

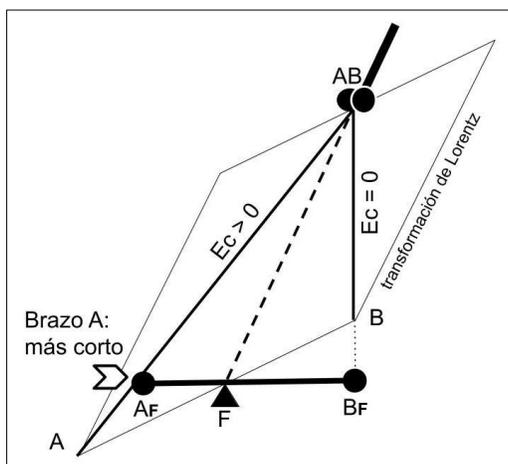
La representación geométrica en el espaciotiempo del cambio de sistema de referencia tiene una forma distinta en la mecánica newtoniana (transformación de Galileo) que en la física relativista (transformación de Lorentz). En cada caso, la respuesta a la pregunta de Einstein será diferente.

En el paradigma galileano (figura 3) vemos que el desequilibrio energético (la masa B en reposo perdió su energía cinética por completo, mientras que la masa A incluso aumentó su energía cinética) no produce un desequilibrio inercial, ya que el fulcro permanece en una posición equidistante de ambas masas. Es decir, para la mecánica newtoniana la inercia de un cuerpo no depende de su contenido energético.



**FIGURA 3.** La misma situación de la figura 2, representada desde el sistema de referencia de la masa B mediante la transformación de Galileo. La simetría geométrica de la figura 2 ha desaparecido, ya que ahora la masa B carece de energía cinética, que tiene un valor positivo no nulo para la masa A. Sin embargo, esto no afecta a la posición central del fulcro F.

En la transformación relativista (figura 4), la forma de la celdilla unidad sufre la denominada transformación de Lorentz, que corresponde a un rombo inclinado  $45^\circ$  (Prado *et al.*, 2020). La propiedad esencial de esta figura es que ahora la base horizontal (A-B) también se inclina. Como consecuencia, se produce un desplazamiento de la masa con energía cinética ( $A_F$ ) hacia el fulcro. Se observa que la distancia entre F y  $A_F$  es menor que la distancia entre F y  $B_F$ . De este modo, el desequilibrio energético entre A y B provoca en este caso un desequilibrio inercial equivalente, es decir, en la física relativista la inercia de un cuerpo sí depende de su contenido energético y la respuesta a la pregunta de Einstein en este caso es positiva.



**FIGURA 4.** Transformación de Lorentz para la figura 2. Las líneas horizontales ahora se inclinan. En la balanza espaciotemporal (barra gruesa  $A_F-B_F$ ) se observa que el fulcro F está más cerca de la masa A que de B.

Esta conclusión geométrica de tipo cualitativo permite presentar la equivalencia entre masa y energía de una forma visual y responder a una pregunta capital en el devenir de la historia de la ciencia.

Asimismo, como se puede ver en las figuras 3 y 4, se reconocen las transformaciones de Galileo y de Lorentz como diferentes debido a la inclinación de la base de la celda unidad en la transformación de Lorentz, mientras que en la de Galileo dicha base permanece inmutable.

Además, las características geométricas de la transformación realizada permiten sobrepasar este enfoque cualitativo para obtener la forma exacta de la equivalencia entre masa y energía, o incluso resolver una situación mucho más compleja como es el choque elástico (Prado *et al.*, 2018).

## AGRADECIMIENTOS

Prado y Domínguez, agradecen la financiación a FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades–Agencia Estatal de Investigación del Proyecto ESPIGA (“Promoviendo el Desarrollo del Pensamiento Crítico y de las dimensiones de Implicación Cognitiva y Emocional de los desempeños Epistémicos en las Clases de Ciencias en la Era de la Posverdad”), referencia PGC2018-096581-B-C22) y del proyecto EAMARE-STEAM (EDU2017-84979-R). Area agradece la ayuda de los proyectos ED431B 2018/57, de la Consellería de Educación, Universidad y Formación Profesional (Xunta de Galicia) y FIS2017-83762-P, del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad. Paredes agradece la ayuda de los proyectos MTM2016–75140–P, de la Agencia Estatal de Investigación, cofinanciado por fondos FEDER, y R 2016/022, de la Xunta de Galicia.

## REFERENCIAS

Alemañ, R. A. (1997). Errores comunes sobre la relatividad entre los profesores de enseñanza secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 301-307.

