

La energía y su conservación como eje estructurante para la comprensión de fenómenos electromagnéticos

Energy and its conservation as a structuring axis for the comprehension of electromagnetic phenomena

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

Patricia Fernández¹, Ignacio Tabares¹ y Alberto Jardon¹

¹Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, CP 2000, Rosario. Argentina.

E-mail: patricia@fceia.unr.edu.ar

Resumen

La energía y su principio de conservación es un concepto articulador en la física, y está presente en la enseñanza de todas sus áreas, pero mientras en algunas, como en mecánica o termodinámica, se presenta de modo integrado, en electromagnetismo su presentación es fragmentada e incompleta. En este trabajo proponemos una secuencia didáctica para el nivel universitario básico, que rescata el teorema de Poynting como expresión del principio de conservación de la energía en electromagnetismo para dar cuenta de los procesos energéticos que involucran tanto circuitos eléctricos como interacciones entre campos eléctricos y magnéticos. Esta secuencia viene siendo implementada desde hace varios años en un curso básico de electromagnetismo para carreras de ingeniería y responde al reclamo de numerosos autores que señalan la ausencia de la discusión de la interacción entre los campos electromagnéticos en circuitos eléctricos y de los procesos de transferencia de energía entre fuente y dispositivos.

Palabras clave: Teorema de Poynting; Conservación de la energía en electromagnetismo; Procesos de transferencia de energía; Potencia trasferida por campos electromagnéticos; Enseñanza de electromagnetismo.

Abstract

Energy and its conservation law is an articulating concept in physics, and it is present in the teaching of all of its areas, but while in some of them, such as mechanics or thermodynamics, it is presented in an integrated way, in electromagnetism it is presented in a fragmented and incomplete manner. In this paper we propose a didactic sequence for basic university level, which resurfaces the Poynting theorem as an expression of energy's conservation law in electromagnetism, to account for the energy processes that involve electric circuits as well as interactions between electric and magnetic fields. This sequence has been implemented for several years in a basic electromagnetism course in engineering and answers many authors' claims that point out the absence of a discussion about the interactions between electromagnetic fields in electric circuits and the energy transfer processes between source and devices.

Keywords: Poynting theorem; Energy conservation in electromagnetism; Energy transfer processes; Power transfer through electromagnetic fields; Teaching of electromagnetism.

I. INTRODUCCIÓN

El principio de conservación de la energía es un eje vertebrador de toda la física y por tal motivo se encuentra presente en la enseñanza de todas sus áreas. En mecánica el teorema del trabajo y la energía explica las variaciones de energía total de un sistema debido a la acción de fuerzas no conservativas siendo el trabajo de estas fuerzas quien da cuenta de los posibles aumentos o disminuciones de la energía del sistema. Desde otro punto de vista, el primer principio de la termodinámica describe las variaciones en la energía interna de un sistema cuando interacciona e intercambia energía con el medio ya sea a través de trabajo mecánico o en forma de calor. Así, tanto en la enseñanza de mecánica como en la de termodinámica, la conservación de la energía rige todas las interacciones permitiendo obtener el balance de la energía intercambiada por el sistema y su medio.

En el caso de la enseñanza de electromagnetismo, si bien no está ausente el análisis de la energía, el enfoque resulta fragmentado, incompleto, e incluso a veces incorrecto, ya que no se establecen vínculos explícitos entre las diferentes instancias de presentación. Así, se presenta inicialmente la variación de

energía potencial eléctrica de una carga puntual que se mueve en un campo eléctrico sin considerar la conversión de energía asociada (Fernández y otros, 2015), y más adelante, la energía almacenada en un capacitor o en un inductor, la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético por unidad de volumen, la energía disipada por una resistencia, la generada por una fuente, y finalmente la transmitida por una onda electromagnética, etc., tal como se desprende de las presentaciones más usuales en los libros de nivel universitario básico tales como Serway y Jewet (2009), Tipler y Mosca (2010) o Resnick y otros (2001), entre otros. A diferencia de la mecánica y la termodinámica, no hay una discusión integral de los intercambios energéticos entre el sistema y su medio. Este tratamiento resulta en una visión fragmentada del electromagnetismo en la que el principio de conservación de la energía está ausente al no considerar, salvo en ocasiones puntuales, la interacción entre los campos y los dispositivos.

