Resultados del uso del cálculo numérico para el aprendizaje de la mecánica elemental

Results of using numerical methods for learning elementary mechanics

REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Rosana Cassan[1], Roberto Laura[1]y Alejandra Rosolio[1]
[1]*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,Universidad Nacional de Rosario,Pellegrini 250, 2000 Rosario. Argentina.*

E-mail:cassan@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Mostramos los resultados de una investigación sobre la inclusión de métodos numéricos para obtener la ley de movimiento correspondiente a fuerzas no constantes en un curso de mecánica elemental de nivel universitario. Analizamos los resultados obtenidos al proponer a los estudiantes la implementación del método de Euler para obtener la dependencia temporal de la posición, velocidad y aceleración de un objeto sometido a la atracción gravitatoria y a una fuerza de roce proporcional a la velocidad

Palabras clave: Mecánica elemental; Fuerzas no constantes; Métodos numéricos; Enseñanza de la Física.

Abstract

We show the results of a research concerning the inclusion of numerical methods to obtain the motion laws corresponding to non-constant forces in a basic level university course of mechanics. We analyse the results obtained by proposing to the students the implementation of the Euler method to obtain the time dependence of the position, velocity and acceleration for an object acted by the gravity attraction and a drag force proportional to the velocity.

Keywords: Basic mechanics; non-constant forces; numerical methods for teaching.

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la mecánica clásica en carreras de ingeniería, generalmente, comienza con la cinemática del movimiento de una partícula, para luego continuar con las leyes de Newton, donde las fuerzas son causas del movimiento.Los problemas que usualmente se plantean, tanto en las actividadesde aula, como en la mayoría de los libros de texto, se centran en movimientos uniformes o uniformemente acelerados.

Un ejemplo es la "caída libre" de cuerpos donde se asume que la única fuerza actuante es la interacción gravitatoria constante cerca de la superficie de la Tierra, y se desprecia la fuerza de rozamiento viscoso con el aire. En la mayoría de estos ejemplos se parte de modelos abstractos y en ocasiones lejanos a la realidad y comprensión de los estudiantes, considerando solo las fuerzas constantes en el tiempo.Abordar desde la dinámica situaciones con interacciones variables, se posterga para cursos de Física posteriores en los que los estudiantes ya conocen la resolución de ecuaciones diferenciales.

El énfasis puesto en las fuerzas constantes deja fuera la descripción de movimientos más realistas. Hemos encontrado durante nuestra tarea docente que algunos estudiantes utilizan,erróneamente,las ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado al resolver situaciones en las que actúan fuerzas no constantes.

Un aspecto muy importante de la mecánica clásica es reconocer que la posición y la velocidad de un cuerpo para un instante dado, quedan determinadas a partir de la posición y de la velocidad en otro tiempo y de las fuerzas que actúan sobre el mismo en ese intervalo de tiempo.La presentación usual de los cursos de mecánica elemental no permite enfatizar este determinismo, que además tuvo gran influencia en el desarrollo de la ciencia (Laura, 2004).En este sentido se recomienda insistir durante el trabajo en el aula en que los movimientos quedan determinados por la característica de la fuerza resultante y por las condiciones iniciales (posición y velocidad de la partícula en un instante determinado) (Cassan y Massa, 2014).

La evaluación del presente artículo estuvo a cargo de la organización del XIV Simposio de Investigación en Educación en Física

El cálculo numérico, aplicado a resolver las ecuaciones del movimiento de la mecánica, hace explícito este determinismo y, además, brinda una herramienta poderosa para obtener las leyes de movimiento con fuerzas variables, y es hoy de uso común en los cursos avanzados de mecánica (Bedford y Fowler, 1996). Cabe plantearsesi será posible introducir el uso del cálculo numérico en un curso de mecánica elemental.

Richard Feynman, en sus *Lectures on Physics*, presenta el cálculo numérico de la ley de movimiento de un planeta alrededor del sol (Feynman y otros, 1963). En este caso, la estabilidad del cálculo numérico requiere usar una aproximación de segundo orden (*leapfrog method*), lo que no es sencillo de implementar en un curso de mecánica elemental. Más recientemente, se ha planteado la posibilidad, como una propuesta didáctica, de usar en un curso de mecánica elemental el método de Euler para el cálculo numérico con una planilla de cálculo, pero sin evaluar los resultados que se obtiene con los estudiantes (Buzzo Garrao, 2007).