Alemañ, R. A. y Pérez J. F. (2001). Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 335-343.

Allchin, D. (2004). Pseudohistory and Pseudoscience. *Science & Education*, 13(3), 179-195.

Alonso, M. y Soler, V. (2006). La Relatividad en el bachillerato: una propuesta de unidad didáctica. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(3), 439-454.

Angotti, J. A., Caldas, I. L., Delizoicov, D., Rüdinger, D. y Pernambuco, M. (1978). Teaching relativity with a different philosophy. *American Journal of Physics*, 46(12), 1258-1262.

Arriasecq, I. y Greca, I. M. (2005). Análisis de aspectos relevantes para el abordaje de la Teoría de la Relatividad Especial en los últimos años de la enseñanza media desde una perspectiva contextualizada histórica y epistemológicamente. Primera Parte. *Revista de Enseñanza de la Física*, 18(1), 2005, 17-28.

Arriasecq, I. y Greca, I. (2007). Approaches to the Teaching of Special Relativity Theory in High School and University Textbooks of Argentina. *Science & Education*, 16(1), 65-86.

Arriasecq, I. y Greca, I. (2012). A Teaching-Learning Sequence for the Special Relativity Theory at High School Level Historically and Epistemologically Contextualized. *Science & Education*, 21(6), 827-851.

Arriasecq, I., Greca, I. M. y Cayul, E. E. (2017). Secuencias de enseñanza y aprendizaje basadas en resultados de investigación: propuesta de un marco teórico para el abordaje de la teoría especial de la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1), 133-155.

Aubrecht, G. J. (1989). Redesigning courses and textbooks for the twenty-first century. *American Journal of Physics*, 57(4), 352-359.

Baierlein, R. (2006). Two myths about special relativity. *American Journal of Physics*, 74(3), 193-195.

Belloni, M., Christian, W. y Dancy, M. H. (2004). Teaching Special Relativity Using Physlets. *The Physics Teacher*, 42(5), 284-290.

Bokor, N. (2018). Playing Tag relativistically. *European Journal of Physics*, 39(5), 55601.

BOE (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3. España, Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

- Callaghan, J. (2000). *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*. New York: Springer.
- Carson, S. (1998). Relativity on a spreadsheet. *Physics Education*, 33(1), 13-19.
- Cayul, E. y Arriasecq, I. (2015). Utilización de los Diagramas de Minkowski para la enseñanza de la Teoría Especial de la Relatividad en la escuela secundaria. *Revista de Enseñanza de la Física*, 27(Extra), 323-331.
- De Ambrosis, A. y Levrini, O. (2010). How physics teachers approach innovation: An empirical study for reconstructing the appropriation path in the case of special relativity. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 6(2), 020107(1-11).
- De Hosson, C., Kermen, I. y Parizot, E. (2010). Exploring students' understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. *European Journal of Physics*, 31(6), 1527-1538.
- De Hosson, C. y Kermen, I. (2012). Recherche en didactique et relativité restreinte: difficultés conceptuelles et pistes pour l'enseignement. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 106(948), 1041-1056.
- Desloge, E. y Philpott, R. (1987). Uniformly accelerated reference frames in special relativity. *American Journal of Physics*, 55(3), 252-261.
- Dimitriadi, K. y Halkia, K. (2012). Secondary Students' Understanding of Basic Ideas of Special Relativity. *International Journal of Science Education*, 34(16), 2565-2582.
- Dray, T. (1989). The twin paradox revisited. *American Journal of Physics*, 58(9), 822-825.
- Dray, T. (2013). Using three-dimensional spacetime diagrams in special relativity. *American Journal of Physics*, 81(8), 593-596.
- Dray, T. (2017). The geometry of relativity. *American Journal of Physics*, 85(9), 683-691.
- Egdall, I. (2014). Teaching Special Relativity to Lay Students. *The Physics Teacher*, 52(7), 406-409.
- Einstein, A. (1905). Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik*, 323(13), 639-641.
- Fiore, G. (2000). An Out-of-Math Experience: Einstein, Relativity and the Developmental Mathematics Student. *The Mathematics Teacher*, 93(3), 194-199.
- Gil, D. y Solbes, J. (1993). The introduction of modern physics: overcoming a deformed vision of science. *International Journal of Science Education*, 15(3), 255-260.
- Ginsberg, E. (2018). Simple Examples of the Interpretation of Changes in Kinetic and Potential Energy Under Galilean Transformations. *The Physics Teacher*, 56(2), 96.
- Guisasola, J., Solbes, J., Barragues, J., Morentin, M. y Moreno, A. (2009). Students' Understanding of the Special Theory of Relativity and Design for a Guided Visit to a Science Museum. *International Journal of Science Education*, 31(15), 2085-2104.
- Hilborn, R. (2019). Galilean Transformations of Kinetic Energy, Work, and Potential Energy. *The Physics Teacher*, 57(1), 40.
- Huggins, E. R. (2011). *Teaching Relativity in Week One*. Available at Physics2000.com, Chapter 1. Hanover, New Hampshire: Dartmouth College, Department of Physics.
- Johansson, K. E., Kozma, C. y Nilsson, Ch. (2006). Einstein for schools and the general public. *Physics Education*, 41(4), 328-333.