En este sentido, diversas investigaciones vienen advirtiendo sobre las explicaciones erróneas que se dan en la enseñanza de circuitos al ignorar los efectos de los campos eléctricos y magnéticos en el mecanismo de transferencia de energía desde la fuente a resistores, inductancias, capacitores, etc. (Chabay y Sherwood, 2006; Galili y Gohibarg, 2005; Sherwood y Chabay, 1999; Welti, 2005). Según estos autores, intentar explicar la transferencia de energía por medio de los electrones de conducción tiene varias inconsistencias, entre ellas la velocidad de deriva de los electrones es muy lenta (del orden de mm/s) para dar cuenta del encendido casi instantáneo de una lámpara. Esto se complica aún más si se trata de un circuito de corriente alterna donde los electrones oscilan alrededor de una posición fija y no se desplazan, ¿cómo llega entonces la energía a la lámpara? Otra de las inconsistencias advertida es que si bien la energía transferida en un circuito es un proceso unidireccional de la batería a la lámpara, la corriente circula en un lazo cerrado, entonces, si los electrones vuelven a la batería, ¿por qué no llevan energía a la misma? Finalmente, una explicación *ad hoc* para tratar de salvar la situación, es que los electrones mantienen la energía cinética pero disminuyen la potencial, esto no es correcto ya que la energía potencial no debe atribuirse únicamente al electrón sino al del sistema en su totalidad, en el ejemplo gravitatorio cuando se eleva un cuerpo no aumenta su energía potencial gravitatoria en forma aislada sino la del sistema Tierra-cuerpo (Matar y Welti, 2010; Sefton, 2002).

Los autores que tratan estos temas insisten en la necesidad de considerar el efecto de los campos electromagnéticos en las transferencias de energía y lo resumen en dos ideas básicas que deben estar presentes en la enseñanza: la primera es que el campo eléctrico y el magnético almacenan energía y la segunda es que ambos campos en interacción son responsables de su transmisión.

Los procesos que involucran intercambios energéticos, no escapan al principio de conservación de la energía, sea cual sea la rama de la física que los describa. En el electromagnetismo es el *teorema de Poynting* quien da cuenta de los intercambios de energía en presencia de campos. A partir del mismo, resulta útil definir el *vector de Poynting* como una herramienta para el cálculo de la energía electromagnética transferida por unidad de tiempo entre un sistema y su medio.

En la enseñanza tradicional del electromagnetismo no se presenta el *Teorema de Poynting* sino sólo el *vector de Poynting* al final del cursado, descontextualizado de los circuitos y reducido a la explicación de la propagación de energía en las ondas electromagnéticas. En este trabajo proponemos una presentación más temprana del *teorema de Poynting* a partir de la discusión del principio de conservación de la energía, para dar cuenta de la totalidad de los intercambios energéticos vinculados al electromagnetismo.

A continuación describimos sintéticamente las diferentes situaciones en que aparece el tema *energía* en electromagnetismo y cómo se presenta tradicionalmente del *vector de Poynting*; y en secciones siguientes, proponemos una presentación alternativa del tema y discutimos dos ejemplos de aplicación.

II. LA ENERGÍA DE LOS CAMPOS Y LA ENERGÍA EN LOS CIRCUITOS EN LOS CURSOS INTRODUCTORIOS DE ELECTROMAGNETISMO

En los libros de electromagnetismo de nivel universitario básico, suele introducirse en el inicio del curso la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico luego de calcular el trabajo de la fuerza eléctrica y demostrar que la misma es conservativa. A partir de esto se deducen relaciones entre campo y potencial y algunas consecuencias como que el campo dentro de un conductor es nulo y el potencial es constante.

En el caso del campo magnético, se alude a la energía cuando se presenta la ley de Faraday-Lenz. En este punto, la mayoría de los textos justifican el signo negativo en la ley de Lenz diciendo que en caso contrario se generaría energía infinitamente, como puede verse en Serway (2013) o Young y Freedman (2009) entre otros libros de texto del mismo nivel, pero no se analiza formalmente la energía de los campos, eléctrico y magnético, presentes.

Cuando se analizan los circuitos en corriente continua, la bibliografía tradicional de nivel universitario básico presenta las leyes de Ohm, Kirchoff y Joule en forma inconexa con temas desarrollados en los otros capítulos de electromagnetismo. Así, se presentan conductores (resistivos) entre cuyos extremos

existe una diferencia de potencial que es necesaria para la circulación de corriente, sin relación con afirmaciones hechas en electrostática, como que el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo y el potencial constante. En este caso, se dice que la energía que proporciona la fuente a través de la corriente se disipa en la resistencia en forma de calor por efecto Joule. No se discute la presencia de campos magnéticos, pese a que en el mismo curso se resalta el rol de las corrientes como fuentes de esos campos.