Este trabajo se centra en una investigación basada en los lineamientos de la ingeniería didáctica, realizada a partir de una experiencia áulica para abordar desde la dinámica el estudio de movimiento de cuerpos donde intervienen fuerzas variables, con la aplicación de metodologías de cálculo numérico.

II. REFERENCIALES TEÓRICOS

En la elaboración de la propuesta presentada a los estudiantes como así también en el análisis de sus actuaciones se aplicó la metodología de investigación de la ingeniería didáctica. Esta forma de trabajo en el campo de la didáctica, proveniente de la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, esunametodología de corte cualitativo en la que se realiza

> *…una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas con los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.*(Artigue, 1989; Artigue y otros, 1995)

Esta metodología está integrada por cuatro fases o etapas que permiten su sistematización:

Análisis preliminar: en donde se profundiza en el análisis de la enseñanza tradicional y de sus efectos, de las concepciones y dificultades de los estudiantes y de los obstáculos que determinan su evolución,y se definenlos objetivos.

*Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas:*se consideran las variables didácticas, las posibilidades de aprendizaje a partir de los conocimientos,aptitudes y habilidades que supuestamente poseen los estudiantes,los medios o las herramientas a incorporar. Aquí se diseña la propuesta didáctica.

*Realización didáctica:*es la fase en la que se aplica la estrategia didáctica y se recogen los datos o registros que se evaluarán para la investigación en curso.

Análisis a posteriori y evaluación: se analiza el contenido de los registros recolectados: estrategias utilizadas, justificaciones, reflexiones, argumentaciones, inconsistencias.Por último y principalmente cuando se aplica como metodología de investigación, este análisis se debe confrontar con lo considerado durante el análisis *a priori*, siendo esta validación de carácter interno.

III. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Este diseño fue elaborado para ser aplicado en un curso de mecánica elemental (Física I) correspondiente al segundo semestre de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario. Consiste en el planteo de una situación problemática en la que un cuerpo se deja caer en un medio viscoso, solicitando analizar su movimiento a partir de consideraciones dinámicas con la aplicación de métodos numéricos y utilizando una planilla de cálculo.

A. Análisis preliminar

Cualquier modelización de un problema de mecánica convierte a la segunda ley de Newton en ecuaciones de movimiento, que son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en las coordenadas generalizadas del sistema, cuya solución es la ley de movimiento del sistema. En el caso especial en que el cuerpo está sometido a fuerzas constantes en el tiempo, la aceleración es también constante, y entonces la ley de movimiento se puede obtener antiderivando dos veces esta constante, lo que permite obtener las conocidas expresiones del movimiento uniformemente acelerado. Estas habilidades ya han sido adquiridas por los estudiantes.

En los cursos de mecánica elemental lo usual es no abordar, o hacerlo solo superficialmente, los problemas en que la ley de movimiento corresponde a fuerzas no constantes, ya que involucran la resolución de ecuaciones diferenciales, que los estudiantes abordan en los cursos de matemática más avanzados. Pero no está tan claro que el curso de ecuaciones diferenciales de matemática, que los estudiantes harán un año después, brinde las herramientas de cálculo necesarias para la obtención de las leyes de movimiento en forma general. La caída de un cuerpo en un medio viscoso puede servir como ejemplo de lo que queremos decir. Su ecuación de movimiento debe incluir la fuerza peso (constante) y la fuerza de roce viscoso. Solamente si la fuerza de roce viscoso es proporcional a la velocidad la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, del tipo de las que se resuelven en el curso de ecuaciones diferenciales. Un modelo más realista, en que por ejemplo la fuerza de roce depende del cuadrado de la velocidad, convierte a la ecuación de movimiento en una ecuación diferencial no lineal, para la que el curso de ecuaciones diferenciales no brinda un método de solución.

La realidad con la que nos encontramos al final del cursado de la asignatura, es que muchos estudiantes desarrollan destrezas para la resolución de problemas debido a la ejercitación con situaciones similares, repetición de “recetas” dadas pero carentes de sentido o significado para ellos.