- Kicilcik, H. y Yavas, P. (2017). Investigating the Reasons of Difficulty Understanding of Students in Special Relativity Topics. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 46(2), 399-426.
- Kortemeyer, G., Fish, J., Hacker, J., Kienle, J., Kobylarek, A., Sigler, M. y Tan, Ph. (2013). Seeing and Experiencing Relativity- A New Tool for Teaching? *The Physics Teacher*, 51(8), 460-461.
- Kocika, J. (2012). Geometric diagram for relativistic addition of velocities. *American Journal of Physics*, 80(8), 737.
- Levrini, O. (2002). The substantialist view of spacetime proposed by Minkowski and its educational implications. *Science & Education*, 11(6), 601-617. .
- Levrini, O. (2014). Resultados de la investigación en educación en física como lentes para analizar libros de texto, reconocer detalles críticos y promover el pensamiento. El caso especial de la enseñanza y el aprendizaje de la relatividad especial. *Revista de Enseñanza de la Física*, 26(1), 7-21.
- Levrini, O. y diSessa, A. (2008). How students learn from multiple contexts and definitions: Proper time as a coordination class. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 4(1), 010107(1-18).
- McGrath, D., Wegener, M., McIntyre, T., Savage, C. y Williamson, M. (2010). Student experiences of virtual reality: A case study in learning special relativity. *American Journal of Physics*, 78(8), 862-868.
- Meneses, M. y Martín, J. (2015). ¿Tienen razón los investigadores al quejarse de la información periodística sobre ciencias? Experiencias con alumnos de periodismo y científicos. *Revista Española de Documentación Científica*, 38(4): e104.
- Mermin, N. (1994). Lapses in relativistic pedagogy. *American Journal of Physics*, 62(1), 11.
- Mermin, N. (1997). An introduction to spacetime diagrams. *American Journal of Physics*, 65(6), 476-486.
- Mermin, N. (1998). Spacetime Intervals as Light Rectangles. *American Journal of Physics*, 66(12), 1077-1080.
- Minkowski, H. (2012). *Space and Time. Minkowski's Papers on Relativity* (free version). Translated by Fritz Lewertoff and Vesselin Petkov. Edited by Vesselin Petkov. Canada: Minkowski Institute Press.
- Naber, G. (2012). *The geometry of Minkowski spacetime. An introduction to the mathematics of the special theory of relativity*. 2nd ed. Berlin: Springer.
- Ostermann, F. y Moreira, M. (2000). Física contemporánea en la escuela secundaria: una experiencia en el aula involucrando formación de profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 391-404.
- Pais, A. (2005). *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. New York: Oxford University Press.
- Pérez H. y Solbes J. (2003) Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 135-146.
- Pérez, H. y Solbes, J. (2006). Implicaciones de la evolución histórica de algunos conceptos en la enseñanza de la relatividad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 3(3), 409-431.
- Pitts, M., Venville, G., Blair, D. y Zadnik, M. (2014). An Exploratory Study to Investigate the Impact of an Enrichment Program on Aspects of Einstenian Physics on Year 6 Students. *International Research on Science Education*, 44(3), 363-388.
- Posner, G., Strike, K., Hewson, P. y Gertzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211-227.
- Prado, X. (2012). Deseño e implementación dunha proposta de ensinanza da relatividade especial en primeiro de bacharelato, baseada na formulación xeométrica de Minkowski. Tesis de doutoramento. Universidade de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela (España). <http://hdl.handle.net/10347/3640>

