

Medición del coeficiente de acoplamiento mutuo entre bobinas ligeramente acopladas, en el laboratorio de Física III

Measuring the mutual coupling coefficient of slightly coupled coils in an introductory Physics laboratory

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

Gerardo Fischfeld¹, Gloria Colombo¹ y Gustavo Arias¹

¹Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, CP 2000, Rosario, Provincia de Santa Fe, Argentina.

E-mail: gfisch@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Se propone un método de medición del coeficiente de inducción mutua M , entre dos bobinas, con generador de señales senoidales y osciloscopio. Las bobinas estarán separadas entre sí a distintas distancias, estando acopladas en forma axial y fuera de eje con distintos ángulos. Se puede observar la conformación del campo magnético en bobinas, plana y solenoide. Los resultados se obtienen variando la frecuencia de la señal senoidal de acoplamiento. Se considera los efectos de capacidad distribuida. Se comparan resultados con cálculos teóricos.

Palabras clave: Inducción mutua; Autoinducción; Acoplamiento; Resonancia.

Abstract

We propose a method of measuring the mutual induction coefficient M , between two coils, with sine wave signal generator and oscilloscope. The coils will be separated from each other at different distances, being coupled axially and off-axis with different angles. The shape of the magnetic field can be observed in flat and solenoid type coils. The results are obtained by varying the frequency of the sine coupling signal. The effects of distributed capacity are considered. Results are compared with theoretical calculations

Keywords: Mutual induction; Self induction; Coils coupling; Resonance.

I. INTRODUCCIÓN

La asignatura Física III forma parte del ciclo básico de todas las carreras de Ingeniería y Agrimensura de la FCEIA-UNR y aporta los conocimientos básicos de electricidad, magnetismo y electromagnetismo.

Esta asignatura se estructura a través de cuatro tipos de actividades: clases teóricas, resolución de problemas, trabajos experimentales de laboratorio, tantos demostrativos como realizados por los alumnos y un taller abierto.

El espacio destinado a las actividades de laboratorio de esta asignatura es muy importante y corresponde a las prácticas experimentales de los siguientes temas de: 1) Fenómenos electrostáticos (demostrativo). 2) Bandeja electrostática: medición del potencial eléctrico con *tester* y dibujo de líneas de campo eléctrico. 3) Ley de Ohm: variación lineal y cuadrática de la relación entre la tensión y la corriente en distintos dispositivos como resistencias y diodos. 4) Leyes de Kirchhoff en circuitos de corriente continua: suma de corriente en nudos y sumas de potenciales en mallas. 5) Fenómenos de magneto estática (demostrativo), medición de la relación de e/m en un tubo con hidrógeno a baja presión, campos magnéticos en solenoides y toroides, fuerza magnética, balanza de corriente. 6) Fenómenos de magneto dinámica: Ley de Faraday Lenz, generación de fem sin fenómenos químicos, acoplamiento de inducción mutua, principio del transformador. 7) Circuitos en régimen transitorios: RC y RL, medición de tiempo característico, con osciloscopio y generador de funciones, operando con ondas cuadradas. 8) Corriente alterna: medición de fase en circuitos de RLC, con osciloscopio y generador de funciones.

Todo este material didáctico constituye una suma de conocimientos experimentales que hacen a la formación de los estudiantes y los ponen en condiciones de encarar otros temas complementarios. En particular, se propone para los estudiantes de Ingeniería Eléctrica y de Ingeniería Electrónica una expe-

riencia de los fenómenos de inducción magnética, más allá de la formación lograda con los trabajos ya mencionados. Los desarrollos teóricos y la correlación con la evidencia experimental ayudan a formar a los estudiantes en el diseño de dispositivos, que eventualmente podrán ser utilizados en su carrera profesional.

El Taller abierto de Física III es un espacio disponible para los estudiantes, para que puedan resolver problemas adicionales propuestos por los docentes y realizar otras experiencias en el laboratorio a través de la observación guiada de fenómenos vinculados con el electromagnetismo. Este trabajo práctico es original, nunca fue implementado y la propuesta es realizarlo en el tiempo mencionado, luego del cual podremos adquirir información con los estudiantes sobre el resultado de esta implementación y eventuales modificaciones.

El estudiante en las clases prácticas es capaz de calcular el acoplamiento entre bobinas coaxiales utilizando aproximaciones del campo magnético generado por ellas. En esta etapa se avanza sobre estos temas diseñando en el laboratorio dispositivos que permitan visualizar, describir y comprender estos conceptos analizando también cuando las bobinas se encuentran con sus ejes paralelos y perpendiculares.

Se arma un circuito serie RL con un resistor una bobina y una fuente de corriente alterna, se analiza el campo magnético generado por la corriente que circula por la bobina de inductancia L y se discute la presencia de una tensión inducida en otra bobina que se coloque en las proximidades del circuito. Midiendo esta tensión inducida y la tensión en la resistencia R , conocida la frecuencia de la señal de la fuente, se mide de forma sencilla el coeficiente de inductancia mutua.

