

Un estudio sobre la comprensión de las nociones físicas de la mecánica newtoniana: el caso del centro de masa

A study about the understanding of the physical notions of Newtonian mechanics: the case of the center of mass

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

Nehemías Moreno Martínez¹, Vincenç Font Moll² y Rita Guadalupe Angulo Villanueva¹

¹Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Av. Salvador Nava Martínez S/N, zona universitaria, San Luis Potosí. México.

²Universidad de Barcelona, Passeig de la Vall d'Hebrón 171, Barcelona. España.

E-mail: nehemias_moreno@live.com

(Recibido el 24 de octubre de 2018; aceptado el 23 de noviembre de 2018)

Resumen

Se describe la comprensión del centro de masa a partir de un estudio de caso. La descripción se apoya en el análisis de la producción de un grupo de estudiantes universitarios cuando resuelven algunas tareas planteadas en una muestra representativa de contextos, un contexto mecánico estático y otro dinámico, en los que el centro de masa es importante para su resolución. En el estudio de las concepciones se utilizan y se adaptan algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico tales como el de configuración de objetos matemáticos de tipo epistémico y cognitivo. La comparación entre la configuración epistémica, organizada por un docente, y las configuraciones cognitivas de los discentes, muestra que el contexto estático deberá incluir situaciones en las que se favorezca el proceso de idealización, que el uso competente de dicha noción en una tarea concreta provee al alumno de un conocimiento parcial y, por otro lado, que la transferencia del conocimiento de un contexto a otro no es inmediata, pues los alumnos no consideran la complejidad del contexto dinámico.

Palabras clave: Centro de masa; Situación física; Complejidad; Idealización; Comprensión.

Abstract

The understanding of the Center of Mass is described from a case study. The description is based on the analysis of the production of a group of university students when they solve some tasks proposed in a representative sample of contexts, a static mechanical context and a dynamic one, in which the Center of Mass is important for its resolution. In the study of conceptions, some theoretical tools of the Ontosemiotic Approach are used and adapted such as the configuration of mathematical objects of epistemic and cognitive type. The comparison between the epistemic configuration, organized by a teacher, and the cognitive configurations of the students, shows that the static context should include situations in which the process of idealization is favored, that the competent use of this notion in a specific task It provides the student with a partial knowledge and, on the other hand, that the transfer of knowledge from one context to another is not immediate, since students do not consider the complexity of the dynamic context.

Keywords: Center of mass; Physical situation; Complexity; Idealization; Comprehension.

I. INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la física, el centro de masa (CM) es importante en el estudio de los sistemas de partículas, sistemas de masa variable y cuerpos rígidos ya que abre paso al estudio de otras nociones más complejas (momento lineal y angular, inercia de rotación, energía, entre otras). Por otro lado, algunos textos de física distinguen entre CM y centro de gravedad, a partir de la existencia de situaciones físicas en las que se tiene un cuerpo con dimensiones muy grandes inmerso en un campo gravitatorio no uniforme (Feynman y otros, 2010), por ejemplo, el centro de gravedad de las Torres Petronas de Malasia, cuya altura es de 452m, se encuentra 2cm abajo del CM, debido a la pequeña variación de la gravedad

con la altura (Young y Freedman, 2013, p. 347). En el aula o el laboratorio escolar el CM coincide con el centro de gravedad, debido a que la gravedad es uniforme (Ruiz, 2003), por lo que en este trabajo dichas nociones se manejarán indistintamente.

En la literatura se encuentra que la enseñanza y la comprensión del CM han sido escasamente investigadas y solo se han realizado propuestas didácticas, como por ejemplo: (i) se ha sugerido el empleo de software para la enseñanza del CM (Santos y otros, 2000; Brown y Cox, 2009), (ii) se ha propuesto relacionar el concepto estadístico de centro de gravedad de una distribución de frecuencias bidimensional con el concepto físico y geométrico de CM (Ruiz, 2003), (iii) se han señalado alternativas para determinar el CM de ciertos cuerpos (Apóstol y Mnatsakanian, 2000), (iv) se ha propuesto la construcción de prototipos experimentales (Calderón y Gil, 2011; Collazos, 2009) y la experimentación con juguetes (López-García, 2004) que permite visualizar al CM, o bien, (v) se ha sugerido considerar el CM de un triángulo como una alternativa para probar físicamente el teorema de Pitágoras (Treeby, 2017). Si bien las propuestas anteriores plantean distintas alternativas para la enseñanza del CM, estas han soslayado la complejidad de dicha noción.

Partiendo de la idea de que una noción física puede modelarse como un objeto que posee una componente física y otra matemática (Moreno, Font y Maciel, 2016), la importancia de la componente matemática del CM nos permite adaptar algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico (EOS) al estudio del aprendizaje de la física. El empleo del EOS permite reformular la idea de que hay una misma noción física (en este caso, el CM) con distintas representaciones, más bien, lo que existe es un sistema complejo de prácticas que permiten resolver problemas, donde el CM no aparece explícitamente. En estos problemas se utilizan diferentes objetos físico-matemáticos tales como representaciones, definiciones, proposiciones y propiedades del CM, además de procedimientos que se aplican para calcular el CM conjuntamente con argumentos sobre las propiedades del CM. En este sentido, el CM puede ser considerado como un objeto emergente de la resolución de tareas (formuladas en contextos físicos diferentes) que implican prácticas diferentes y que movilizan distintas representaciones, propiedades, procedimientos, etc.

Las consideraciones anteriores influyen en la manera como se concibe, tanto el significado de una noción física, como en la comprensión que de esta tiene el alumno. Mediante la perspectiva pragmatista del EOS (Godino y Batanero, 1994) acerca del significado de un objeto matemático, adaptado al caso de la física que se imparte en el aula, el significado institucional de una noción física no se podría circunscribir solo a su definición (pues sería entender el significado de manera “unitaria”), más bien se debería pensar en el “significado” de la noción física en términos de su uso.

Con relación a la comprensión del alumno, en esta investigación, se considera que éste comprende el CM cuando es competente en la realización de las prácticas que le permiten resolver una muestra representativa de problemas que requieren de la noción de CM para su resolución. Como muestra representativa de problemas se eligieron tres contextos: el equilibrio de una balanza, el equilibrio de cuerpos planos y el vuelo de un planeador.

II. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación plantea el objetivo de caracterizar el proceso de comprensión del CM, por parte de estudiantes universitarios, a partir de las producciones de los alumnos cuando realizan un conjunto de prácticas que les permiten resolver una muestra representativa de situaciones físicas problematizadas (en un contexto mecánico estático y otro dinámico) donde interviene el CM y donde se organizan, mediante ciertos procesos cognitivos, un conjunto de objetos físico-matemáticos primarios: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

III. MARCO TEÓRICO

La componente matemática de la noción de CM nos ha llevado a utilizar y adaptar el EOS. Este enfoque se está desarrollando y utilizando principalmente como referente teórico para la investigación en Matemática Educativa y, recientemente, algunos investigadores lo han aplicado a la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la física escolar (Badillo, Font y Azcárate, 2014; Moreno, Font y Maciel, 2016).

La adaptación del EOS consistió en extender las nociones de función semiótica, objeto matemático primario y configuración de objetos matemáticos al caso de la física escolar. Con esto se pretendía identificar los objetos y las relaciones que se ponen en juego en la resolución de una situación física problematizada.

La noción de función semiótica permite establecer una relación semántica o una correspondencia entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo a ciertos criterios o convenios. En este trabajo, se propone a la función semiótica como medio para relacionar las entidades del dominio matemático con las entidades del dominio físico, lo cual permite definir a los objetos físico-matemáticos que se describen a continuación:

- Situación física problematizada. Son aquellas planteadas en el escenario escolar mediante experimentos de laboratorio, animaciones computacionales, textos, entre otras.
- Concepto físico-matemático. Pensado mediante la función semiótica que relaciona un concepto físico y un concepto matemático, por ejemplo, el concepto físico-matemático de fuerza mediante la función semiótica que relaciona el concepto matemático de vector y el concepto físico de fuerza gravitacional, éste último formulado a partir de la observación en una situación física escolar.
- Propiedades físico-matemáticas. Interpretadas también en términos de la noción de función semiótica, por ejemplo, la propiedad físico-matemática de la fuerza eléctrica pensada a través de la función semiótica que relaciona el conjunto de las dos propiedades físicas: (1) la fuerza eléctrica entre dos cargas depende de la cantidad de carga de cada cuerpo y es proporcional a cada carga y (2) la fuerza eléctrica es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia que separa las cargas, con la propiedad matemática de la función $F = k|qQ|/r^2$ que expresa una dependencia específica de “ F ” como recíproca de “ r^2 ” y proporcional al producto de las cargas “ q ” y “ Q ”.
- Lenguaje. Permite expresar conceptos, propiedades y procedimientos de manera ostensiva mediante símbolos, expresiones algebraicas, gráficas, entre otros. No se considera a la Matemática como el lenguaje de la física más bien se considera que la Matemáticas tiene con la física una relación de constitución (Chacón y Rodríguez, 2009). La relación de constitución se puede vincular con la noción de función semiótica, de hecho, la importancia de la función semiótica es tal que una vez que esta ha sido establecida basta con trabajar únicamente en el contexto matemático para construir nuevo conocimiento y, posteriormente, buscar la correspondencia de dicho objeto emergente (a través del establecimiento de otra función semiótica) con algún aspecto de la situación física abordada.
- Procedimiento físico-matemático. Se refiere al tratamiento físico-matemático mediante algoritmos, operaciones, entre otras. Por ejemplo, para describir el movimiento parabólico de un cuerpo bajo la acción de la fuerza de gravedad, se emplea el procedimiento de analizar por separado el movimiento en la dirección “ x ” y en la dirección “ y ” para luego combinar algunos resultados.
- Argumentos físico-matemáticos. Enunciados que se emplean para validar o explicar el proceso de solución. Por ejemplo, al resolver alguna ecuación cinemática que involucra al tiempo “ t ”, algunas veces se argumenta descartar la solución “ $t < 0$ ” debido a que inicialmente se estableció la función semiótica entre la propiedad que establece que el tiempo no es negativo y la propiedad que establece que el escalor “ t ” puede tomar cualquier valor de los Reales.