Además, se observa la dificultad que tienen los estudiantes para lograr incorporar durante el cursado clásico de la asignatura, el “determinismo” como un elemento esencial de la mecánica clásica. Es decir, comprender que el movimiento de una partícula queda determinado por la resultante de las fuerzas actuantes (consideración dinámica) y las condiciones iniciales o de borde (consideración cinemática).(Cassan y Massa, 2014).

Los métodos numéricos son una herramienta poderosa para resolver este tipo de problemas, y hemos investigado si es posible que los estudiantes, en el primer curso de física básica universitaria, tengan una primera aproximación a estos métodos que les permiten obtener de una manera simple y ayudados por una planilla de cálculo, las leyes de movimiento correspondientes a fuerzas no constantes

En cuanto a la actitud de los estudiantes en las clases tradicionales, es decir, con un docente en el frente del curso, presentan en su mayoría una actitud pasiva, en la cual parecería que sólo recibe información tanto en clases teóricas como en los momentos en que se resuelven problemas en el pizarrón, sin cuestionar al docente, o al menos no hacerlo en forma explícita. Abordar problemas más realistas e involucrarlos activamente en su resolución, puede contribuir a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

A partir de este análisis nos planteamos los siguientes objetivos a tener en cuenta en el diseño del instrumento a aplicar:

- Abordar desde la dinámica la descripción del movimiento de un cuerpo sobre el que actúan fuerzas variables.
- Introducir un método de diferencias finitas para determinar la ley de movimiento.
- Fomentar el desempeño efectivo de los estudiantes en grupos de trabajo.
- Organizar los datos y los cálculos en tablas utilizando una planilla de cálculo.
- Representar los resultados en gráficos. Se espera que el estudiante indique el título de cada gráfica y de las variables representadas en cada eje con sus correspondientes unidades, utilice períodos de tiempo que permitan observar la evolución del movimiento.
- Analizar en las representaciones gráficas el sentido físico del proceso que cada una de ellas describe.
- Reflexionar acerca del rol de las condiciones iniciales (posición y velocidad del cuerpo en instantes determinados) en la determinación del futuro estado de movimiento.
- Analizar la validez de la aproximación numérica aplicada.

B. Concepción y análisis *a priori* de situaciones didácticas

Repasaremos brevemente los aspectos principales de los métodos numéricos que pueden aplicarse para resolver las ecuaciones de movimiento. Consideremos un movimiento unidimensional, donde un cuerpo de masa $m$tiene una coordenada de posición x y una velocidad v, que van modificándose con el tiempo ($x = x(t)\ y\ v = v(t)$), y está sometido a una fuerza F que depende en general de la posición, de la velocidad y del tiempo ($F = F(x, v, t)$). La segunda ley de Newton se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(x,v,t)}{m},\ \frac{dx}{dt} = v. \qquad (1)$$

Integrando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores en un intervalo de tiempo Δt resulta

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{F(x(t'),v(t'),t\prime)}{m}\, dt', \;\; x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} v(t')\; dt'$$

Los distintos métodos de aproximación numérica para resolver las ecuaciones diferenciales dadas en (1), se basan en distintos modos de aproximar las integrales en las ecuaciones anteriores. Así, si se usa como aproximación de los integrandos el valor en el extremo inferior de la integral, se obtiene

$$v(t+\Delta t) \cong v(t) + \frac{F(x(t),v(t),t)}{m}\Delta t, \qquad x(t+\Delta t) \cong x(t) + v(t)\Delta t$$

Considerando entonces pequeños intervalos de tiempo Δt, y definiendo

$$x_n \equiv x(t_n),\;\; v_n \equiv v(t_n),\;\; t_n \equiv n\Delta t,\;\; n = 0,1,2,\ldots$$

se obtiene

$$v_{n+1} \cong v_n + \frac{F(x_n,v_n,t_n)}{m}\Delta t, \qquad\qquad x_{n+1} \cong x_n + v_n\Delta t \tag{2}$$

Esta aproximación para obtener la posición y la velocidad en función del tiempo se conoce como método de Euler.