Aunque los fundamentos teóricos básicos de la asignatura son extraídos de los libros de texto, no se ha encontrado en ellos un tratamiento detallado del tema abordado. Su desarrollo lo convierte en una herramienta importante para la mejor comprensión de estos fenómenos y abre la discusión grupal de sus implicancias. Para su comprensión es necesario detallar algunos pasos matemáticos.

También permite a los estudiantes continuar con la familiarización del uso de instrumentos como el osciloscopio, el generador de funciones y el *tester* digital.

Los instrumentos utilizados en este trabajo son los mismos que se emplean en las clases prácticas de laboratorio. El osciloscopio es un *Tektronix* modelo TDS 1001C- EDU, digital de dos canales, con impedancia de entrada $1\text{ M}\Omega$ y con 20 pF . En tanto que el generador de funciones es un Protek modelo B-801, con resistencia interna $R_G = 50\ \Omega$. El *tester* digital utilizado es un *Wavetek* DM27XT.

A modo de síntesis, los objetivos de este trabajo práctico son:

1. Objetivos conceptuales:

Que comprendan los conceptos relacionados con la interacción magnética entre bobinas planas, y que sean capaces de extrapolar conclusiones a otros tipos de arrollamientos más complejos, como por ejemplo solenoides.

2. Objetivos procedimentales:

Que se familiaricen con el instrumental complejo, que alcancen un grado de dominio aceptable, que efectúen mediciones e informen críticamente los resultados.

Que sean capaces de distinguir los parámetros relevantes tales como la distancia de separación entre bobinas, ángulo entre sus ejes, corriente que circula por las mismas, número de espiras, la existencia de un blindaje entre ellas.

Que puedan organizar los resultados obtenidos en forma sistemática, usando tablas y eventualmente gráficos.

3. Objetivos actitudinales: acrecentar el sentido de responsabilidad y la capacidad de crítica y reflexión. Trabajar colaborativamente en equipo.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A. Coeficiente de inductancia mutua M

La interacción magnética entre al menos dos bobinas, se lo denomina acoplamiento mutuo, siendo esta una propiedad geométrica y del número de espiras con que son construidas y fundamentalmente de la distancia que las separa.

Analizaremos el acoplamiento entre dos bobinas tipo plana a las que llamaremos bobina 1 y bobina 2 y el acoplamiento entre la bobina 1 y una bobina 3 tipo solenoide.

La bobina 1 tiene un coeficiente de autoinducción L_1 , con un área A_1 y N_1 espiras y una resistencia interna R_1 en serie con una externa R_4 . La bobina 2 tiene un coeficiente de autoinducción L_2 , con un área A_2 y N_2 espiras y una resistencia interna R_2 . La bobina 3 tiene un coeficiente de autoinducción L_3 , con un área A_3 y N_3 espiras y una resistencia interna R_3 .

En todos los desarrollos siguientes, se considera que el campo magnético es uniforme sobre las áreas en donde están definidos. En caso de no tener un campo magnético uniforme se deben calcular los flujos magnéticos a través de una integral de superficie que contemple las variaciones del campo magnético.

Se conecta la bobina 1 en serie con la resistencia R_4 y se hace circular una corriente I_1 por medio de un generador de señales. La corriente que circula por la bobina produce un campo magnético $B_1(x, y, z)$, con valores que dependen del punto y de las distancias a la bobina 1.

La bobina 2 se ubica en el punto (x_0, y_0, z_0) y el campo magnético producido por la bobina 1 será $B_{12} = B_1(x_0, y_0, z_0)$. Considerando un campo magnético uniforme en el área A_2 de la bobina 2, se produce un flujo magnético por cada espira de la bobina 2, $\Phi_2 = B_{12}A_2$. El flujo total considerando N_2 espiras será: $\Phi_{2total} = B_{12}A_2N_2$

El coeficiente de inducción mutua M (Young y Freedman, 2009) entre las dos bobinas, 1 y 2 se define como:

$$M = \frac{\Phi_{2total}}{I_1} = \frac{B_{12}A_2N_2}{I_1} \quad (1)$$

Si se considera que la corriente I_1 varía en el tiempo, $I_1 = i_1(t)$, se producirá una fem, $v_2(t)$, en la bobina 2 dada por la ley de Faraday Lenz y utilizando la ecuación (1):

$$v_2(t) = -\frac{d\Phi_{2total}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

Considerando que las bobinas no se mueven entre sí, ni se deforman, entonces: $\frac{dM}{dt} = 0$.