Los objetos físico-matemáticos así definidos pueden desempeñar el papel de expresión o contenido en las funciones semióticas. Por otro lado, en la resolución de una situación física, el sujeto organiza a los objetos físico-matemáticos en una configuración, la cual puede ser cognitiva, cuando se trata de la solución de un estudiante inexperto, o institucional, cuando corresponde a un sujeto experto (docente). Mediante el proceso de materialización, los objetos físico-matemáticos pensados (no ostensivos) por el sujeto, son representados de manera ostensiva mediante el lenguaje o el discurso oral, y a la inversa, mediante la idealización, un objeto ostensivo u observable (símbolo, expresión algebraica, objeto material o fenómeno físico) es pensado por un sujeto en objetos no ostensivos (Malaspina y Font, 2010).

El significado de un objeto físico-matemático también es entendido como el conjunto de prácticas en las que esta noción es determinante (perspectiva sistémica). Este conjunto se puede parcelar en prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto (perspectiva unitaria), en el que se usan ciertas representaciones, algunas propiedades, entre otras, (Moreno, Font y Maciel, 2016). Por tanto, cada contexto o situación física problematizada produce un determinado sentido (o significado parcial) y una muestra representativa de contextos permite producir un significado global. Estudiar la noción física en un solo contexto ayuda a producir un sentido, pero no produce los sentidos necesarios para una comprensión global del CM.

IV. METODOLOGÍA

Esta investigación sigue una perspectiva metodológica de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004). Es un estudio instrumental de casos (Merriam, 1998) que analizó la comprensión del CM por parte de estudiantes universitarios, en el contexto real de diferentes situaciones físicas.

Nos apoyamos en la técnica de análisis que describe las configuraciones cognitivas involucradas en las prácticas de resolución de las tareas propuestas y permite compararla con las configuraciones epistémicas de referencia correspondientes (Malaspina, 2007; Malaspina y Font, 2010).

Los contextos fueron desarrollados en talleres mediante trabajo colaborativo (Boulter, 2000) a través de un enfoque de aprendizaje por descubrimiento guiado. El estudio fue exploratorio, puesto que se analizó un grupo de tres estudiantes a los que se les planteó la resolución de una secuencia de tareas mediante tres contextos en las que se consideró la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de las respuestas: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de solución del problema propuesto); el estudio fue descriptivo, ya que nos permitió caracterizar la comprensión del CM; y, principalmente, inductivo, puesto que se empleó la contrastación empírica como criterio para justificar las aseveraciones sobre las características del proceso de comprensión del CM.

A. Participantes

Los participantes fueron tres alumnos (A, B y C a partir de ahora) de 19 años de edad que cursaban el tercer semestre en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Estos alumnos recién habían aprobado el curso de Física General donde se abordan los principios de la mecánica newtoniana. Los alumnos seleccionados presentaban rendimientos académicos similares en los cursos previos de física. También participó un profesor universitario con formación en ciencias físicas que contaba con un año de experiencia impartiendo la asignatura de Física General.

La configuración epistémica de objetos físico-matemáticos, obtenida de la producción del docente, se comparó con la configuración cognitiva de los estudiantes. Las diferencias o semejanzas entre los elementos de dichas configuraciones permitieron tener un acercamiento a las concepciones de los estudiantes sobre el CM.

B. Diseño de las situaciones

Históricamente, el CM aparece como un objeto complejo, en el sentido de que es interpretado de distintas maneras y relacionado con distintos conceptos según las distintas situaciones físicas, por ejemplo, el CM se encuentra relacionado con la balanza, la cual fue perfeccionada por la cultura egipcia, mesopotámica y griega. Entre los griegos se destaca que Arquímedes fue capaz de emplear la balanza como herramienta abstracta para “pesar” magnitudes geométricas (áreas, volúmenes, etc.), y para algunos cuerpos, determinar la ubicación de un punto donde pueda considerarse concentrado el peso. Arquímedes también realizó estudios del equilibrio de cuerpos que flotan y señaló otras propiedades del CM. Posteriormente, Leonardo da Vinci, en sus trabajos sobre máquinas voladoras, empleó el CM para analizar su estabilidad. Mucho tiempo después, el CM siguió desarrollándose con los trabajos de Galileo y Newton.

Por lo cual, se consideró pertinente plantear a los estudiantes problemas en tres contextos “naturales”: el equilibrio de una balanza, el equilibrio de manipulables planos y el vuelo de un planeador. Cada contexto se desarrolló en tres fases: (1) Pre-instrucción, para investigar las ideas previas de los alumnos y se discutieron los principios físicos involucrados en cada contexto; (2) Interacción, para instruir sobre las actividades y se sugirió el planteamiento de hipótesis, predicciones y la realización de los experimentos; y (3) Post-instrucción, para discutir y reflexionar los resultados entre el docente y los alumnos. A continuación, se describen las situaciones físicas:

Situación de la balanza. Se buscaba que los alumnos determinaran la expresión del CM y la relacionaran con el equilibrio de la balanza. En la fase de interacción, los alumnos experimentaron con el equilibrio de la balanza en cuatro casos, en el primero, la balanza sostenía una masa “ m ” en cada brazo, y en los tres casos restantes, la masa del brazo izquierdo de la balanza se duplicó “ $2m$ ”, luego se triplicó “ $3m$ ” y por último se cuadruplicó “ $4m$ ” manteniéndose constante la masa “ m ” del brazo derecho. En la figura 1 se ilustra el caso donde se tiene “ $3m$ ” en el brazo izquierdo.

En cada caso, se solicitó a los estudiantes describir el equilibrio respecto a dos Marcos de Referencia (MR por brevedad), uno en el fulcro, ver la figura 1(a), y otro en el brazo derecho, figura 1(b). Según el MR, los estudiantes midieron y registraron en una tabla los datos correspondientes a: (i) número de masas en “ M_1 ” y “ M_2 ” que se colocaron en el brazo izquierdo ($M_1: m, 2m, 3m, 4m$) y en el brazo derecho ($M_2: m$) de la balanza, (ii) la masa total “ $M_1 + M_2$ ” de la balanza, (iii) las distancias “ x_1 ” y “ x_2 ” de las masas M_1 y M_2 al MR correspondiente, (iv) las torsiones “ M_1gx_1, M_2gx_2 y $(M_1 + M_2)gx_{cm}$ ” (“ g ” es la aceleración de la gravedad) ejercidas por las masas y la masa total, y (v) la distancia “ x_{cm} ” (CM de la balanza) entre el fulcro y el MR correspondiente. La figura 1(c) muestra la tabla correspondiente al MR situado en M_2 , nótese que la torsión producida por la fuerza que la masa constante ejerce sobre el brazo de balanza “ x_2 ” es nulo.

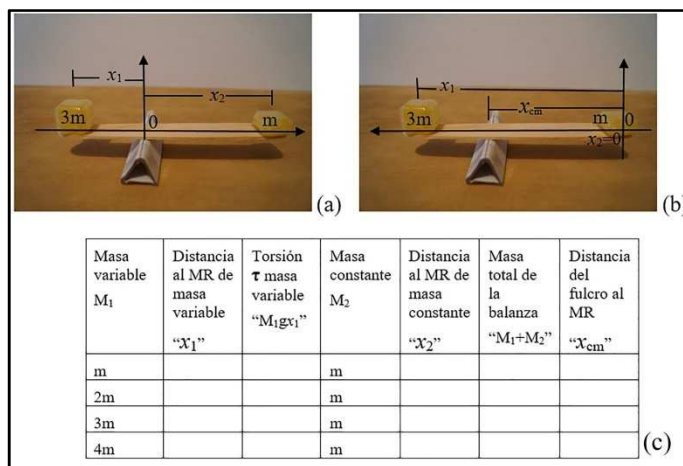


FIGURA 1. La balanza. (a) MR en el fulcro, (b) MR en el brazo derecho de la balanza y (c) tabla correspondiente al MR situado en M₂.