- Prado, X. y Domínguez-Castiñeiras, J. (2010). A Didactic Proposal for the Visual Teaching of the Theory of Relativity in High School First Course. En Tasar y G. Çakmakci (Eds.), *Contemporary Science Education Research: teaching* (297-305). Ankara, Turkey: Teaching. Pegem Akademi.
- Prado, X., Domínguez-Castiñeiras, J., Area, I., Paredes, A. y Mira, J. (2018). Archimedes meets Einstein: a millennial geometric bridge. *European Journal of Physics*, 39(4), 045802.
- Prado, X., Domínguez-Castiñeiras, J., Area, I., Paredes, A. y Mira, J. (2020). Aprendizaje de la Teoría de la Relatividad Restringida de Einstein. Estado de la Cuestión. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 17(1), 1103(1-16).
- Resnick, R. (1968). *Introduction to Special Relativity*. New York: John Wiley & Sons.
- Romain, J. (1963). A geometrical approach to relativistic paradoxes. *American Journal of Physics*, 31(8), 576-585.
- Ruby, L. (2009). Teaching special relativity without calculus. *Physics Teacher*, 47(4), 231-232.
- Savage, C., Searle, A. y McCalman, L. (2007). Real Time Relativity: Exploratory learning of special relativity. *American Journal of Physics*, 75(9), 791-798.
- Sherin, Z., Cheua, R., Tan, Ph. y Kortemeyer, G. (2016). Visualizing relativity: The Open Relativity Project. *American Journal of Physics*, 84(5), 369-374.
- Sherin, Z., Tan, Ph., Fairweather, H. y Kortemeyer, G. (2017). Einstein's Playground: An Interactive Planetarium Show on Special Relativity. *The Physics Teacher*, 55(9), 550-554.
- Sezgin, G. (2011). Addressing pre-service teachers' understandings and difficulties with some core concepts in the special theory of relativity. *European Journal of Physics*, 32(1), 1-13.
- Scherr, R., Shaffer, P. y Vokos, S. (2001). Student understanding of time in special relativity: Simultaneity and references frames. *American Journal of Physics*, 69, S24.
- Scherr, R., Shaffer, P. y Vokos, S. (2002). The challenge of changing deeply held student beliefs about relativity of simultaneity. *American Journal of Physics*, 70(12), 1238-1248.
- Silagadze, Z. (2008). Relativity without tears. *Acta Physica Polonica*, B39(4), 811-885.
- Stadermann, K., Berg, E. y Goedhart, M. (2019). Analysis of secondary school quantum physics curricula of 15 different countries: Different perspectives on a challenging topic. *Physical Review Physics Education Research*, 15, 010130.
- Strathern, P. (1999). *Arquímedes y la palanca*. Madrid: Siglo XXI.
- Swinbank, E. (1992). Particle Physics: a new course for schools and colleges. *Physics Education*, 27(2), 87-91.
- Taylor, E. y French, A. (1983). Limitation on proper length in special relativity. *American Journal of Physics*, 51(10), 889-893.
- Taylor, E. y Wheeler, J. (1992). *Spacetime Physics* (second edition). New York: W. H. Freeman and Co.
- Toledo, B., Arriasecq, I. y Santos, G. (1997). Análisis de la transición de la Física clásica a la relativista desde la perspectiva del "cambio conceptual". *Enseñanza de las Ciencias*, 15(1), 79-90.
- Turgut, U., Gurbuz, F., Salar, R. y Toman, U. (2013). The Viewpoints of Physics Teacher Candidates towards the Concepts in Special Theory of Relativity and Their Evaluation Designs. *International Journal of Academic Research*, 5(4), 481-489.

Valentzas, A. y Halkia, K. (2013). The Use of Thought Experiments in Teaching Physics to Upper Secondary-Level Students: Two examples from the theory of relativity. *International Journal of Science Education*, 35(18), 3026-3049.

Valentzas, A., Halkia, K. y Scordoulis, C. (2007). Thought Experiments in the Theory of Relativity and in Quantum Mechanics: Their Presence in Textbooks and in Popular Science Books. *Science & Education*, 16(3-5), 353-370.

Villani, A. (1992). Conceptual Change in Science and Science Education. *Science Education*, 76(2), 223-237.

Villani, A. y Arruda, S. (1998). Special Theory of Relativity, conceptual change and history of science. *Science & Education*, 7(1), 85-100.

Villani, A. y Pacca, J. (1987). Students' spontaneous ideas about the speed of light. *International Journal of Science Education*, 9(1), 55-66.

Yavas, P. y Kizilcik, H. (2016). Pre-Service Physics Teachers' Difficulties in Understanding Special Relativity Topics. *European Journal of Physics Education*, 7(1), 1309-7202.

Zakamska, N. (2018). Relativistic jets: An astrophysical laboratory for the Doppler effect. *American Journal of Physics*, 86(5), 354.