La señal del generador aplicada a la bobina 1 es senoidal de la forma:

$$v_1(t) = V_{10} \sin(\omega t) \quad (3)$$

La corriente también será senoidal,

$$i_1(t) = I_{10} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Donde φ es el desfase, entre $v_1(t)$ e $i_1(t)$:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L_1}{R_T} \right) \quad (5)$$

Y $\omega = 2\pi f_0$, con f_0 frecuencia del generador.

La impedancia del circuito está dada por:

$$Z = \sqrt{R_T^2 + (\omega L)^2} \quad (6)$$

Con $R_T = R_1 + R_4$

Y la amplitud de la corriente es:

$$I_{10} = \frac{V_{10}}{Z} \quad (7)$$

Derivando la ecuación (4) en función del tiempo y reemplazando en la (2) se obtiene:

$$v_2(t) = -M\omega I_{10} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

La fem $v_2(t)$ es una señal senoidal que adelanta $\frac{\pi}{2}$, respecto de la corriente $i_1(t)$.

La corriente $i_1(t)$ se puede medir indirectamente a través de medir: la tensión $v_{R_4}(t)$, en la resistencia externa R_4 en serie con la bobina 1, en cuyo caso resulta:

$$i_1(t) = \frac{v_{R_4}(t)}{R_4} \quad (9)$$

$$v_{R_4}(t) = V_{R_4,0} \sin(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

Considerando (4), (9) y (10), resulta: $R_4 I_{10} \sin(\omega t + \varphi) = V_{R_4 0} \sin(\omega t + \varphi)$
Luego:

$$I_{10} = \frac{V_{R_4 0}}{R_4} \quad (11)$$

Midiendo con el osciloscopio los valores máximos de tensión $V_{R_4 0}$, en R_4 , se obtiene el valor máximo de la corriente I_{10} .

La fem, $v_2(t)$ también se mide con el osciloscopio, siendo:

$$v_2(t) = V_{20} \cos(\omega t + \varphi) = V_{20} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad (12)$$

Considerando las ecuaciones (8) y (11), resulta:

$$V_{20} = M\omega I_{10} = M\omega \frac{V_{R_4 0}}{R_4} \quad (13)$$

Teniendo como datos R_4 y ω , y midiendo los parámetros con osciloscopio: V_{20} (amplitud de la tensión inducida en la bobina2) y $V_{R_4 0}$ (amplitud de la tensión en la resistencia externa R_4), podemos medir el *coeficiente de inducción mutua* M utilizando la ecuación:

$$M = \frac{V_{20} R_4}{\omega V_{R_4 0}} \quad (14)$$

B. Coeficiente de autoinducción L

Una corriente que circula por una bobina de N espiras crea un campo magnético y en consecuencia un flujo magnético Φ que atraviesa a cada una de ellas.

El coeficiente de autoinducción L (Young y Freedman, 2009) de una bobina se define como la relación entre el propio flujo magnético total y la corriente que la circula, siendo esta una propiedad geométrica y del número de espiras con que es construida.

$$L = \frac{\Phi_{\text{total}}}{I} = \frac{N\Phi}{I} \quad (15)$$

Según sea el tipo de bobina, plana, solenoide o toroidal, la autoinducción resulta:

B.1. Bobina plana

La bobina plana, también llamada galleta (Young y Freedman, 2009) es un conjunto de espiras coaxiales en un plano, donde la altura h del bobinado es menor que el diámetro $2a$ de la bobina y el campo magnético puede ser aproximado por el campo de una sola espira sobre su eje, multiplicado por el número de espiras, como se muestra en la Figura 1.

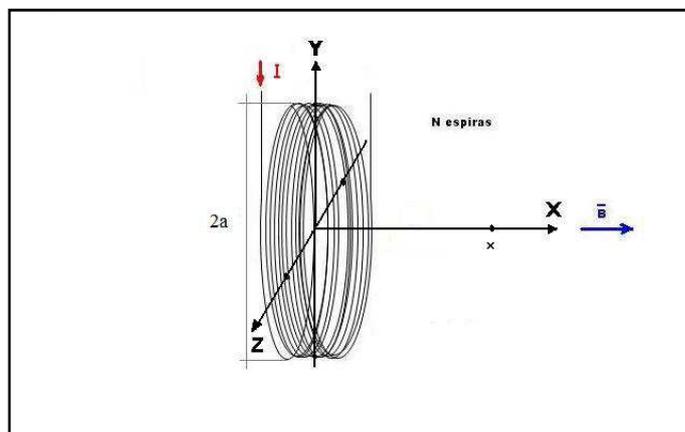


FIGURA 1. Bobina plana (galleta), ubicada en el sistema cartesiano.