Posteriormente, se propuso a los estudiantes encontrar una expresión del CM respecto a cada MR al analizar los datos registrados en las tablas y al considerar el equilibrio de las torsiones ejercidas por las masas y el fulcro según el caso. Por último, se planteó el problema de mostrar la equivalencia entre las expresiones del CM encontradas en cada MR.

En la fase de post-instrucción los estudiantes reflexionaron sobre la naturaleza del CM, la equivalencia entre la descripción del equilibrio respecto a los dos MR, la relación entre la posición del CM y el punto de equilibrio donde se ubicaba el fulcro.

Situación de las placas. Se deseaba plantear tareas que permitiesen al estudiante experimentar con cuerpos con CM externos a ellos, lo cual no es observable en la situación de la balanza y el planeador.

En la pre-instrucción se discutió respecto al equilibrio de los cuerpos y sobre las experiencias con el equilibrio de la balanza. En la fase de interacción se planteó determinar el CM de dos manipulables planos en forma de "L" de distinta área, placas de 2mm de espesor nombradas L1 y L2, con CM al interior y exterior del cuerpo respectivamente, figura 2 (a) y (b).

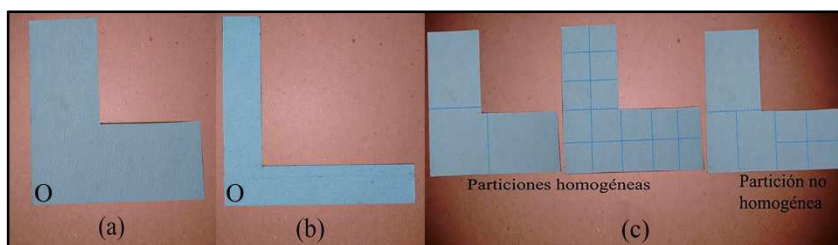


FIGURA 2. Manipulables planos; (a) placa L1; (b) placa L2 y (c) particiones de L1.

La ubicación del CM de las placas requería que los alumnos consideraran el manipulable como un sistema de partículas, para esto, se solicitó realizar el dibujo de una partición Π sobre las placas e interpretar a cada elemento de la partición como una partícula. Posteriormente, se tenía que emplear la expresión del CM de un sistema de partículas $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$, donde M es la masa total del sistema de partículas (masa de la placa), m_i la masa de cada elemento y $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ la coordenada de un elemento "i" de Π respecto a un marco de referencia MR situado en el vértice "O" de la placa, figura 2(a y b). En particular, para la realización adecuada de los cálculos se requería realizar una partición homogénea, figura 2(c), puesto que los elementos de dichas particiones poseen la misma área y la misma masa.

Una vez encontrado el CM con la expresión para un sistema de partículas, el sujeto tenía que verificar que la posición del CM encontrada se correspondía con la posición de equilibrio de la placa. La verificación consistía en equilibrar cada placa sobre un soporte (la punta de un lápiz) ubicado en el CM. Para el caso de la placa de la figura 2 (b) con CM externo al cuerpo, el equilibrio de la placa se lograba al agregar una barra delgada para conectar el cuerpo con el CM que tenía que apoyarse sobre el soporte.

En la fase de post-instrucción, los estudiantes y el profesor tenían que discutir si la expresión arrojaba el resultado correcto, tenían que reflexionar acerca de la naturaleza abstracta del CM como un objeto físico-matemático que puede encontrarse dentro o fuera de un cuerpo apoyados en la noción de equilibrio.

Cabe señalar que la relación entre esta situación y la de la balanza fue introducida a través del objeto “expresión del CM” para un sistema de partículas, la cual fue presentada como una generalización de la expresión del CM de la balanza (el caso del CM de dos partículas).

Situación del planeador. Mediante esta situación se abordó otro significado del CM, como aquel objeto que es determinante en el movimiento de los cuerpos. El vuelo de un avión de papel es un fenómeno común para los estudiantes, y desde una perspectiva didáctica, dicha situación puede ser reducida en su descripción para abordar la noción de CM. Consideramos que dicha reducción no resulta del todo problemática, si se toma en cuenta que se deseaba investigar cómo los estudiantes se apoyan en los conocimientos adquiridos en las situaciones físicas estáticas pasadas para describir un nuevo fenómeno dinámico.

En la pre-instrucción se reflexionó respecto a la balanza, el equilibrio de las placas y los principios físicos involucrados en el vuelo de los aviones de papel. En la interacción, los alumnos experimentaron con un planeador, el cual era un avión de papel, figura 3. Antes de cada experimento, los estudiantes ubicaron la posición del CM del planeador al equilibrarlo sobre la punta de un lápiz y luego dibujaron una marca en esa posición. Los estudiantes dibujaron la trayectoria del avión y las fuerzas actuantes en cuatro experimentos: (1) vuelo del planeador sin peso, figura 3(a); (2) vuelo del planeador con peso (un clip prensa papel) en la parte anterior del ala derecha, figura 3(b); (3) vuelo del planeador con peso en la parte media del ala, figura 3(c); y (4) vuelo del planeador con peso en la parte posterior del ala, figura 3(d).

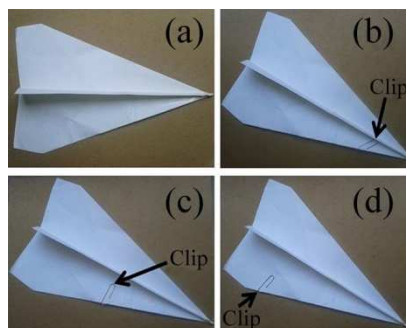


FIGURA 3. El planeador sin peso (a); con peso en la parte anterior (b); media (c) y posterior (d).

En la fase de post-instrucción los estudiantes y el profesor discutieron acerca de lo observado en el experimento y del rol del CM en las distintas situaciones físicas exploradas.

C. Descripción de la actividad físico-matemática de cada tarea

El análisis de la actividad físico matemática necesaria para resolver cada tarea se realizó mediante el EOS. A continuación, se presentan las prácticas, las configuraciones epistémicas y algunos procesos que fueron tomados en cuenta por un profesor experto. En la sección V se presentan a grandes rasgos las configuraciones cognitivas de los estudiantes investigados y la comparación de estas con la componente epistémica.

Equilibrio de la balanza: La figura 4 muestra una tabla que ilustra la configuración epistémica organizada por un docente en la resolución del problema. Respecto a ambos MR, el experto emplea el mismo lenguaje y los mismos conceptos, pero no así las mismas propiedades, procedimiento y argumentos.

Situación problematizada: Obtener una fórmula para determinar el CM de la balanza desde dos MR, uno situado en el fulcro y otro situado en una de las masas de la balanza.					
MR	Lenguaje	Conceptos	Propiedades	Procedimiento	Argumentos
MR en el fulcro	<p>Términos físicos y símbolos: masas "m_1" y "m_2", aceleración de gravedad "g", brazo de palanca "x_1" y "x_2", posición del CM "x_{cm}".</p> <p>Representaciones: masas como puntos "\bullet", el peso de las masas como flechas "\rightarrow", brazos de la balanza como segmentos y MR como plano cartesiano.</p> <p>Expresiones: peso total "$P = (m_1 + m_2)g$", peso "m_1g" y "m_2g", torsión "m_1gx_1, m_2gx_2", torsión del fulcro "Px_{cm}", equilibrio "$m_1x_1 = m_2x_2$" y "$m_1gx_1 = Px_{cm}$".</p>	<ul style="list-style-type: none"> masa Peso aceleración de la gravedad brazo de palanca torsión equilibrio centro de masa 	<ul style="list-style-type: none"> La balanza en equilibrio La suma de las torsiones es nula "$m_1gx_1 - m_2gx_2 = 0$". el brazo de palanca del fulcro "$x_{cm} = 0$" es cero el signo menos indica que la torsión es opuesta 	<ul style="list-style-type: none"> se dibuja la balanza, brazos de palanca, las fuerzas y el MR se establece la condición de equilibrio considerando las torsiones de las masas. se verifica la condición de equilibrio con los datos de la tabla 	<p>Tesis: El CM se encuentra en el fulcro "$x_{cm} = 0$".</p> <p>Los datos de la tabla permiten observar que para cada caso de equilibrio se cumple "$m_1x_1 = m_2x_2$".</p>
MR en la masa m_2	<p>Términos físicos y símbolos: masas "m_1" y "m_2", aceleración de gravedad "g", brazo de palanca "x_1" y "x_2", posición del CM "x_{cm}".</p> <p>Representaciones: masas como puntos "\bullet", el peso de las masas como flechas "\rightarrow", brazos de la balanza como segmentos y MR como plano cartesiano.</p> <p>Expresiones: peso total "$P = (m_1 + m_2)g$", peso "m_1g" y "m_2g", torsión "m_1gx_1, m_2gx_2", torsión del fulcro "Px_{cm}", equilibrio "$m_1x_1 = m_2x_2$" y "$m_1gx_1 = Px_{cm}$".</p>	<ul style="list-style-type: none"> masa Peso aceleración de la gravedad brazo de palanca torsión equilibrio centro de masa 	<ul style="list-style-type: none"> La balanza en equilibrio La suma de las torsiones es nula "$m_1gx_1 - Px_{cm} = 0$". Brazo de palanca del fulcro "x_{cm}". La masa "m_2" no ejerce torsión pues su brazo de palanca es nulo. 	<ul style="list-style-type: none"> se dibuja la balanza, brazos de palanca, las fuerzas y el MR se establece la condición de equilibrio considerando las torsiones de la masa "m_1" y el fulcro. 	<p>Tesis: El CM se encuentra en "$x_{cm} = \frac{m_1x_1}{m_1+m_2}$".</p> <p>Los datos de la tabla permiten observar que para cada caso de equilibrio se cumple "$m_1x_1 = (m_1 + m_2)x_{cm}$".</p>