En la descripción de un circuito RC se afirma también que la fuente proporciona energía al circuito generando la corriente necesaria para que las cargas eléctricas lleguen a las placas del capacitor y, por lo tanto, se establezca un campo eléctrico en su interior. Se calcula incluso la energía almacenada en el capacitor y la densidad de energía asociada al campo eléctrico. No se discute la posible presencia de campos magnéticos mientras el capacitor se carga ni tampoco, en consecuencia, la energía asociada a dicho campo. Tampoco se discuten cuestiones de energía cuando se presenta ley de Ampere Maxwell que relaciona la presencia de campos eléctricos y magnéticos.

Algo similar sucede cuando se analiza el comportamiento de un circuito RL. Se dice que al cerrarse un interruptor, la corriente no se establece instantáneamente ya que la energía proporcionada por la fuente en parte se almacena en el campo magnético en el interior de la inductancia y en parte se disipa en la resistencia. Se calcula la energía almacenada en el inductor y la densidad de energía asociada al campo magnético, pero no se tiene en cuenta el campo eléctrico que generan las corrientes o el inducido por los campos magnéticos variables.

En los circuitos LC suele señalarse en forma cualitativa la transferencia de energía entre inductancias y capacitores en forma análoga a la descripción del comportamiento mecánico de un sistema masa resorte en el que se dice que la energía elástica del resorte se convierte en energía cinética y viceversa en ausencia de roce. En un circuito RLC se suma al análisis de la energía la pérdida por efecto Joule.

Resumiendo, se analiza la presencia de campos eléctricos y magnéticos y las respectivas energías asociadas, pero no se profundiza en el hecho de que al estar estos campos relacionados, son capaces de *transmitir* energía y posibilitar *intercambios* con la materia.

En el caso de los circuitos eléctricos, el concepto de la energía poco tiene que ver con las representaciones construidas en electrostática o con las que se presentan en ondas electromagnéticas. Es necesario un tratamiento más general de los procesos de transferencia de energía que permita analizar e integrar diferentes situaciones en un mismo marco conceptual: el de la conservación de la energía. El *teorema de Poynting* expresa dicha conservación en el electromagnetismo y resulta ser una herramienta que brinda un procedimiento sistemático para el estudio de la transferencia de energía en situaciones generales.

III. EL VECTOR DE POYNTING. PRESENTACIÓN TRADICIONAL

Los libros de textos de electromagnetismo de nivel universitario básico, presentan el *vector de Poynting* después de haber discutido la propagación de las ondas electromagnéticas. En estos casos, los campos son dependientes del tiempo y cumplen simultáneamente las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de las ondas.

Las presentaciones más frecuentes responden a dos modalidades:

a. Se define el vector $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$ explicando sus propiedades e interpretándolo como la intensidad de energía que propaga una onda electromagnética (Halliday y otros, 2011, pp. 897; Young y Freedman, 2009, pp. 1107); Bauer y Westfall, 2011, pp. 1004).

b. Se afirma que la energía por unidad de volumen de una onda electromagnética es la asociada los campos eléctricos y magnéticos presentes y operando matemáticamente se deduce una expresión para la intensidad de la onda. El *vector de Poynting* se define para este caso particular (Alonso y Finn, 1970, pp. 748; Tipler y Mosca, 2010, pp. 1045; Giancoli, 2009, pp. 826).

En ambos casos, el *vector de Poynting* es un vector cuyo módulo es igual a la intensidad de la onda (energía por unidad de tiempo y de superficie) y su dirección la de la propagación de la misma. A partir de dicha expresión puede calcularse la potencia emitida por una fuente, o recibida por una antena como:

$$P = \iint_A \vec{S} \cdot \vec{dA} = \int_A \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \cdot \vec{dA} \quad (1)$$

En estas presentaciones el *vector de Poynting* aparece como una magnitud vinculada a la energía de las ondas electromagnéticas y por lo tanto definida bajo una serie de supuestos que no siempre se explicitan:

- i) los campos eléctricos y magnéticos varían en el tiempo y cumplen la ecuación de las ondas.
- ii) los campos están en fase y relacionados a la través de la velocidad de propagación de la onda como $E = cB$
- iii) sus direcciones y la dirección de propagación de la onda son perpendiculares y siguen la regla de la mano derecha: $\vec{E} \wedge \vec{B} \propto \vec{k}$, donde (\vec{k} : *vector de onda*).
- iv) la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio se relacionan a través de la velocidad de propagación de la onda de manera que: $c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$
- v) las cantidades de energía por unidad de volumen transportadas por el campo eléctrico y el magnético (las densidades de energía) son iguales: $u_e = u_m = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{B^2}{2\mu}$