Aplicando la Ley de Amper–Laplace a una espira con centro en el origen de coordenadas y ubicada sobre el plano yz , el campo magnético en el eje x resulta:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{16}$$

Donde: μ_0 es la permeabilidad del vacío, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Tm}{A}$, I es la corriente que circula por la espira, a es el radio de la espira y x la distancia al centro de la bobina, sobre el eje x , donde es evaluado el campo magnético. Para N espiras y consideramos que el campo es uniforme en toda el área encerrada por las N espiras, la ecuación (15) resulta:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{2a} \tag{17}$$

B.2. Bobina solenoide

Una bobina solenoide (Young y Freedman, 2009) es un conjunto de bobinas coaxiales a lo largo de un eje, donde la longitud del bobinado l es mucho mayor que el diámetro del mismo.

A partir del campo obtenido para una espira, ecuación (16), se calcula el campo magnético sobre el eje del solenoide, sumando el campo magnético de todas las espiras a lo largo del bobinado. Tomando el eje del solenoide como eje x , se establece el punto x_0 , donde se quiere calcular el campo magnético, definiendo los ángulos α_1 y α_2 subtendidos desde el punto x_0 a ambos extremos del bobinado, como muestra la Figura 2. Para obtener el campo resultante debemos integrar desde un extremo del solenoide hasta el otro (Alonso M. y Finn E., 1970) obteniendo:

$$B = \frac{\mu_0 I N (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{2l} \tag{18}$$

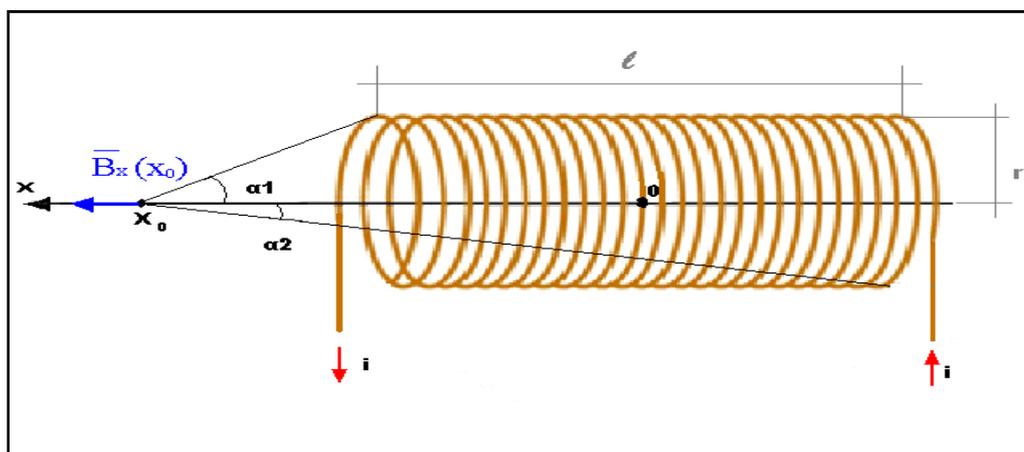


FIGURA 2. Bobina solenoide, distribución angular sobre el eje.

Otro método que se puede aplicar para calcular el campo magnético en el centro del solenoide y en el eje, es aplicando la ley de Ampere. En cuyo caso el resultado es:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{l} \tag{19}$$

Que corresponde al caso anterior para el solenoide infinito, con $\alpha_1 = \pi$ y $\alpha_2 = 0$. Este resultado es el doble del valor que encontramos para un punto en el eje y en uno de sus extremos, $\alpha_1 = \pi/2$ y $\alpha_2 \approx 0$ ó $\alpha_1 \approx \pi$ y $\alpha_2 = \pi/2$.

Considerando el campo magnético deducido en la ecuación (19), uniforme en todo el interior del solenoide, la autoinducción resulta:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \tag{20}$$

B.3. Bobina toroide

Una bobina toroide (Young y Freedman, 2009) es un conjunto de N espiras arrolladas sobre un soporte toroidal de sección transversal A . El eje del toroide consiste en una circunferencia de radio medio, R_m , como muestra la Figura 3. El cálculo se realiza aplicando la ley de Ampere, para una trayectoria $2\pi R_m$, en cuyo caso el campo magnético sobre la circunferencia media del toroide es:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi R_m} \quad (21)$$

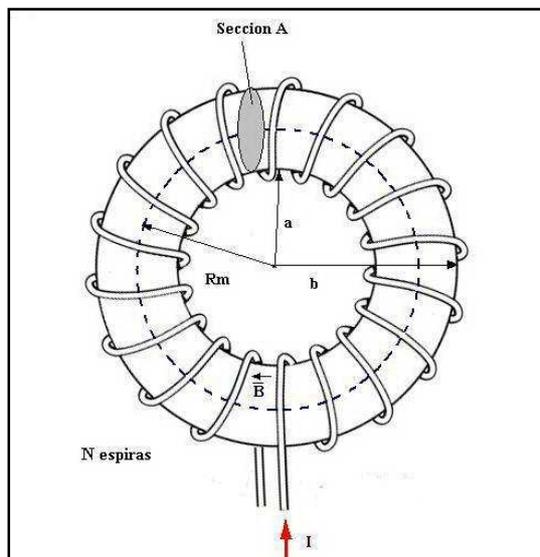


FIGURA 3. Bobina toroide. Distribución de variables.