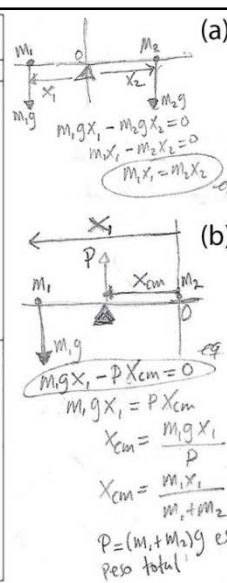


FIGURA 4. Configuración epistémica activada en la resolución del problema de la balanza y resolución de la actividad desde (a) MR en el fulcro y (b) MR en la masa " m_2 ".

El sujeto realiza el proceso de representación y comunica los conceptos, las propiedades, el procedimiento y los argumentos con los que resuelve el problema, ver la columna Lenguaje y la figura 4 (a y b). El sujeto también realiza dos diagramas o representaciones pictórico-esquemáticas del equilibrio de la balanza, figura 4 (a y b), para ilustrar la disposición espacial de los objetos (masas y fulcro), el marco de referencia y la acción de las fuerzas, ver el proceso de representación en la figura 5.

Mediante el proceso de significación el sujeto establece funciones semióticas para dotar de significado a los símbolos, las expresiones algebraicas y los diagramas (columna de lenguaje y conceptos en la figura 4). Respecto al MR en el fulcro, el docente relaciona los conceptos físico-matemáticos a través de algunas propiedades físico-matemáticas (balanza en equilibrio, suma de torsiones nula, entre otras) y realiza un tratamiento físico-matemático para obtener la expresión " $m_1x_1 = m_2x_2$ ", figura 4(a). Posteriormente, el docente, se apoya en los datos de la tabla para establecer una función semiótica que relaciona dicha expresión con el equilibrio de la balanza, lo cual le permite argumentar que el MR se encuentra en el CM, o lo que es lo mismo, que el CM se encuentra en el fulcro, ver columna Argumentos en la figura 4.

Al describir el equilibrio de la balanza respecto al MR situado en la masa constante " m_2 ", el docente realiza un tratamiento físico-matemático que se apoya en algunas propiedades (la balanza en equilibrio, suma de torsiones nula, brazo de palanca nulo, entre otras) para obtener la expresión $x_{cm} = (m_1x_1)/(m_1 + m_2)$, figura 4(b). Nuevamente, apoyado en los datos de la tabla, el sujeto establece una función semiótica para argumentar que el CM se encuentra en el fulcro y que la expresión es una condición para el equilibrio.

Mediante las dos expresiones del CM, el docente propone $x_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ como expresión para el CM desde cualquier MR situado en algún punto sobre la línea que une las masas y advierte que dicha expresión se reduce a la expresión del CM para el caso del MR en el fulcro, tomando " $x_{cm} = 0$ ", y para el caso donde el MR está situado en la masa " m_2 ", tomando " $x_2 = 0$ ". En concreto, a través de las prácticas realizadas, el docente lleva a cabo un proceso de significación entre el equilibrio observable de la balanza y las expresiones.

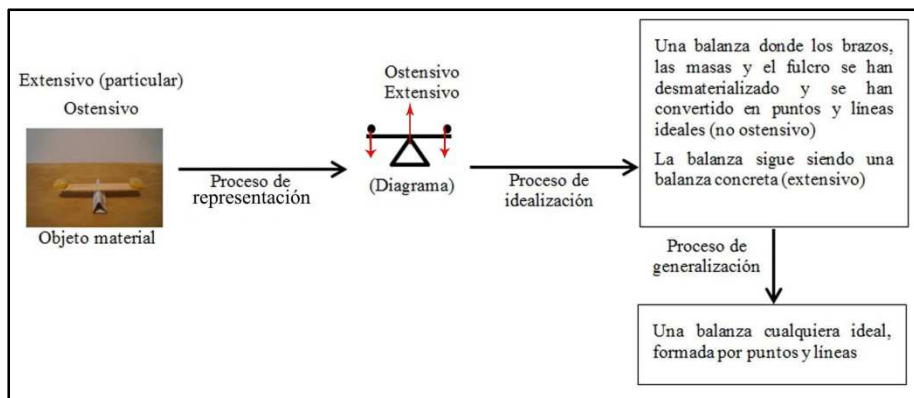


FIGURA 5. Algunos procesos involucrados en la tarea de la balanza.

Al resolver el problema de la balanza el sujeto realiza un proceso de idealización, figura 5, donde a partir del esquema elaborado considera a las masas como partículas, la barra de madera como una recta numérica, y la masa total de la balanza concentrada en la posición del CM.

También realiza un proceso de generalización que le permite ir de las expresiones del CM respecto a cada MR a una expresión general, como si la balanza concreta en cada uno de los casos explorados (objetos extensivos o casos particulares), y los diagramas dibujados, diesen lugar de manera conjunta a una balanza ideal cualquiera (objeto intensivo que considera a todos los casos a la vez), figura 5. También realiza un proceso de tratamiento algebraico (Duval, 2006), figura 4(a y b), donde ejecuta razonamientos y operaciones algebraicas en un mismo registro de representación (registro algebraico) para observar la equivalencia entre las expresiones del CM.

Equilibrio de las placas: En la resolución de la actividad el sujeto organiza a los objetos físico-matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos), ver figura 6, con objeto de verificar que la expresión del CM para un sistema de partículas también permite determinar el CM de las placas L1 y L2 de masa homogénea.

Problema de las placas	Lenguaje	Conceptos	Propiedades	Procedimiento	Argumentos
Verificar que la posición del CM de una placa (L1 y L2) puede determinarse al considerar dicho cuerpo como un sistema de partículas	<p>(Para L1 y L2)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Términos físicos y símbolos: distribución de masa homogénea, masa de los elementos de la partición homogénea "m", masa de la placa "M", posición de un elemento de la partición "$\vec{r}_i = (x_i, y_i)$" y posición del CM "\vec{r}_{cm}". • Representaciones gráficas: La partición dibujada como una cuadrícula sobre la placa, puntos que representan a los elementos de partición y MR como plano cartesiano. • Expresiones algebraicas: Posición del CM de un sistema de partículas $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$ 	<p>(Para L1 y L2)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Físicos: Marco de referencia, posición, masa, masa total, partícula, centro de masa, equilibrio, momento de torsión y balanza. • Matemáticos: Vector, plano cartesiano, coordenadas cartesianas, sustitución, entre otros. 	<p>(Para L1 y L2)</p> <p>(P1) En el marco de la mecánica newtoniana, los cuerpos son pensados como partículas desprovistas de dimensiones físicas.</p> <p>(P2) Las placas tienen una distribución homogénea de masa</p> <p>(P3) 1ra. Ley (marco de referencia).</p> <p>(P4) El CM de un cuerpo es un punto en donde puede considerarse concentrada toda la masa de dicho cuerpo.</p>	<p>(Para L1 y L2)</p> <p>(1) Apoyados en P2, y para poder emplear la fórmula de manera, se dibuja una partición homogénea sobre las placas para dividir la placa en elementos de áreas y masas "m" iguales.</p> <p>(2) Se dibuja un punto en el centro de cada elemento de la partición (P1). Mediante el punto, se piensa al elemento de la partición como una partícula.</p> <p>(3) Desde un marco de referencia (P3) situado en el vértice de la placa, se asignan coordenadas cartesianas a los puntos que se han dibujado en los elementos de la partición.</p> <p>(4) Se sustituye la masa (P4) y las coordenadas en la fórmula del CM para un sistema de partículas</p> $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$	<p>(Para L1 y L2)</p> <p>Tesis: El CM de las placas L1 y L2 puede determinarse mediante</p> $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$ <p>Ya que \vec{r}_{cm} ubica el punto de equilibrio de cada una.</p> <p>Razones:</p> <p>(1) La placa se equilibra en el punto que señala \vec{r}_{cm}.</p> <p>(2) La fórmula predice CM externo al cuerpo de L2. Esto fue verificado experimentalmente al conectar mediante una barra de material, en un extremo, la placa, con en el otro extremo, el CM externo. La placa se equilibró a través de la barra, al apoyarla sobre el extremo del CM externo.</p>

FIGURA 6. Síntesis de la configuración epistémica activada en la resolución del problema de las placas.