Se afirma que el *vector de Poynting* indica la dirección en que la onda propaga energía y que permite calcular el flujo de energía que atraviesa un área determinada por unidad de tiempo. Sin embargo, existen otras situaciones que involucran procesos de transferencia de energía en las que los campos eléctricos y magnéticos no se propagan como ondas, es el caso de los campos estacionarios, por ejemplo, presentes en algunos circuitos eléctricos. Llama la atención que algunos autores, luego de definir el *vector de Poynting* para las ondas electromagnéticas, proponen la resolución de problemas en regímenes estacionarios (Serway y Jewett, 2009; Young y Freedman, 2009; Tipler y Mosca, 2010). En estos casos, la definición del *vector de Poynting* a partir del comportamiento ondulatorio de los campos electromagnéticos resulta, al menos, incompleta.

Por otro lado, vincular el *vector de Poynting* únicamente a las energías de los campos E y B no permite analizar la conservación de la energía en forma general, ya que la energía del campo electromagnético en una cierta región fija del espacio no se conserva cuando la materia realiza algún trabajo sobre el campo o el campo sobre la materia como en el caso de fuentes y dispositivos presentes en un circuito eléctrico (Feynman y otros, 1998; Romer, 1982). Es decir, la definición del *vector de Poynting* dada en los libros de textos tradicionales sólo es válida en ausencia de las cargas y las corrientes, fuentes de los campos.

A continuación proponemos una alternativa didáctica basada en el planteo del principio de conservación de la energía, para evaluar balances energéticos que involucran campos eléctricos, magnéticos, corrientes eléctricas, fuentes y componentes de circuitos (resistores, capacitores e inductancias en general) en una región del espacio arbitraria fija, y que tiene en cuenta la energía por unidad de tiempo que gana o pierde dicha región. Desde esta perspectiva, el *teorema de Poynting* se constituye en la expresión del principio de conservación de la energía en el electromagnetismo.

IV. UNA ALTERNATIVA DE PRESENTACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN ELECTROMAGNETISMO

La alternativa que se propone supone el desarrollo previo de nociones de electromagnetismo básico (nivel universitario) y se ubica al terminar el tratamiento de los circuitos eléctricos y las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. No se necesitan nociones de ondas y puede prescindirse del desarrollo de propiedades eléctricas y magnéticas de la materia, si bien se incluyen en esta presentación.

Esta propuesta viene siendo implementada desde hace dos años en una de las comisiones de Física III (Electromagnetismo) que se dicta para las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR. El tiempo destinado es de cuatro horas reloj que incluyen desarrollo teórico y práctica. La metodología es de tipo mixto y combina una presentación inicial del profesor y trabajo individual/grupal en modalidad taller guiado y trabajo colaborativo en las instancias de desarrollo de deducciones matemáticas y resolución de problemas por parte de los alumnos.

A. Desarrollo

El *teorema de Poynting* es la expresión del principio de conservación de la energía para el electromagnetismo. Expresa que el balance de energía en cierta región del espacio debe ser nulo, es decir, dado un volumen V , fijo y arbitrario, que puede o no contener elementos materiales, la energía por unidad de tiempo que *sale* debe ser igual a la que *ingresa*. A diferencia de la mecánica, en electromagnetismo es más conveniente hablar de la energía por unidad de tiempo, o sea la potencia considerada en cada caso ya que estudiaremos casos dinámicos en que nuestros sistemas pierden o incrementan su energía en forma continua.

Imaginemos un volumen V delimitado por una superficie S que puede ser parte de un circuito mayor y en el que puede haber fuentes, resistencias, capacitores, inductancias, y otros elementos cuyas funciones en relación a los procesos energéticos pueden resumirse en estos cuatro componentes básicos (figura 1).

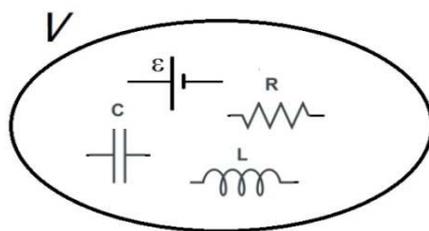


FIGURA 1. En un volumen arbitrario V delimitado por una superficie S pueden encontrarse fuentes, resistencias, capacitores, etc.