A partir de conocer las condiciones iniciales $x_0 = x(t=0)$ y $v_0 = v(t=0)$, las ecuaciones anteriores con $n=0$ permiten obtener en forma aproximada los valores de la posición x_1 y la velocidad v_1, correspondientes al tiempo t_1. Aplicando nuevamente las ecuaciones anteriores con $n=1$, se obtienen los valores de la posición x_2 y la velocidad v_2 al tiempo t_2. Continuando con este proceso se pueden obtener los sucesivos valores de la posición y la velocidad.

Es interesante notar que las ecuaciones (2) también se pueden obtener directamente de las ecuaciones (1) que representan la segunda ley de Newton, aproximando en ellas las derivadas respecto al tiempo por cocientes incrementales, es decir $\frac{dv}{dt} \cong \frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}$ y $\frac{dx}{dt} \cong \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}$. Esta forma intuitiva de obtener las ecuaciones del método de Euler nos parece potencialmente útil para presentar el método a los alumnos.

Todo método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias debe satisfacer condiciones de *consistencia* y de *estabilidad* (Potter, 1973).

Un método numérico es *consistente* cuando al hacer el límite $\Delta t \to 0$, las ecuaciones del cálculo numérico se convierten en las ecuaciones diferenciales a resolver. Esto se cumple en el método de Euler que hemos presentado, ya que las ecuaciones numéricas se han obtenido a partir de las ecuaciones diferenciales sustituyendo las derivadas por cocientes incrementales.

Un método numérico se dice *estable* cuando una pequeña incerteza en cualquier etapa del cálculo produce incertezas más pequeñas para los tiempos posteriores. Para analizar la estabilidad del método de Euler aplicado a la resolución de la segunda ley de Newton, se deben considerar pequeñas incertezas Δx_n y Δv_n para la posición y la velocidad al tiempo t_n. Para estas pequeñas incertezas al tiempo t_n, las ecuaciones (2) permiten calcular, en primera aproximación, las incertezas al tiempo t_{n+1}. De ese cálculo resulta que si la fuerza F no depende de la velocidad el método de Euler no resulta estable y entonces no puede usarse para resolver la ecuación de movimiento en forma aproximada.

Resulta de interés analizar los siguientes casos en función de su posible aplicación a la enseñanza:

a) Oscilador armónico no amortiguado: en este caso $F = mg - kx$, siendo k la constante elástica del resorte. El método de Euler no es estable.
b) Caída en un medio viscoso: aquí $F = mg - Cv$, donde C es la constante de rozamiento del cuerpo con el medio. El método de Euler es estable para cualquier valor de Δt.
c) Oscilador armónico amortiguado: con $F = mg - kx - Cv$. El método de Euler resulta estable si se elige un intervalo de tiempo que cumpla la condición $\Delta t < \frac{C}{k}$ para$C^2 < 4km$.

Para los casos b y c asumimos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo en el medio consideradoy no tenemos en cuenta, en esta primera etapa, otros términos ya que la propuesta se presenta para un primer curso de mecánica.

Es una feliz coincidencia que en un modelo de movimiento que incluye rozamiento viscoso, más realista que el de la caída en el vacío, el método de Euler funcione adecuadamente.

Cuando el método de Euler no funciona deben usarse otras aproximaciones más elaboradas, que son estables, pero más complicadas algebraicamente. Richard Feynman, en sus *Lectures on Physics*, presenta el cálculo de la ley de movimiento de un planeta alrededor del Sol, pero utilizando un método numérico más complicado que el de Euler para garantizar la estabilidad (Feynman y otros, 1963).

Consideramos que el método de Euler puede resultar eficaz para que los estudiantes tengan un primer acercamiento al cálculo numérico aproximado de las leyes de movimiento. Puede presentarse de una manera intuitiva reemplazando en las ecuaciones de movimiento las derivadas por cocientes incrementales, para intervalos de tiempo pequeños, en las situaciones para las que el método resulta estable. Además, es simple de implementar en una planilla de cálculo, con la que los estudiantes ya habían trabajado en el cursillo de ingreso a la facultad.

En este sentido, se puede agregar que estos estudiantes, durante el primer semestre aprobaron Cálculo I y Álgebra y Geometría I, donde se presenta el concepto de derivada. En Física I se retoma este concepto aplicándolo a las definiciones de velocidad y aceleración instantáneas, haciendo énfasis en el tratamiento de derivada como límite de un cociente incremental. Al momento de implementar esta propuesta, los estudiantes habían rendido el primer parcial de la asignatura en el que se evaluaron los contenidos de cinemática y dinámica de la partícula. Cabe destacar que en el currículo de las mencionadas carreras se incluye el estudio de la solución de ecuaciones diferenciales en cursos posteriores. A partir de estas consideraciones se procedió al diseño de la propuesta didáctica.