En la realización de la práctica físico-matemática el sujeto lleva a cabo algunos procesos cognitivos como el de representación, idealización y tratamiento. Mediante el proceso de representación, figura 7, el sujeto dibuja una partición homogénea sobre el manipulable, dibuja un punto en el centro de cada elemento de la partición y un plano cartesiano con origen en una de las esquinas de la placa (ver diagrama

en la figura 7). También realiza el proceso de idealización al considerar a los elementos materiales de la partición como un sistema de partículas a los cuales atribuye masa y asigna coordenadas cartesianas (a los puntos dibujados en cada elemento) respecto al MR. El sujeto mide y luego sustituye las coordenadas y las masas de las partículas en la expresión del CM para un sistema de partículas. Por último, realiza el proceso de tratamiento matemático para determinar las coordenadas del CM de L1 y L2.

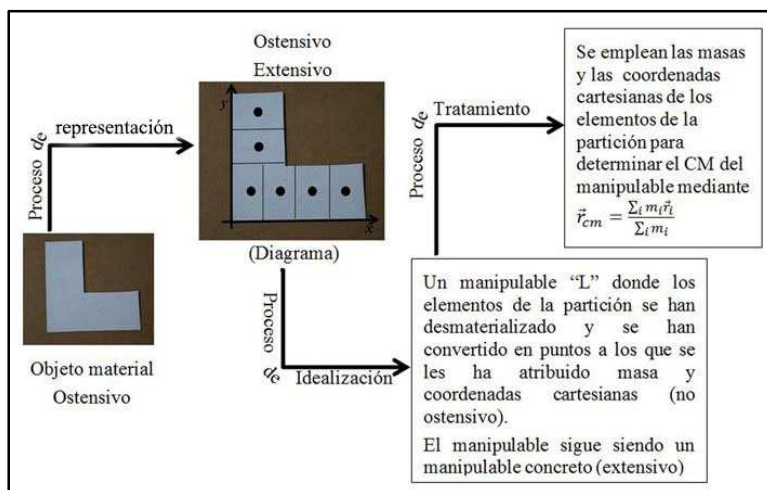


FIGURA 7. Algunos procesos involucrados en la tarea de las placas.

Mediante la organización de los objetos físico-matemáticos, la realización de algunos procesos cognitivos y la experimentación, el sujeto estableció una función semiótica entre la expresión del CM y el equilibrio de las placas, lo cual le permitió argumentar que la expresión del CM para un sistema de partículas también es cierta para el CM de las placas. El docente argumentó que el CM de L2 es externo al cuerpo y que dicha placa puede ser equilibrada al agregar un cuerpo de masa despreciable que permita conectar el CM con la placa.

Vuelo del planeador: En esta situación, el sujeto realiza una práctica físico-matemática con objeto de representar y explicar el vuelo del planeador. El sujeto organizó los objetos físico-matemáticos primarios que se presentan en la figura 8 y explicó el vuelo del avión al considerarlo como un cuerpo rígido sobre el cual actúan, esencialmente, la fuerza de sustentación y la de gravedad (columna de conceptos, figura 8).

Problema del planeador	Lenguaje	Conceptos	Propiedades	Procedimiento	Argumentos
Representar y explicar el vuelo de un planeador (avión de papel) en situaciones en las que presenta distinta distribución de masa	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Términos físicos y símbolos:</i> equilibrio, centro de masa "CM", peso "P", fuerza de sustentación "F", marco de referencia como sistema coordinado cartesiano 3D, representación pictórica del avión y la trayectoria (Figura 9). • <i>Representaciones gráficas:</i> representación pictórica del planeador, fuerzas mediante flechas (→), trayectorias como curvas. 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Físicos:</i> Cuerpo rígido, Centro de Masa, distribución de masa, fuerza de gravedad, ángulo de ataque, fuerza de empuje, fuerza de sustentación, peso, momento de torsión, trayectoria, marco de referencia. • <i>Matemáticos:</i> Sistema de coordenadas rectangular en el espacio tridimensional, eje de simetría. 	<p>(P1) En reposo, en equilibrio, la fuerza neta sobre un cuerpo es nula.</p> <p>(P2) Segunda ley de Newton para la rotación.</p> <p>(P3) La fuerza de sustentación es igual en magnitud al peso y actúa sobre las alas.</p> <p>(P4) El ángulo de ataque provoca el ascenso y descenso del planeador.</p> <p>(P5) La fuerza de gravedad actúa sobre el CM</p>	<p>(1) Para cada uno de los cuatro casos, se determina la ubicación del CM al equilibrar el planeador sobre un soporte (P1).</p> <p>(2) Se imprime una fuerza de empuje al planeador y se observa la trayectoria que sigue a lo largo del vuelo. Esto se repite hasta asegurar que el planeador sigue una trayectoria específica para una distribución de masa dada.</p> <p>(3) Se elabora una representación de las fuerzas que actúan sobre el planeador y la trayectoria que sigue respecto al marco de referencia.</p>	<p>Tesis: La posición del CM determina la trayectoria que sigue del planeador.</p> <p>Razones:</p> <p>(1) Cuando el CM se encuentra fuera del eje de simetría longitudinal, Figura 3 (b, c y d), la fuerza de gravedad aplica un momento torsión en torno dicho eje</p> <p>(2) Debido a la torsión, se incrementa el ángulo de ataque y provoca que el planeador siga una trayectoria curva hacia el lado del CM, y sigue una trayectoria parabólica cuando el CM está sobre el eje de simetría.</p>

FIGURA 8. Configuración epistémica activada en el problema del planeador.

A partir de la observación del vuelo del planeador, el docente estableció un conjunto de funciones semióticas entre la acción de fuerzas visualizadas y sus efectos en la trayectoria del avión. El docente señaló que la fuerza de sustentación actúa sobre las alas, mientras que la fuerza de gravedad provoca un momento de torsión alrededor del eje de simetría longitudinal del planeador (columna de Propiedades, figura 8). Cuando el CM se encuentra fuera del eje de simetría longitudinal, figura 3 (b, c y d), la torsión genera un incremento del ángulo de ataque provocando que el planeador siga una trayectoria curva hacia el lado donde se encuentra el CM, columna argumentos en la figura 8. Cuando el CM se encuentra sobre el eje de simetría, el planeador sigue una trayectoria parabólica en el descenso sin desviar su trayectoria (columna de argumentos, figura 8). El efecto combinado de las fuerzas le permitió explicar la trayectoria que sigue el planeador y también atribuir un nuevo significado al CM como aquel objeto que determina la trayectoria del planeador.

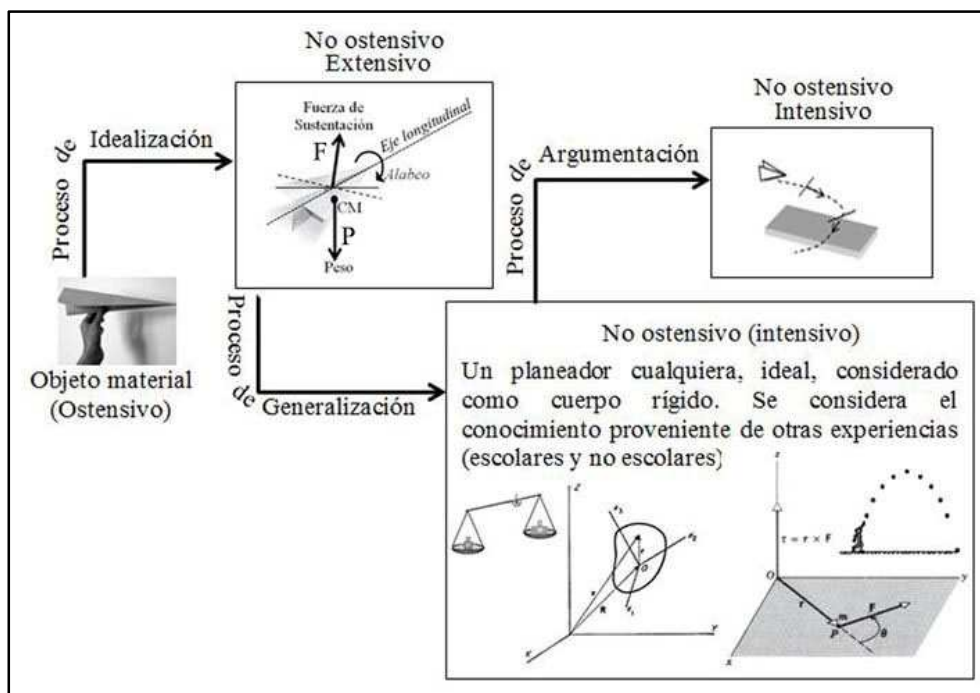


FIGURA 9. Algunos procesos cognitivos involucrados en la tarea del planeador.