Así, una fuente o generador representa la conversión de energía de cualquier naturaleza en energía eléctrica, una resistencia introduce procesos disipativos, un capacitor representa el almacenamiento de energía en campos eléctricos y una inductancia el almacenamiento de energía en campos magnéticos. En el balance de energía, cualquier diferencia se deberá a un flujo de energía que entra o sale del volumen considerado.

$$P_{\text{generador}} + P_{\text{resistores}} + P_{\text{campo eléctrico}} + P_{\text{campo magnético}} + P_S = 0 \quad (2)$$

Esta es la expresión del *teorema de Poynting* y resulta ser el principio de conservación de la energía para el electromagnetismo, donde:

$P_{\text{generador}}$ es la potencia producida en el generador, se trata de una conversión de energía de algún tipo en eléctrica en el caso de una fuente o viceversa en el caso de un acumulador. Es energía que ingresa o sale del sistema según el caso.

$P_{\text{resistores}}$ es una potencia disipada o consumida, se trata de una conversión de energía eléctrica en otro tipo y siempre representa una salida de energía del volumen en estudio, en forma de calor o de trabajo mecánico (en caso de simbolizar un motor, por ejemplo).

$P_{\text{campo eléctrico}}$ es la energía por unidad de tiempo (potencia) almacenada en el campo eléctrico, sea o no estacionario, entre las placas del capacitor, en el vacío, etc.,.

$P_{\text{campo magnético}}$ es la energía por unidad de tiempo (potencia) almacenada en el campo magnético, sea o no estacionario, en el interior de la bobina, en el vacío, etc.,.

P_S es la energía por unidad de tiempo (potencia) que entra o que sale del volumen V delimitado por el área A y que, este caso, nos interesa calcular.

Expresemos cada una de estas magnitudes a partir de lo que ya sabemos de circuitos eléctricos.

A.1. Potencia asociada a presencia de corrientes

Los procesos de conversión de energía eléctrica que se dan en generadores y resistencias suponen la circulación de corrientes, o sea el movimiento de cargas en campos eléctricos. En la mecánica representarían interacciones debidas a fuerzas no conservativas que implican procesos disipativos o trabajos externos sobre el sistema.

Para una carga en movimiento la potencia desarrollada cuando se mueve en un campo electromagnético bajo la acción de la fuerza de Lorentz es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

Para un volumen V que contiene $n \cdot dV$ partículas cargadas (siendo n el número de partículas por unidad de volumen), la potencia desarrollada cuando las mismas se mueven en el sentido del campo eléctrico resulta:

$$P_{\text{Resistores/fuentes}} = \int dP = \int_V n q \vec{v} \cdot \vec{E} \, dV = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV \quad (4)$$

En el caso de los conductores con resistividad las cargas se mueven en la dirección del campo eléctrico y la potencia en juego es siempre positiva. En un generador, las cargas se mueven en sentido opuesto al campo eléctrico, es decir del borne negativo al positivo, resultando una potencia de signo opuesto.

A.2. Energía de los campos eléctrico y magnético

La energía U_E almacenada en el campo eléctrico entre las placas de un capacitor es:

$$U_E = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \tag{5}$$

Y la potencia en juego, es decir la energía que se almacena en el campo eléctrico por unidad de tiempo en dicho volumen V , resulta:

$$P_{campo\ eléctrico} = \frac{dU}{dt} = \int_V \frac{\partial u_C}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial(\frac{1}{2}\epsilon E^2)}{\partial t} dV = \int_V E \frac{\partial D}{\partial t} dV \tag{6}$$

De igual forma, la energía U_B almacenada en el campo magnético en el inductor es:

$$U_B = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV \tag{7}$$

Y la potencia en juego, es decir la energía que se almacena por unidad de tiempo en el campo magnético en dicho volumen V resulta:

$$P_{campo\ magnético} = \frac{dU}{dt} = \int_V \frac{\partial u_B}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial(\frac{1}{2}\mu H^2)}{\partial t} dV = \int_V H \frac{\partial B}{\partial t} dV \tag{8}$$

Así, el principio de conservación de la energía expresado en la ec.(2), es decir balance de energía, en el volumen V queda:

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + P_S = 0 \tag{9}$$

Donde el primer término representa las conversiones de energía que ocurren en fuentes y resistencias, el segundo el almacenamiento de energía en los campos eléctrico y magnético, y el tercero la energía que entra o sale del volumen V . Deduiremos una expresión para este término.