Considerando el campo magnético deducido en la ecuación (21), uniforme en todo el interior del toroide, la autoinducción resulta:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R_m} \quad (22)$$

En las ecuaciones (17), (20) y (22), podemos apreciar que la autoinducción sólo depende de la geometría de las bobinas y de la permeabilidad magnética μ_0 .

C. Coeficiente de acoplamiento K

El coeficiente de acoplamiento magnético (Terman, 1952) entre bobinas K es un adimensional que varía entre 0 y 1, proporcional al factor de acoplamiento, que resulta más simple de interpretar que el coeficiente de inducción mutua. Es una medida del grado en el que el flujo producido por una bobina enlaza a la otra. Si las bobinas no están acopladas, entonces $K=0$. Si las bobinas están perfectamente acopladas, entonces $K=1$.

Aplicando la ecuación (15) a las bobinas 1 y a la 2, resulta para cada una de ellas:

$$B_1 A_1 N_1 = L_1 I_1 B_2 A_2 N_2 = L_2 I_2 \quad (23)$$

De la misma manera para la inductancia mutua, de la 1 sobre la 2 y de la 2 sobre la 1, utilizando la ecuación (1), resulta para cada una:

$$B_{12} A_2 N_2 = M_{12} I_1 B_{21} A_1 N_1 = M_{21} I_2 \quad (24)$$

Cada una de las bobinas captura una parte del campo magnético que produce la otra, en una proporción dada por el coeficiente K , con $0 \leq K \leq 1$, de donde resulta:

$$B_{12} = K B_1 B_{21} = K B_2 \quad (25)$$

El coeficiente mutuo debe ser el mismo visto desde una u otra bobina, con lo cual: $M_{12} = M_{21}$. Por lo tanto, podemos calcular utilizando las ecuaciones (23) y (24):

$$M^2 = M_{12}M_{21} = \frac{B_{12}A_2N_2B_{21}A_1N_1}{I_1I_2} = \frac{KB_1A_2N_2KB_2A_1N_1}{I_1I_2}$$

Luego, aplicando (23), nos queda:

$$M^2 = K^2L_1L_2 \Rightarrow K = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \tag{26}$$

III. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Llamamos con 1 y 2 a las bobinas planas y con 3 al solenoide. Se midieron los coeficientes de inductancia mutua y de acoplamiento entre las bobinas 1 y 2, ambas con 1000espiras, y la 3 con 190 espiras. Los parámetros eléctricos fueron medidos con el *tester* digital.

La bobina 1, tiene salidas $N_1 = 1000, 750, 500, 250$ espiras, un diámetro exterior $d_{ext1} = 49 \text{ mm}$, un diámetro interior $d_{int1} = 42 \text{ mm}$, una altura del bobinado $h_1 = 15 \text{ mm}$, un coeficiente de autoinducción de $L_{1(1000)} = 52.3 \text{ mHy}$, $L_{1(750)} = 29.5 \text{ mHy}$, $L_{1(500)} = 13.2 \text{ mHy}$, $L_{1(250)} = 3.49 \text{ mHy}$, y una resistencia interna $R_{1(1000)} = 80.5 \Omega$, $R_{2(750)} = 59.4 \Omega$, $R_{1(500)} = 38.5 \Omega$, $R_{2(250)} = 18.8 \Omega$. Diámetro del alambre 0.2 mm .

La bobina 2, tiene salidas $N_2 = 1000, 750, 500, 250$ espiras, un diámetro exterior $d_{ext2} = 49 \text{ mm}$, un diámetro interior $d_{int2} = 41 \text{ mm}$, una altura del bobinado $h_2 = 14 \text{ mm}$, un coeficiente de autoinducción de $L_{2(1000)} = 53.5 \text{ mHy}$, $L_{2(750)} = 30.2 \text{ mHy}$, $L_{2(500)} = 13.7 \text{ mHy}$, $L_{2(250)} = 3.49 \text{ mHy}$ y una resistencia interna $R_{2(1000)} = 97.0 \Omega$, $R_{2(750)} = 71.2 \Omega$, $R_{2(500)} = 46.8 \Omega$, $R_{2(250)} = 23.0 \Omega$. Diámetro del alambre 0.20 mm .

La bobina 3, tiene $N_3 = 190$ espiras, un diámetro exterior $d_{ext3} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, un largo $l_3 = 106 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, un coeficiente de autoinducción de $L_3 = 129 \mu\text{Hy}$, y una resistencia interna $R_3 = 1.1 \Omega$, un diámetro del hilo conductor de 0.50 mm .