En la resolución del problema, el sujeto realiza el proceso de idealización, figura 9, al considerar la masa del planeador concentrada en el CM. También realiza la generalización al pensar al planeador como un cuerpo rígido general que puede ser analizado desde dos marcos de referencia, uno situado en la posición desde donde se lanza el planeador y otro marco en el planeador, figura 9. Desde el marco fuera del planeador se describen sus trayectorias de acuerdo con la distribución de masa y desde el marco en el planeador el sujeto describe la posición del CM, la acción de la fuerza de sustentación, la fuerza de gravedad y la torsión alrededor del eje de simetría longitudinal del planeador. Mediante el proceso de argumentación, el sujeto explica el vuelo del planeador a partir de la información proveniente de los dos marcos de referencia.

V. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Las configuraciones cognitivas inferidas de las respuestas que dieron los estudiantes a los problemas propuestos se compararon con las configuraciones epistémicas correspondientes. La presencia, o ausencia, de algunos elementos de estas últimas en las configuraciones cognitivas de los estudiantes, se utilizó como criterio para caracterizar la comprensión de los estudiantes investigados sobre el CM. Por brevedad, solo se presenta la configuración cognitiva del alumno A para la situación del equilibrio de la balanza, y posteriormente, solo se describen de manera sucinta las características de las configuraciones cognitivas de las otras dos situaciones. En la descripción de la concepción de A también se comentan las perspectivas de los alumnos B y C. A continuación, se presentan los resultados y el análisis correspondiente en cada situación.

A. La situación de la balanza

Con relación a la formulación de la expresión algebraica del CM a partir del análisis de los datos registrados en las tablas y la acción de las fuerzas, se observó que los estudiantes A, B y C lograron describir de manera adecuada el equilibrio de la balanza al visualizar la relación que se establece entre las variables físicas del fenómeno (brazo de palanca, fuerzas, torsión), por ejemplo, para el caso en el que la balanza se equilibra con masas distintas, el estudiante A advirtió que: “*para que la balanza se equilibre respecto al fulcro, se debe tener de un lado mayor peso y menor distancia (brazo de palanca), y del otro lado, menor peso, pero ubicado a una mayor distancia del fulcro.*”

Sin embargo, los alumnos A y B fueron incapaces de convertir estas afirmaciones en una expresión algebraica de la posición del CM. Como se verá más adelante, solo la alumna C sí describió algebraicamente el equilibrio de la balanza respecto al MR localizado en el fulcro y respecto al MR situado en una de las masas, pero fue incapaz de relacionar dichas expresiones.

Por su parte, el alumno A representó diagramáticamente a la balanza y a las fuerzas que, según él, actuaban sobre m_1 cuando la balanza se encontraba en equilibrio, ver la figura 10. En la parte superior izquierda de dicha figura el estudiante muestra a la balanza en equilibrio, y en la parte central ilustra a la masa m_1 en el origen de un sistema coordenado cartesiano y con dos fuerzas (representadas por flechas verticales) actuando sobre ella manteniéndola en equilibrio.

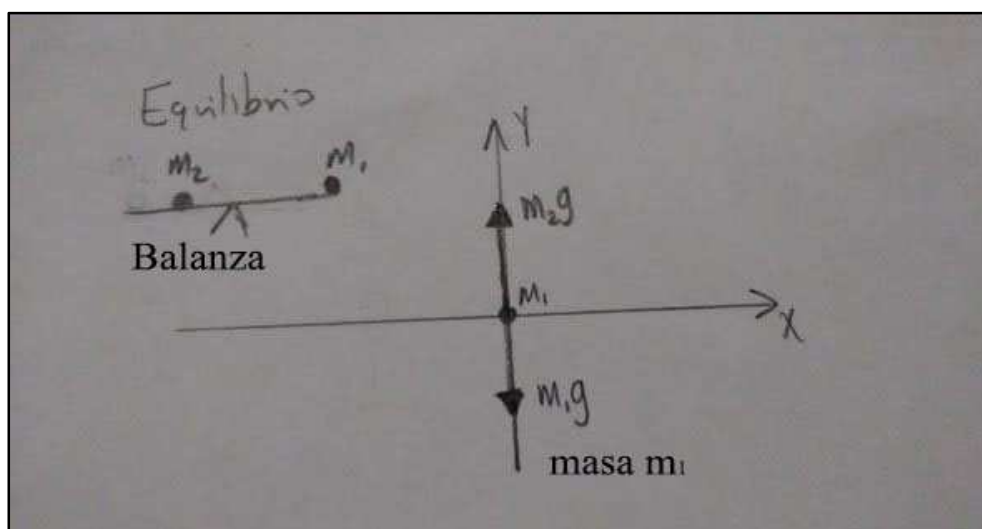


FIGURA 10. Representación del alumno A de la balanza en equilibrio y de la masa m_1 bajo la acción de fuerzas.

En la figura 10 se observa que A trató de describir la condición de equilibrio de la balanza al analizar las masas de manera separada, por ejemplo, afirmó que cuando la balanza se encuentra en equilibrio la masa m_1 experimenta la acción de dos fuerzas de igual magnitud y de sentido opuesto, el peso m_1g de m_1 y el peso m_2g de m_2 , las cuales representó mediante dos flechas verticales en la dirección del eje “y” del sistema coordenado cartesiano. En comparación con el experto, que consideró el brazo de palanca, la torsión ejercida por las fuerzas y la propiedad de equilibrio “ $m_1gx_1 - m_2gx_2 = 0$ ” (columna Propiedades en la tabla de la figura 4), los alumnos A y B prescindieron del brazo de palanca de las masas y la condición de equilibrio, lo cual les impidió a los alumnos obtener una expresión para el CM.

La configuración cognitiva de A, figura 11, muestra que no considera los conceptos de brazo de palanca y de momento de torsión. A lleva a cabo los procesos de visualización y representación de manera adecuada ya que, por un lado, identifica la relación entre las masas y los brazos de palanca y, por otro, dibuja la balanza. Sin embargo, no realiza de manera adecuada el proceso de idealización al no desmaterializar las masas y al no considerar los brazos de palanca y el fulcro en cada caso.

El estudiante A tampoco realiza el proceso de generalización ya que no considera todos los casos de equilibrio a la vez; es decir, no tiene en cuenta las características que mantienen en común y que las hace formar parte de una misma clase de fenómeno. Los estudiantes A y B, al reflexionar sobre el comportamiento de los datos señalaron que no había relación entre ellas que les permitiese expresar matemáticamente el equilibrio. Solo tomaron en cuenta la propiedad de cancelación de la suma de fuerzas sobre las masas y no tomaron en cuenta el equilibrio mediante la cancelación de los momentos de torsión.

Lenguaje	–Representación diagramática en la que intervienen: <ul style="list-style-type: none"> • Términos físicos: masa, peso, distancia, equilibrio, aceleración debida a la gravedad, marco de referencia, etc. • Símbolos: la aceleración “g” debida a la gravedad, las masas “m_1” y “m_2” y sus pesos “m_1g” y “m_2g”. • Representaciones gráficas: masa como punto, plano cartesiano y fuerzas mediante flechas (\rightarrow). –Expresiones algebraicas: el peso “ mg ” (segunda ley de Newton).
Conceptos	–Físicos: masa, fuerza y peso –Matemáticos: vector, sentido, magnitud, suma vectorial, escalar, sistema coordenado cartesiano.
Propiedades	– (P2) En equilibrio, la suma de fuerzas es nula.
Procedimiento	(1) Considera los marcos de referencia en el extremo de la balanza y en el fulcro. (2) Mide la posición de las masas y las masas respecto al marco de referencia localizado en el fulcro de la balanza. (3) Mide la posición del fulcro y las masas respecto al marco de referencia localizado en el extremo de la balanza. (4) Analiza los datos, sin embargo, no deduce la posición del CM.
Argumentos	Tesis: el equilibrio se explica de la siguiente manera, si se tiene más de un lado (peso) el otro debe tener más distancia, y si tiene más peso del otro lado, se debe compensar con más distancia de este lado y viceversa. <i>Sin embargo, el estudiante fue incapaz de establecer una expresión algebraica, pues no observó ninguna relación entre los datos recopilados. Sólo empleó P2.</i>

FIGURA 11. Configuración cognitiva del alumno A en la tarea de la balanza.

En contraste, la configuración cognitiva de la alumna C fue similar a la configuración epistémica experta. La alumna realizó correctamente los procesos de representación, al dibujar un esquema de la balanza en relación con dos marcos de referencia a los que ella nombró S y S' , figura 12, y al emplear el lenguaje algebraico para describir el equilibrio. También realizó el proceso de idealización, pues desmaterializó los elementos de la balanza en cada uno de los casos y encontró las relaciones entre éstos mediante el proceso de visualización. La estudiante realizó el proceso de generalización al reflexionar acerca del comportamiento de los datos registrados en la tabla y al establecer una relación entre las variables proponiendo expresiones algebraicas para el equilibrio de la balanza respecto a los dos marcos de referencia, ver la figura 12. Según la alumna, las expresiones algebraicas son las expresiones de un mismo objeto, el CM.