C. Realización didáctica

La propuesta didáctica se aplicó en un curso de mecánica elemental (Física I) correspondiente al segundo semestre de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, convocando a los 55 estudiantes de una comisión.

Se destinó para la primera etapa de esta experiencia una clase de cuatro horas, comenzando con la presentación del tema y la descripción de algunas situaciones cotidianas. En la primera de ellas el docente tomó dos trozos de papel, y haciendo dos bollos de diferente tamaño los dejó caer desde la misma altura. Al observar que el tiempo transcurrido para llegar al piso es mayor en el de mayor tamaño, los estudiantes expresaron que al actuar la fuerza de rozamiento en la superficie del cuerporesulta mayor en el objeto de mayor tamaño. Esto dio lugar a comentarios sobre la importancia en el diseño aerodinámico de un automóvil o de un avión. El docente presentó una segunda situación en la que una persona sentada en el interior de un automóvil saca una mano por la ventanilla. Les solicitó a los estudiantes que analicen las fuerzas que actúan sobre la mano cuando el vehículo está en reposo y cuando está en movimiento, a lo cual respondieron en forma unánime que la fuerza que el aire ejerce sobre la mano parece insignificante cuando el movimiento se realiza a bajas velocidades, pero aumenta con el incremento de la velocidad. A partir de esto es posible concluir que esta fuerza de rozamiento con el aire depende de la velocidad del móvil, discutiendo luego lo que ocurre al caer una gota de lluvia, un paracaídas, una piedra o una pluma.

A continuación, el docente describió una forma de obtener una solución aproximada de la ecuación de movimiento en una dimensión, para el caso en el que actúa una fuerza variable. Se hizo una presentación muy simplificada del método numérico a utilizar, donde se planteó reemplazar en las ecuaciones de movimiento las derivadas por cocientes incrementales, de modo de obtener un algoritmo para calcular a partir de la posición y de la velocidad del cuerpo a un tiempo dado, la posición y la velocidad después de transcurrido un pequeño intervalo de tiempo. Con un intervalo de tiempo suficientemente pequeño se espera que el procedimiento numérico sea una buena aproximación para describir la caída del cuerpo.

Los problemas acerca de la convergencia y estabilidad del método no se abordaron en la presentación, advirtiendo a los estudiantes que en cursos posteriores de cálculo numérico discutirían la justificación más rigurosa de los métodos empleados.

Luego se presentó la situación diseñada para esta investigación: *analizar el movimiento de un objeto que se suelta desde el reposo, considerando el rozamiento con el aire*. Se planteó modelizar la acción del fluido sobre el cuerpo con una fuerza proporcional a la velocidad y opuesta al sentido del movimiento. A partir de la expresión matemática de las fuerzas intervinientes, se trabajó con la segunda ley de Newton para obtener las expresiones adecuadas que permitan aplicar el cálculo numérico. Se dedujeron las siguientes expresiones para calcular posición y velocidad del cuerpo en función del tiempo:

$$v_{n+1} \cong v_n + \left(g - \tfrac{c}{m} v_n\right)\Delta t, \quad x_{n+1} \cong x_n + v_n \Delta t \tag{3}$$

A continuación, se solicitó a los estudiantes que trabajen en grupos de dos o tres, entregándoles una guía de actividades en la que se pidió:

1. Diseñar en una planilla de cálculo una tabla de valores que permita calcular la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
2. A partir de los valores obtenidos graficar posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

3. Discutir cuándo es posible considerar un intervalo de tiempo (Δt) lo "suficientemente pequeño" para obtener resultados confiables utilizando la solución aproximada de la segunda ley de Newton.
4. Resolver la siguiente situación cuyos datos fueron tomados experimentalmente: se deja caer desde el reposo un cuerpo de 100 gramos y se mide la velocidad límite (velocidad a partir de la cual el movimiento es rectilíneo uniforme) siendo de 4 m/s. A partir de estos datos calcular la constante de rozamiento de dicho cuerpo con el aire (C) y la distancia recorrida hasta ese momento. Graficar nuevamente $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

Al final de la clase se les pidió que entreguen lo escrito y envíen por correo electrónico la planilla de cálculo con las tablas y gráficas acordadas, mientras que el trabajo definitivo sería entregado una semana después. Luego de la revisión de los trabajos entregados (informe y planilla de cálculo) se realizaron algunas entrevistas para complementar la información recogida, trabajar sobre sus dificultades como así también para que los estudiantes comenten sus impresiones generales sobre el trabajo.