A. Cálculo teórico del coeficiente L , aplicado a las bobinas 1 y 2

Según la ecuación (17), el coeficiente L resulta:

$$L = 10^{-7} \pi^2 N^2 a \tag{27}$$

Aplicado a la bobina 1 y a la 2, con: $2a = 49 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, correspondiente al diámetro exterior de las bobinas, se obtienen los resultados teóricos que se muestra en la Tabla I.

TABLA I. Cálculo de la autoinducción de las bobinas 1 y 2.

N	$L_{1\text{teórico}}$ [mHy]	Diferencia porcentual % de L_1	$L_{2\text{teórico}}$ [mHy]	Diferencia porcentual % de L_2
1000	48.3	7.6	48.3	9.7
750	27.2	7.8	27.2	9.9
500	12.0	9	12.0	12.4
250	3.0	8.5	3.0	14

Cálculo de la diferencia porcentual según la expresión: $\frac{\text{valor}_{\text{medido tester}} - \text{valor}_{\text{teórico}}}{\text{valor}_{\text{medido tester}}}$. En todos los casos el valor teórico es inferior al valor medido con el *tester*.

B. Cálculo teórico del coeficiente L_3 , aplicado a la bobina 3

Según la ecuación (20), el coeficiente L_3 , resulta:

$$L_3 = \frac{10^{-7} \pi^2 d_{ext3}^2 N_3^2}{l_3} \tag{28}$$

Con: $d_{ext3} = 20 \cdot 10^{-3} \text{m}$, $N = 190$ espira, $l_3 = 106 \cdot 10^{-3} \text{m}$, resulta: $L_3 = 134.3 \mu\text{Hy}$, con una diferencia porcentual de (-4.1%) .

IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

A. Medición del coeficiente de inducción mutua entre bobina 1 y 2 con ejes colineales

Se guía a los estudiantes para que midan en tres frecuencias, 75 Hz, 500 Hz y 1500 Hz. Para cada una de estas frecuencias se deja fija la bobina 1 y se varía la distancia de la bobina 2 en los siguientes valores: 2 cm, 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm, 25 cm, 30 cm, 35 cm y 40 cm con respecto a la 1. Una medición típica se observa en las Figura 4, para 500 Hz.

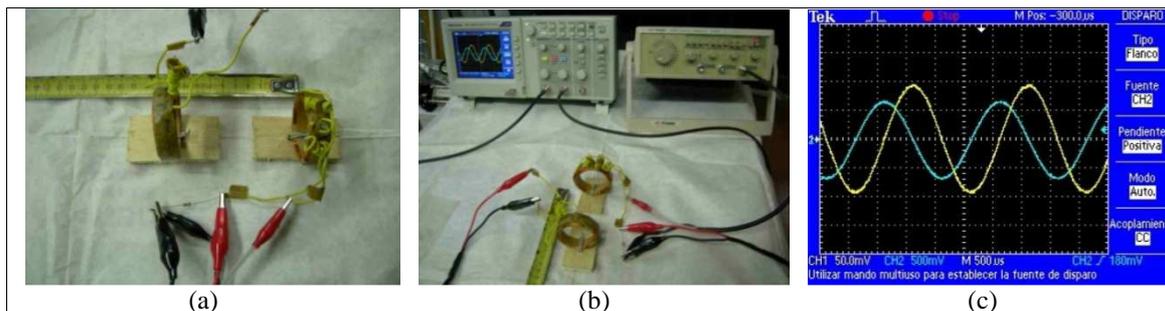


FIGURA 4. a) Distancia entre bobinas, 10 cm. Bobina 1 derecha, bobina 2 izquierda; b) Conjunto instrumental y disposición experimental; c) Oscilograma: fem en la bobina 2 (señal amarilla), tensión en $R_4 = 10 \Omega$, proporcional a la corriente I_{10} , ecuación (11) (señal azul).

En la Tabla II se muestran los valores medidos para el cálculo experimental de la inducción mutua para cada frecuencia.

La Tabla III muestra los valores calculados de la inducción mutua, M_{exp} , según la ecuación (14) para cada frecuencia y el cálculo de $M_{teórico}$ según las ecuaciones (1) y (16) y variando las distancias entre bobinas. Se considera el diámetro exterior para el cálculo del campo magnético de la bobina 1, según ecuación (16), y el diámetro interior para el cálculo del área de la bobina 2. También se muestran los resultados de los coeficientes de acoplamiento, K_{exp} , y $K_{teórico}$ obtenidos por la ecuación (26), con los valores teóricos de las autoinducciones de las bobinas 1 y 2 expresadas en la Tabla I.