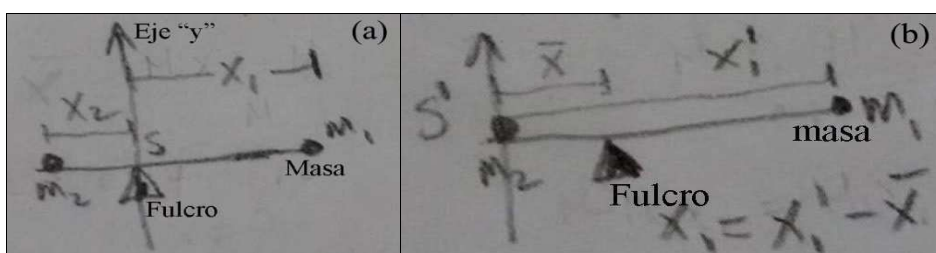


FIGURA 12. Representación de la balanza con MR en el punto medio de la barra que equilibra las masas (a) y MR en la masa m_2 (b).

Sin embargo, la alumna C no realizó el proceso de tratamiento adecuadamente. Al describir el equilibrio de la balanza respecto a cada marco de referencia, la estudiante partió de la expresión general de la posición \bar{x} del CM ($\bar{x} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2}$, donde M_i y x_i son la masa y la posición del cuerpo “ i ” respectivamente) y consideró ciertas condiciones. La condición advertida por la estudiante, en el caso del MR situado en el fulcro, fue la de asignar un valor nulo a la posición del CM ($\bar{x} = 0$), mientras que la condición señalada para el MR situado en la masa m_1 fue establecer $x_2 = 0$ (ver la figura 13).

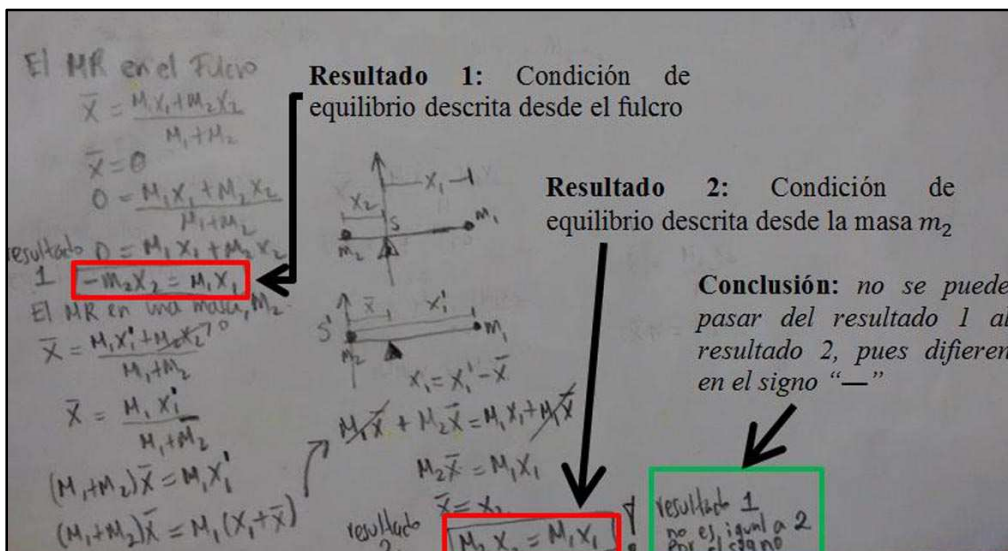


FIGURA 13. Tratamiento algebraico de la alumna C.

Estas consideraciones le permitieron corroborar las condiciones de equilibrio de la balanza que fueron obtenidas en la fase previa a partir del análisis de las regularidades en el comportamiento de los datos (resultados 1 y 2 en la figura 13), pero no así mostrar teóricamente la equivalencia de las expresiones del equilibrio respecto a los dos marcos de referencia.

La estudiante fue incapaz de establecer la equivalencia entre las expresiones algebraicas del CM correspondientes a cada MR. Suponemos que esto fue debido a que la estudiante no estableció de manera adecuada la función semiótica que le permite relacionar el ostensivo “signo negativo” del Resultado 1 (figura 13) con la ubicación de la masa m_2 a la izquierda del MR (Marco de Referencia “S” situado en el fulcro, figura 12).

B. La situación del equilibrio de las placas

Los alumnos señalaron que la distribución de masa era una de las variables físicas involucradas en el equilibrio de las placas y que se encontraba relacionada con la posición del CM. Esto se ilustra en la siguiente aseveración del estudiante A: “En L1 que tiene más masa que L2, el CM estaría cerca del centro, donde hay más material. En L2, como dice mi compañero B, no hay CM y es un punto imaginario.”

El argumento anterior deja ver otro aspecto acerca de la ontología de objeto material que atribuyen los estudiantes al CM, es decir, según ellos, el CM no existe en el espacio libre pero sí es posible encontrarlo en los materiales. Por ejemplo, la alumna C señaló que: “L1 tiene CM al interior, mientras que L2 no posee CM. Es posible equilibrar L2 al pegarle otro cuerpo para conectarlo con el CM, y así tendría CM y se podría equilibrar.”

Las configuraciones cognitivas de los estudiantes fueron similares y dieron cuenta de la interpretación material del CM. Por ejemplo, al comparar la configuración de la alumna C con la configuración epistémica correspondiente (figura 6), se observó que C eligió una partición homogénea de manera arbitraria y fue incapaz de justificar dicha elección. En otras palabras, no llevó a cabo de manera adecuada el proceso de significación para poder asociar un significado adecuado a la partición homogénea como un tipo de partición necesaria para el empleo de la expresión del CM para un sistema de partículas. De manera que la elección de una partición no homogénea le hubiese llevado a resultados erróneos.

Los alumnos realizaron los procesos de representación y de idealización, por ejemplo, C representó un esquema de la placa L1 (figura 14) y dibujó un punto en el centro de cada elemento de la partición para señalar que está considerando a la placa como un sistema de partículas de igual masa ($m_1 = m_2 = m_3 = m$). También asignó coordenadas cartesianas (x_i, y_i) a dichas partículas respecto a un plano cartesiano situado en una de las esquinas de la placa (figura 14). En general, C (y también los alumnos A y B) llevó a cabo el proceso de tratamiento para ambas placas y fue capaz de determinar el CM de cada una de ellas.

En la fase de post-instrucción, los estudiantes concluyeron que el CM de un sistema de partículas puede emplearse para ubicar el CM de la placa L1, pero no puede emplearse para la placa L2, pues según ellos, el CM de dicha placa es ficticio ya que se encuentra fuera del cuerpo.

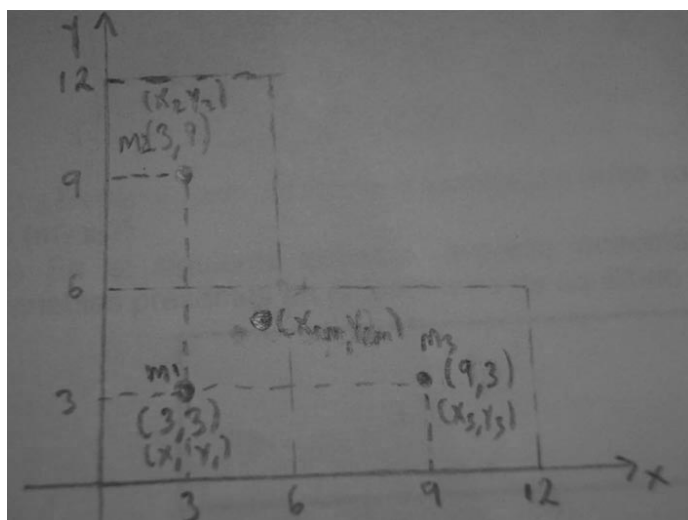


FIGURA 14. Representación de “C” de la placa L1 y de la partición.

Los resultados obtenidos en esta segunda tarea nos muestran que la transferencia del conocimiento adquirido en una situación física previa a otra situación física, que mantiene en común al CM, no es inmediata para los estudiantes. Algunas características de las situaciones físicas no permitieron a los estudiantes desarrollar una noción adecuada del CM.

C. La situación del vuelo del planeador

Los alumnos A, B y C señalaron que el planeador experimentaba fuerzas como la de gravedad y la fuerza de empuje inicial a lo largo del vuelo, y prescindieron de la fuerza de sustentación. Sin embargo, en relación con esto último, los estudiantes interpretaron la acción del viento sobre el planeador a través del efecto directo de la corriente turbulenta de aire presente durante el experimento, pero no interpretaron dicha interacción a través de la noción de fuerza de sustentación.

Por otra parte, la complejidad de la situación física dinámica permitió conocer otro aspecto del CM que no hubiese sido posible observar en las situaciones estáticas. Se trata de que en la situación física donde el planeador no tiene peso adicional, ver la figura 3(a), al sujetar el planeador del lugar donde se encuentra localizado el CM y luego arrojarlo, es posible optimizar el vuelo. En otras palabras, los alumnos señalaron que la posición del CM era importante para que el planeador lograra un alcance máximo. Esto se ilustra a continuación a través del argumento del alumno B: “El CM es el lugar donde se debe tomar el planeador para que el planeador llegue más lejos” (para lograr un alcance máximo).