D.Análisis *a posteriori* y evaluación

A partir del análisis de las actuaciones de los estudiantes y confrontando los objetivos de la propuesta didáctica con los resultados, es posible realizar las consideraciones que se expresan a continuación.

Todos los grupos pudieron plantear una propuesta para el movimiento indicado en la consigna a partir de ecuaciones y tablas de valores construidas con el apoyo de una planilla de cálculo, aplicando métodos numéricos. En este sentido los estudiantes determinaron valores para las variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) y construyeron gráficas que muestran la variación de dichas variables en función del tiempo, logrando verificar la tendencia de la velocidad a alcanzar un valor límite. Esto acuerda con el modelo discutido en clase para poner en evidencia que una caída "real", como la de un paracaídas o una gota de lluvia, casi nunca es un movimiento uniformemente acelerado. Si bien los estudiantes habían utilizado planillas de cálculo en el curso de ingreso, tuvieron algunas dificultades en las que fueron ayudados por los docentes y también por los alumnos que tenían más experiencia, evidenciándose un trabajo colaborativo. En la Figura 1 transcribimos los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo obtenidos por uno de los grupos.

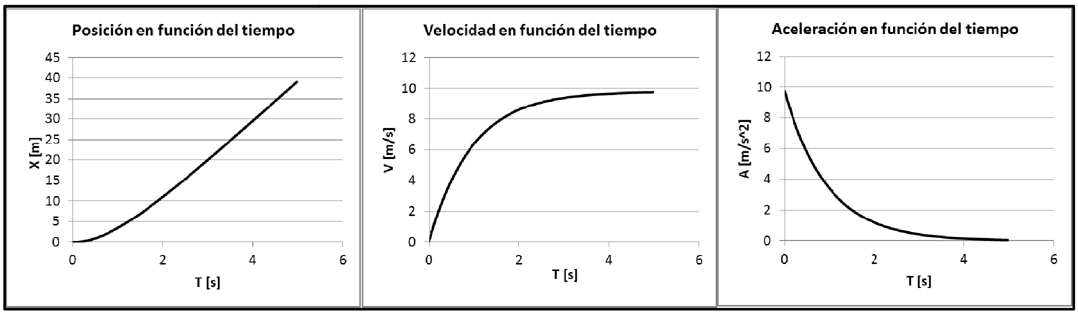

FIGURA 1. Graficas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo realizadas en el aula por el grupo 5. Datos: Δt=0,1s; g=9,8m/s2; m=1kg; C=1kg/s.

A continuación, se detallan los aspectos más significativos observados en los informes y en las entrevistas.

Todos los grupos realizaron gráficas con sus correspondientes títulos y unidades en cada eje; además, la mayoría adopta al graficar un período de tiempo adecuado que permite observar la evolución del fenómeno.

En la primera parte del encuentro se puso el énfasis en obtener la ley de movimiento de la caída, y en ella se dedujeron explícitamente las ecuaciones (3). Los alumnos organizaron sus planillas de cálculo usando precisamente estas dos ecuaciones, que determinan x_{n+1} y v_{n+1} en función de x_n y v_n. Pero en ellas "ya no se ven" las fuerzas ni la aceleración que se usaron precisamente para deducirlas. Notamos que cuando en el punto 2 de la guía se pide encontrar la aceleración en función del tiempo, son pocos los grupos que la identifican con el término $\left(g - \frac{C}{m}v_n\right)$ de la ecuación (3). La mayoría se complicó innecesariamente calculando $\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}$, a partir de las tablas de velocidad en función del tiempo, y otros, erróneamente, calcularon $a_n = \frac{v_n}{t_n}$.