TABLA II. Valores medidos de tensión para distintas frecuencias y distancias, aplicadas a la medición del M_{exp} .

x [m]	f=1500 Hz		f=500 Hz		f=75 Hz	
	V_{20} [V]	V_{R40} [V]	V_{20} [V]	V_{R40} [V]	V_{20} [V]	V_{R40} [V]
0,02	8.4	0.56	6	1.4	1.44	2
0,05	1.7	0.55	1.16	1.35	0.24	2
0,1	0.26	0.55	0.18	1.35	0.042	2
0,15	0.08	0.55	0.056	1.4	0.014	2
0,2	0.034	0.55	0.026	1.35	0.006	2
0,25	0.018	0.55	0.015	1.35		
0,3	0.0104	0.55	0.008	1.35		
0,35	0.0068	0.55				
0,4	0.0056	0.55				

TABLA III. Valores calculados de $M_{exp.}$, de $M_{teórico}$, $K_{exp.}$ y $K_{teórico}$.

	x [m]	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$M_{exp.}$ [mHy]	1500 Hz	15.9	3.27	0.502	0.154	0.065	0.035	0.020	0.013	0.010
	500 Hz	13.6	2.73	0.424	0.127	0.061	0.035	0.019		
	75 Hz	15.3	2.55	0.467	0.148	0.063				
$M_{teórico}$ [mHy]		15.3	2.83	0.449	0.140	0.060	0.031	0.018	0.011	0.008
$K_{exp.}$ 10^{-3}	1500 Hz	320	68	10	3	1	0.7	0.4	0.3	0.2
$K_{teórico}$ 10^{-3}		320	59	9	3	1	0.6	0.4	0.2	0.2

B. Efecto del cambio de frecuencia sobre el acoplamiento mutuo

Para observar el efecto de cambio de frecuencia en el acoplamiento se hizo una medición a 10 kHz. La disposición experimental se observa en la Figura 5. Los resultados se muestran en la Tabla IV.

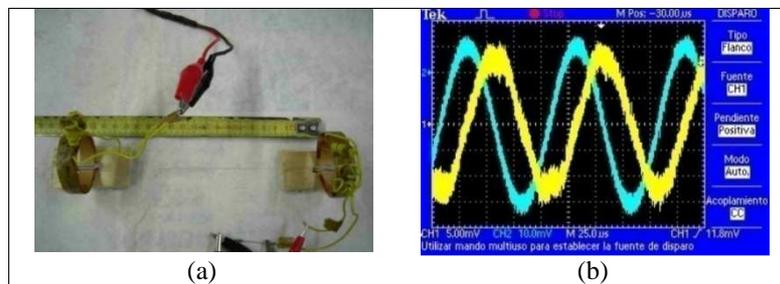


FIGURA 5. a) Distancia entre bobinas 20 cm; b) Oscilograma. Señales con alto nivel de ruido. Señal amarilla, fem_2 ; señal azul proporcional a I_{10} .

TABLA IV. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$, de $M_{teórico}$, $K_{exp.}$ y $K_{teórico}$, para 10 kHz.

f=10 kHz						
x [m]	V_{20} [mV]	V_{R40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$M_{teórico}$ [mHy]	$K_{exp.} \cdot 10^{-3}$	$K_{teo.} \cdot 10^{-3}$
0.20	27	60	0.072	0.060	1.5	1

C. Medición de la inducción mutua entre la bobina 1 y la 2 con sus ejes paralelos

El cálculo del acoplamiento mutuo entre bobinas, con ejes paralelos, es muy complicado de realizar ya que se debe hacer con ayuda de una computadora y un programa desarrollado al efecto. Para dimensionar el acoplamiento se hicieron mediciones con distancias entre ambos ejes, de 5 cm y 10 cm, a una frecuencia de 1500 Hz. La Figura 6 ilustra esta disposición y la Tabla V muestra los resultados.

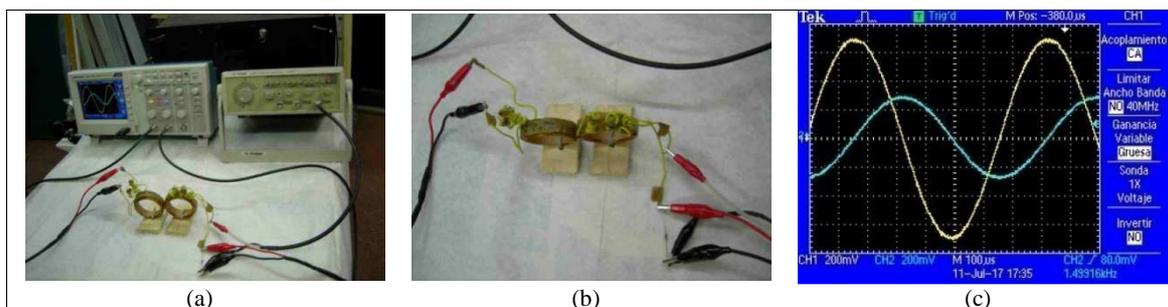


FIGURA 6. a) Disposición experimental; b) Bobinas con ejes paralelos, distancia entre ambos, 5 cm; c) Oscilograma: señal amarilla fem_2 ; señal azul proporcional a I_{10} . Se observa el desfase de 90° entre ambas señales.