Por otro lado, los alumnos también hicieron referencia a su conocimiento previo con los manipulables en forma de “L” en el sentido de que siguieron atribuyendo una naturaleza material al CM para el caso del planeador. Esto se ilustra mediante el argumento de C: “El CM es material, pues está dentro del planeador. En caso contrario, el CM sería imaginario y el planeador no volaría.”

Los hallazgos anteriores también se vieron reflejados en las configuraciones cognitivas de los estudiantes. Las configuraciones de los alumnos A, B y C fueron similares y en general solo tomaron en cuenta los conceptos de peso y la fuerza de empuje inicial a lo largo del vuelo. A continuación, se describe el caso del alumno B (las reflexiones de A y C fueron semejantes): el alumno B hizo una representación diagramática de las fuerzas que actúan sobre el planeador durante el vuelo, figura 15.

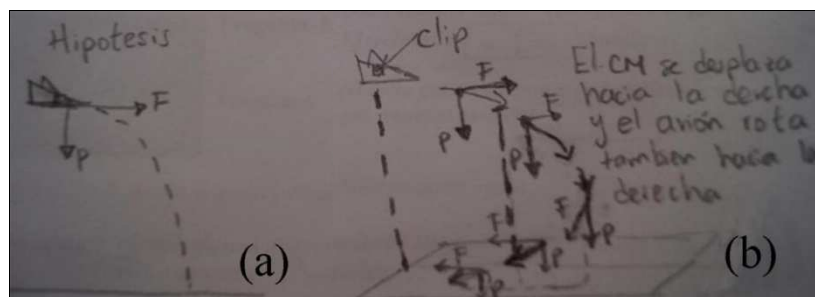


FIGURA 15. Representación de “B” del vuelo del planeador sin peso (a) y con peso sobre el ala derecha (b).

Tomando en cuenta dichas fuerzas, B intentó explicar las trayectorias del planeador, sin embargo, solo tuvo éxito al explicar el vuelo del planeador sin peso adicional, figura 15(a). Uno de los elementos que no favoreció la elaboración de una explicación del resto de las trayectorias del planeador fue que no consideró ciertos conceptos físicos que se encuentran en la configuración epistémica (cuerpo rígido, ángulo de ataque y momento de torsión) y las propiedades que los relacionan (estos fueron discutidos de manera general en la fase de Pre-instrucción). Cabe señalar que B consideró erróneamente que la fuerza impulsiva “ F ”, que se le imprimió al avión inicialmente, también se encontraba presente a lo largo de la trayectoria del planeador, ver “ F ” en la figura 15.

El alumno B realizó los procesos de idealización y significación de manera inadecuada, pues interpretó al planeador como una balanza y no como un cuerpo rígido que experimenta un momento de torsión debido a la fuerza de gravedad tal y como se presentó en la configuración epistémica correspondiente. En este sentido, la explicación del movimiento del planeador no fue adecuada dado que el alumno no realizó el proceso de generalización al considerar solamente la perspectiva del marco de referencia situado en el planeador y no al marco de referencia desde donde se arrojó el planeador. Según B, en los casos donde el planeador tiene un peso adicional, figura 3 (b, c y d), el planeador es como una balanza y su trayectoria curva, figura 15(b), se debe a que el peso adicional desequilibra a la balanza hacia el lado donde se encuentra el peso adicional. Con base en estas aseveraciones, el proceso de argumentación que lleva a cabo el alumno B se apoya en su conocimiento previo de la situación de la balanza y no en los conceptos y propiedades señaladas en la configuración epistémica.

En la fase de post-instrucción los estudiantes realizaron un proceso reflexivo guiados por el investigador, el cual sugirió a los estudiantes confrontar sus concepciones materiales sobre el CM con la evidencia experimental observada en las tres situaciones físicas. Finalmente, cabe señalar que dicha actividad motivó a los alumnos a la realización de un proceso de idealización que llevó a los estudiantes de una concepción material del CM hacia una concepción abstracta de éste.

VI. CONCLUSIONES GENERALES

Una de las conclusiones de este trabajo es que el uso competente de la noción de CM en un determinado contexto no asegura la transferencia a otros contextos diferentes debido no solo a la presencia de factores específicos del contexto, sino al obstáculo que puede significar una interpretación estática y otra dinámica. En el contexto de las situaciones físicas planteadas, el paso de la concepción material a la concepción abstracta del CM solo se logró a través de la reflexión en torno al conjunto de experiencias logradas en las tres situaciones físicas. Cada situación física mostró a los estudiantes una propiedad específica del CM, la cual hubiese sido imposible observar en otras situaciones, en otras palabras, el CM en una situación concreta es interpretada de manera distinta a como pudiese ser interpretado en otros contextos debido a que se relaciona con otros conceptos.

También concluimos que la resolución de una tarea planteada en una situación física únicamente provee a los estudiantes de un conocimiento parcial sobre el CM. Por ejemplo, observamos que los estudiantes no tuvieron conflicto con la naturaleza abstracta del CM cuando trabajaron con la balanza, puesto que el CM se encontraba dentro del cuerpo. Sin embargo, en la situación de las placas, los estudiantes tuvieron dificultades en concebir al CM como un punto que podría estar localizado al exterior del cuerpo. También, en la situación del planeador, el CM se materializa como un elemento importante que determina la trayectoria que sigue un cuerpo en movimiento; en el contexto de la balanza y las placas hubiese sido imposible observarlo. Es decir, cada situación física relacionada con el CM provee a los estudiantes una perspectiva parcial y no global sobre el CM.

Una manera en que los estudiantes podrían pasar de la perspectiva parcial a una global del CM, que les permita usar el CM en diferentes contextos, podría lograrse asegurando que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se presentase a los alumnos una muestra representativa de contextos. Esta muestra representativa como mínimo debe contemplar un contexto estático y uno dinámico, pues como se ha mostrado anteriormente, el alumno transfiere de manera mecánica (o no transfiere) los objetos y relaciones observadas en el contexto estático al contexto dinámico sin tomar en cuenta la complejidad de éste último.

Por último, en relación con el proceso de idealización, hay situaciones en las que dicho proceso es obstaculizado por la realización del proceso de materialización. Por ejemplo, el equilibrio de un cuerpo con CM externo, en el que los estudiantes argumentaron que el CM es material al no concebir la idea de equilibrar un cuerpo sobre un punto en el espacio libre. Sin embargo, el paso de la concepción material hacia la concepción abstracta del CM podría ser motivado a través del diálogo y la reflexión entre el estudiante y el docente, con base en la evidencia experimental y la consideración de la teoría newtoniana.

REFERENCIAS

- Apóstol, M. T. y Mnatsakanian, M. (2000). Finding Centroids, the Easy Way. *Math Horizons*, 8(1), 7-12.
- Badillo, E., Font, V. y Edo, M. (2014). Representaciones matemáticas usadas en la resolución de un problema aritmético de reparto por niños del primer ciclo de primaria. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 65, 59-69.
- Boulter, C. J. (2000). Language, Models and Modelling in the Primary Science Classroom. En J.K. Gilbert y C.J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (289-305). London: Kluwer Academic.
- Brown, D. y Cox, A. (2009). Innovative uses of video analysis. *The Physics Teacher*, 47(3), 145-150.
- Calderón, S. E. y Gil, S. (2011). Experimentos con objetos que caen con aceleración mayor que g. *Latin American Journal of Physics Education*, 5(2), 501-507.
- Chacón, Á. E. R. y Rodríguez, O. L. D. R. (2009). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 55-67.
- Collazos, M. C. A. (2009). Prototipo para la Enseñanza de la Dinámica Rotacional (Momento de Inercia y Teorema de Ejes Paralelos). *Latin American Journal of Physics Education*, 3(3), 619-624.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Feynman, R. P., Leighton, B. R. y Sands M. (2010). *The Feynman Lectures on Physics, Volume I (The New Millennium Edition)*. Consultado en http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_19.html en octubre de 2018.
- Font, M. V. (2016). Coordinación de Teorías en Educación Matemática: el caso del enfoque ontosemiótico. *Perspectivas de Educação Matemática*, 9(20), 256-277.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Johnson, R.B. y Onwuegbuzie, A.J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.
- López-García, V. (2004). La física de los juguetes. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 1(1), 17-30.
- Malaspina, U. V. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365-399.
- Malaspina, U. V. y Font, V. M. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from "Case Study Research in Education"*. US San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Moreno, M.N., Font, M.V. y Maciel, R. J. (2016). La importancia de los diagramas en la resolución de problemas de cuerpos deformables en Mecánica: el caso de la fuerza de fricción. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 24(1), 158-172.
- Ruiz, G. G. (2003). El concepto estadístico de centro de gravedad. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 53, 43-53.
- Santos, G., Otero, M. R. y Fanaro, M. D. L. A. (2000). ¿Cómo usar software de simulación en clases de Física? *Caderno Brasileiro de Ensino de física*, 17(1), 50-66.
- Treeby, D. (2017). A Physical Proof of the Pythagorean Theorem. *The Physics Teacher*, 55(2), 92-93.
- Young, H. D. y Freedman, R. A. (2013). *Física universitaria*. México: Pearson.