Comencemos analizando el primer término. Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell $\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ podemos reemplazar la densidad de corriente \vec{j} y utilizando la identidad $\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b})$ donde \vec{a} representa a \vec{E} y \vec{b} a \vec{H} , resulta:

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = \int_V \left[\vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] dV \tag{10}$$

Recordando nuevamente las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, obtenemos:

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = - \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV - \int_V \left(\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) \right) dV = 0 \tag{11}$$

Reemplazando en (9) y aplicando el teorema de la divergencia llegamos a que la potencia que entra o sale del volumen V es:

$$P_S = \int_V \left(\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) \right) dV = \int_A (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dA} = \int_A \vec{S} \cdot \vec{dA} \tag{12}$$

En la expresión (12), \vec{S} resulta ser un vector perpendicular a los campos eléctricos y magnéticos al que se denomina *vector de Poynting*. La ec. (9) finalmente resulta:

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + \int_A (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dA} = 0 \tag{13}$$

Nota: Si bien las unidades del *vector de Poynting* son energía por unidad de tiempo y de superficie, algunos autores consideran que no debe interpretarse dicho vector como una energía que fluye a través de cada unidad de superficie (Reitz y Mildford, 1969). Es el flujo de este vector quien representa la potencia que se intercambia a través de toda la superficie que delimita el volumen V . Por otro lado, el *vector de Poynting* conlleva cierta ambigüedad ya que no estaría unívocamente definido salvo un término de divergencia nula y por lo tanto, de interpretarse así, habría infinitas energías viajando por unidad de tiempo y de superficie (Feynman y otros, 1998; Romer, 1982).

V. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A. Ejemplo 1: circuito resistivo simple

Consideremos un circuito simple compuesto por un resistor conectado a una batería. Podemos estudiar el balance de energía en una región que encierre a la resistencia, o a la fuente o que incluya a ambas. En este caso, elegimos un volumen V que encierra sólo la resistencia (figura 2) y analizaremos el balance de energía a través de la superficie A que delimita el volumen V elegido.

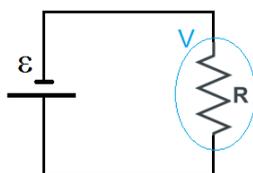


FIGURA 2: Circuito resistivo simple y volumen V elegido para analizar el balance de potencia.

En el circuito en estudio las corrientes son estacionarias, los campos eléctricos y magnéticos son constantes y por lo tanto no varía la energía de los mismos. La ec. (2) queda entonces $P_{resistores} + P_S = 0$, y la ec (13) resulta:

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \int_A \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (14)$$

El primer término representa la energía por unidad de tiempo que proporciona la fuente y que normalmente decimos que se disipa en la resistencia. Consideremos la resistencia como una porción de conductor de longitud l , sección circular de radio a y resistividad ρ (figura 3, izq.).

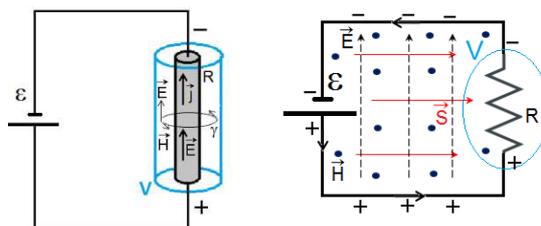


FIGURA 3. Izq.: La resistencia dentro del volumen V puede modelarse como una porción de conductor de longitud l , sección circular de radio a y resistividad ρ . Der.: Direcciones y sentidos del campo eléctrico \vec{E} , campo magnetizante \vec{H} , y del *vector de Poynting* \vec{S} , indicando la potencia que ingresa al volumen V .

Para un volumen interior de radio $r < a$ el primer término de la ec. (14) resulta:

$$P_R = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \rho j^2 V = \rho j^2 \pi r^2 l = R I^2 \frac{\pi r^2}{A} \quad (15)$$

y para el caso de considerar todo el conductor ($r \geq a$), resulta en la expresión conocida:

$$P_R = R I^2 \quad (16)$$

Este valor es siempre positivo, ya que en un resistor la corriente fluye en el sentido del campo eléctrico, y representa la energía que pierde el volumen V, en este caso por efecto Joule.

Calculemos ahora el segundo término de la ecuación (14) que representa la energía que entra o sale del volumen V.

$$P_S = \int_A \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \vec{dA} = -\rho j \cdot \frac{j\pi r^2}{2\pi r} \cdot 2\pi r l = -\rho j^2 V = -RI^2 \frac{\pi r^2}{A} \quad (17)$$

El resultado de la expresión (17) es negativo e indica un aumento de la energía en el volumen V, o flujo de energía que *entra* al mismo (figura 3, der.).