El error de mayor recurrencia fue indicar que la aceleración inicial es nula. En una primerareflexión entre el grupo de investigadores, consideramos posible que esto se deba a que no reconocen que el movimiento comienza cuando ya se ha dejado caer el objeto. Por ejemplo el grupo 9 eligió como condiciones iniciales$x_0 = 0$, $v_0 = 0$ y también $a_0 = 0$, pero al utilizar la ecuación $a_n = \left(g - \frac{c}{m}v_n\right)$ para el cálculo de los siguientes valores de la aceleración, estacambia bruscamente del valor inicial cero al valor$a_1 = g$ y a continuación va decreciendo a medida que aumenta la velocidad (ver Figura 2). En la entrevista se les pidió que dieran razones de por qué eligieron $a_0 = 0$, y respondieron que "…*todo sería cero hasta que empieza a caer*…". Al preguntarles desde cuándo empiezan a estudiar el movimiento, uno respondió "*ni bien lo soltás*". Les solicitamos que hagan el diagrama de cuerpo libre del objeto, entonces dibujaron la fuerza peso y la fuerza de roce, uno de los estudiantes dijo "*para $t = 0$ la fuerza de roce sería cero*" y el otro acotó "*claro, no tenés velocidad, no tenés fuerza de roce*", dándose cuenta que la única fuerza que actúa en ese instante inicial es el peso de modo que lo correcto es que $a_0 = g$.

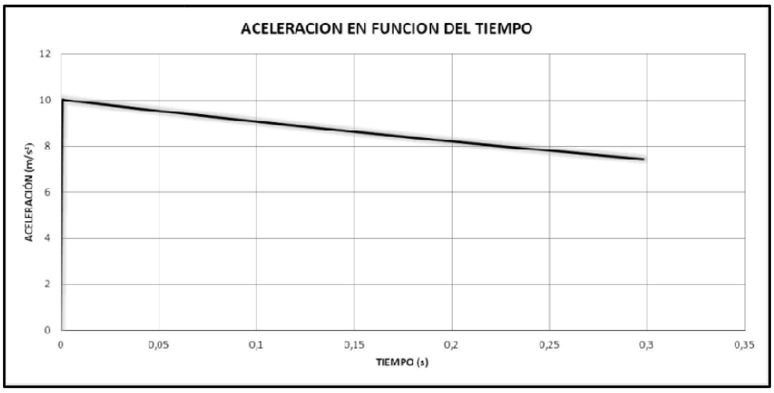

FIGURA 2: Grafica de aceleración en función del tiempo realizadas en el aula por el grupo 1. Datos: Δt=0,01s; g=9,8m/s^2; m=1kg; C=1kg/s

El punto 3 de la guía fue diseñado para que los estudiantes explorasen cómo resultan las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo, para distintas elecciones de Δt.A partir de ello deberíanhaber determinado el máximo valor de ese intervalo para el que se obtiene una aproximación razonable, es decir, el que garantiza una buena aproximación con el mínimo gasto de recursos de cálculo. Solo 4 de los 19 grupos lo hacen relacionado con la búsqueda del resultado más confiable, por ej., el grupo 1 expresa:

> …*al dar valores de Δt cada vez más pequeños obtenemos que los resultados sean más confiables y precisos. También notamos que al utilizar $\Delta t = 0{,}01s$ y $\Delta t = 0{,}001s$ las gráficas son similares, es decir, que podríamos elegir uno de ellos como el intervalo de tiempo adecuado. Además, realizamos una tabla con $\Delta t = 1s$ para observar que al utilizar un Δt grande, no son para nada precisos los resultados que se obtienen.*

Pareciera que la forma que se dio a dicha consigna no logró transmitir esta idea a todos los estudiantes, o quizás fue inadecuado tratar de involucrar a los alumnos en este análisis cuando recién habían logrado construir un primer programa de cálculo. A continuación, se transcriben algunas respuestas que ilustran las dificultades encontradas. El grupo 3 expresó

> *A medida que el intervalo de tiempo es más pequeño, necesitamos estirar la columna de valores obteniendo más de los mismos para poder observar los cambios en las curvas de las tres gráficas. Sin embargo, optamos por agrandar el intervalo de tiempo en vez de buscar más valores…*

Este grupo priorizó minimizar el tiempo de procesamiento del programa a obtener mayor precisión en los resultados. El grupo 7 expresó "…*con un Δt mayor la velocidad se va a hacer constante mucho más rápido*…" sin advertir que con mayores Δte igual número de intervalos de tiempo considerados se consigue describir el movimiento en un período de tiempo más grande. En estos dos casos hay una confusión entre número de iteraciones del método numérico y tiempo transcurrido.