Las expresiones (15) y (17) muestran que la energía que disipa la resistencia, proviene del campo eléctrico responsable de las corrientes y del campo magnético generado por dichas corrientes y que la interacción entre estos campos hace posible la transferencia de energía que se transforma en calor por efecto Joule.

Observación: un estudio más riguroso tiene en cuenta que el campo eléctrico en el resistor no es estrictamente longitudinal dando como resultado un vector de Poynting que no ingresa normalmente al volumen V. En este punto es importante volver a destacar que no debe identificarse el vector de Poynting con la dirección de ingreso de energía al volumen V y que sólo tiene sentido interpretar su flujo a través de la superficie completa como la cantidad de energía que gana o pierde el volumen V.

B. Ejemplo 2: circuito RL

Consideremos un inductor largo de longitud Δl y sección circular A conectado a un circuito cualquiera mediante un interruptor que se cierra en $t=0$ (figura 4 Izq.). Supongamos sólo efectos inductivos y que el material del inductor es un conductor perfecto, por lo tanto el campo eléctrico en el material es nulo y entonces según la ec. 2 resulta $P_{campo\ magnético} + P_S = 0$ y en forma detallada la ec. (13) queda:

$$\int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV + \int_A \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \vec{dA} = 0 \quad (18)$$

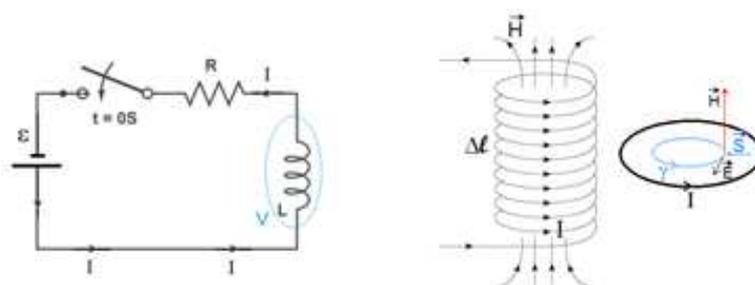


FIGURA 4. Izq.: En un circuito cualquiera se selecciona un volumen V que encierra sólo la inductancia. Der.: Direcciones y sentidos del campo magnetizante **H**, campo eléctrico **E**, y del *vector de Poynting S* indicando la potencia que ingresa al volumen V.

El primer término de la ec. (18) representa la energía por unidad de tiempo o potencia que almacena el inductor en el campo magnético interior. Luego de transcurrido un tiempo t esta energía será $1/2LI^2$ y puede calcularse teniendo en cuenta que $B = \mu H$ y para un inductor largo $H = NI/\Delta l$ y $L = \mu N^2 A/\Delta l$ y además $U = \int P_H dt$ donde P_H es la potencia asociada al campo magnético, dada por el primer término de la ecuación (18). Cuando se cierra el interruptor este término es positivo ya que el campo magnético aumenta inicialmente.

Analicemos ahora el segundo término que, según dijimos representa la potencia que entra o sale del volumen V. Si bien el campo eléctrico dentro del material conductor es nulo en nuestra aproximación de conductor perfecto, existe un campo eléctrico inducido dado que el campo magnético varía inicialmente. Por la ley de Faraday tenemos:

$$\oint_V \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\mu \frac{d}{dt} \int_A \vec{H} \cdot \vec{dA} \Rightarrow E = -\frac{\mu A}{2\pi r} \frac{dH}{dt} \quad (19)$$

Y el segundo término de la ec. (18) resulta:

$$P_S = \int_A \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \overrightarrow{dA} = -\mu A \Delta l H \frac{dH}{dt} \quad (20)$$

P_S es negativo indicando un aumento de la energía almacenada en el volumen delimitado por el inductor (Figura 4 Der.). La energía en el inductor resulta:

$$U = \int P_S dt = \frac{\mu}{2} A \Delta l H^2 = \frac{\mu}{2} A \Delta l N^2 I^2 = \frac{1}{2} L I^2 \quad (21)$$

Nuevamente vemos que la energía almacenada en la inductancia tiene su origen en la interacción entre el campo magnético generado por la corriente en el inductor y el campo eléctrico inducido.

A diferencia del ejemplo anterior en que la resistencia disipa la energía que toma de los campos y el balance de energía en el volumen V es nulo (la energía se mantiene constante), en este caso la energía en el volumen V aumenta y es el flujo del *vector de Poynting* quien da cuenta de dicho aumento local. Análisis similares pueden realizarse considerando en interior de V , fuentes, capacitores o simplemente campos propagantes como los que representan las ondas electromagnéticas.

VI. DISCUSIÓN FINAL

Hemos propuesto una secuencia didáctica que permite avanzar en la reclamada y tan necesaria mejora de la enseñanza del electromagnetismo en cursos universitarios básicos al incorporar el tratamiento de la energía y su conservación como eje vertebrador para el abordaje sistemático de todo tipo de situaciones problemáticas.

La alternativa que se propone enfatiza el estudio del principio de la conservación de la energía como una herramienta que articula la enseñanza de los circuitos eléctricos y los campos electromagnéticos, en respuesta al reclamo de muchos investigadores que señalan este aspecto como un déficit presente en la enseñanza. Si bien el concepto de energía no está ausente en las clases de electromagnetismo, los alumnos no articularán los procesos energéticos que ocurren en las interacciones entre los campos, las corrientes y los dispositivos si estos temas se desarrollan de manera desarticulada, incoherente y hasta contradictoria. Sólo desde la perspectiva unificadora que brinda el tratamiento de la energía y su conservación será posible que puedan comprender los intercambios energéticos que tienen lugar en diferentes situaciones de manera unificada.

Esta presentación, además de ser más completa que la convencional y más útil para la comprensión de los procesos energéticos, no requiere un presupuesto de horas mayor que la tradicional y ofrece un buen cierre de los cursos de electromagnetismo básico, incluso antes de desarrollar ondas electromagnéticas.

Los resultados obtenidos en coloquios finales de la asignatura muestran la incorporación de nociones de conservación de la energía vinculadas al análisis de los circuitos y su relación con los campos, que superan las presentaciones tradicionales del *vector de Poynting*, sobre todo en cursos en los que el estudio de las ondas es posterior al electromagnetismo.

REFERENCIAS

Alonso, M. y Finn, E. J. (1970). *Física. Campos y ondas*. Vol. 2. Estados Unidos: Fondo Educativo Latinoamericano.

Bauer, W. y Westfall, G. D. (2011). *Física para ingeniería y ciencias, con Física Moderna*. Vol. 2. México, D.F.: McGraw-Hill/Interamericana editores.

Chabay, R y Sherwood, B. (2006). Restructuring the introductory electricity and magnetism course. *American Journal of Physics*, 74, 329–336.

Fernández, P., Jardon, A., Tabares, I. y Milicic, B. (2015). Una investigación sobre la introducción temprana de la enseñanza de la fem en electrostática, *Revista de Enseñanza de la Física*, 27(Extra), 305–312.

Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, M. (1998). *Física. Electromagnetismo y materia*, Vol. 2. México: Addison Wesley Longman.

Galili, I. y Gohbarg, E. (2005). Energy transfer in electrical circuits: A qualitative account. *American Journal of Physics*, 73, 141–144.

Giancoli, D. C. (2009). *Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna*. Cuarta edición, México: D.F. Pearson Educación.

Halliday, D., Resnick, R. y Walker J. (2011). *Fundamentals of Physics* 9th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Matar, M. y Welti, R. (2010). Las cargas superficiales y los campos de circuitos simples. *Latin American Journal of Physics Education*, 4, 730–740.

Reitz, J. y Mildford, F. (1969). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. México: Uteha.

Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. (2001). *Física* Vol. 1, 4° Ed. México: CECSA.

Romer, R. (1982). Alternatives to the Poynting vector for describing the flow of electromagnetic energy, *American Journal of Physics*, 50(12), 1166–1168.

Sefton, I. M. (2002). Understanding Electricity and Circuits: What the Text Books Don't Tell You. *Science Teachers' Workshop*. <http://science.uniserve.edu.au/school/curric/stage6/phys/stw2002/sefton.pdf> Consultado el 30/05/2014.

Serway, R. (2013). *Física para ciencias e ingenierías*, Vol. 2. México: Thomson.

Serway, R. y Jewett J. (2009). *Física. Electricidad y magnetismo*. México: Thomson.

Sherwood, B. A. y Chabay, R. W. (1999). *A unified treatment of electrostatics and circuits*. <https://matterandinteractions.org/wp-content/uploads/2016/07/circuit.pdf> Consultado 21/05/2014

Tipler, P. A. y Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo, luz*. Barcelona: Reverté.

Welti, R. (2005). Las cargas superficiales y el flujo de energía en un circuito simple. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27, 577–582.

Young, H. D. y Freedman, R. A. (2009). *Física universitaria, con Física Moderna* Vol. 2. (12va Ed.) México, D.F.: Pearson Educación.