Más allá de los objetivos para los cuales fue diseñada la propuesta,se pudieron detectar y atender algunas cuestiones relacionadas con una incorrecta conceptualización de aspectos de cinemática y dinámica. Por ejemplo, las dificultades mostradas por el grupo 8 se asociaron con las expresiones que utilizaron para obtener x_n y v_n, usando en ellas el tiempo t_n en vez del intervalo Δt. Más importante es que al describir la aceleración del cuerpo que cae en función del tiempo, le asignaron el valor constante g de la aceleración gravitatoria. Estos errores fueron abordados en la entrevista de los investigadores con el grupo, y subsanados en el informe final.

IV. CONSIDERACIONES FINALES

En general, consultados los estudiantes sobre las dificultades que habían tenido al realizar la experiencia, mayoritariamente surgieron los problemas con la utilización de la planilla de cálculo, los que fueron salvados rápidamente. Un grupo expresó:"*este trabajo nos permitió observar los detalles del movimiento*", y varios destacaron haber podido trabajar con un "*caso real*".

El cálculo numérico brinda herramientas aproximadas pero poderosas para la solución de este tipo de problemas y el trabajo muestra que los estudiantes de mecánica elemental pueden aplicarlos con experiencias sencillas deduciendo un algoritmo de cálculo a partir del método de Euler. Trabajando en grupos, todos pudieron organizar una planilla de cálculo para obtener posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para la caída de un cuerpo en un medio viscoso, corroborando que la velocidad no crece indefinidamente, como en el movimiento uniformemente acelerado, sino que tiende a hacerse constante. A pesar de estos logros alcanzados, la mayoría de los estudiantes no detectó que al trabajar con una discretización temporal, los resultados obtenidos son más confiables cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo. Posiblemente esto se deba a que la situación propuesta es estable para cualquier elección del intervalo de tiempo, de modo tal que distintas discretizaciones no producen resultados fuera de lo físicamente esperable para este tipo de movimiento. Ante esta situación, se propuso a los estudiantes un segundo trabajo práctico paraobtener, mediante una aproximación numérica, la ley de movimiento de un oscilador amortiguado. Aquí la estabilidad del método impone una cota superior al intervalo de tiempo elegido, por lo que el modelo matemático construido para la resolución de esta situación problemática arroja resultados fuera de la lógica del movimiento si se utilizan intervalos de tiempo demasiados grandes. Consideramos que esto llevará a discutir el significado del término *Δt pequeño* o *Δt tendiendo a cero*, y que se podrá profundizar en el aula acerca del proceso de modelización, mostrando que la validez de los resultados o predicciones realizadas sobre el sistema en estudio está limitada por la validez del modelo construido. Al momento de redactar este trabajo, los estudiantes están comenzando a entregar los informes del segundo práctico propuesto, que será motivo de una investigación posterior a fin de avanzar en otros aspectos de interés.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3),281–308.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá:Grupo Editorial Iberoamérica.

Bedford, A. y Fowler, W. (1996). *Mecánica para ingeniería. Dinámica*. México: Addison Wesley.

Buzzo Garrao, R. (2007). Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la física. *Latin American Journal of Physics Education*, 1(1),19-23.

Cassan R. y Massa M. (2014). Deduciendo movimientos: un estudio del procesamiento de enunciados condicionales por estudiantes universitarios.*Revista de Enseñanza de la Física*, 26(Extra),41-52.

Feynman, R., Leighton, R. y Sands, M. (1963). *The Feynman Lectures on Physics, Volume I.* Reading Massachusetts: AddisonWesley.

Laura, R. (2004). Una introducción a los modelos deterministas y estocásticos. *Revista de Enseñanza de la Física*, 17(5),74-84.

Potter,D. (1973). *Computational Physics*. Chichester:John Wiley & Sons.