TABLA V. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$, de $M_{teórico}$, $K_{exp.}$ y $K_{teórico}$, para ejes paralelos.

f=1500 Hz				
x m]	V_{20} [V]	V_{R_40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$K_{exp.}$
0,05	1,38	0,54	2.7	0.06
0,1	0,36	0,56	0.68	0.014

D. Efecto de blindajes sobre el acoplamiento mutuo

Se analizó el efecto de un blindaje para la configuración de ejes colineales, a 10 cm, midiendo: sin blindaje, con cobre, con aluminio y con hierro a una frecuencia de 1500 Hz. La Figura 7, muestra la disposición experimental y la Tabla VI los resultados.

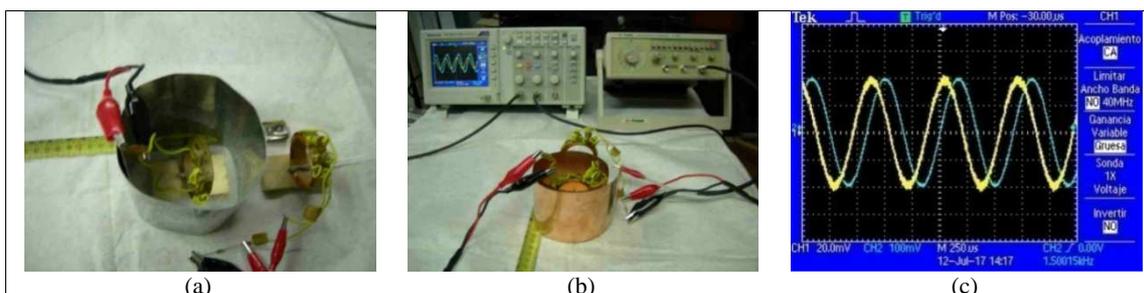


FIGURA 7. a) Medición con blindaje de hierro, diámetro del mismo 10 cm; b) Blindaje de cobre; c) Oscilograma: señal amarilla fem_2 ; señal azul proporcional a I_{10} .

TABLA VI. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$, de $M_{teórico}$, $K_{exp.}$ y $K_{teórico}$, para distintos blindajes.

f=1500Hz				
x=0.10 m	V_{20} [mV]	V_{R_40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$K_{exp.}$ 10^{-3}
sin blindaje	160	0.39	0.44	9.0
blindaje Cu	120	0.39	0.33	6.7
blindaje Al	108	0.39	0.29	6.0
blindaje Fe	80	0.39	0.22	4.5

E. Efecto de ejes perpendiculares sobre el acoplamiento mutuo

Se dispusieron las bobinas 1 y 2 con sus ejes perpendiculares, a 5 cm entre los centros de las bobinas, para una frecuencia de 1500 Hz. En las Figura 8 se observa la disposición experimental y el oscilograma. En este se observa un alto nivel de ruido por estar en la máxima ganancia del osciloscopio. La Tabla VII muestra los resultados.

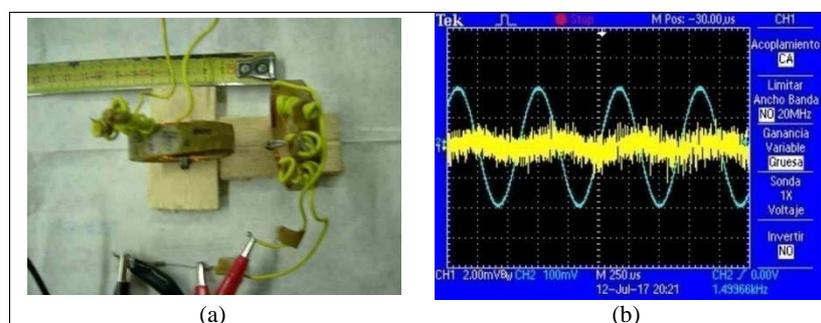


FIGURA 8. a) Ejes perpendiculares a 5 cm entre ambos centros; b) Oscilograma: fem_2 , señal amarilla, con alto nivel de ruido; señal azul proporcional a I_{10} .

TABLA VII. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$, de $M_{teórico}$, $K_{exp.}$, para ejes perpendiculares para 1500 Hz.

f=1500 Hz				
x [m]	V_{20} [mV]	V_{R40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$K_{exp.}$ ($\times 10^{-3}$)
0,05	2	0,39	0.005	0.11

F. Construcción de líneas de campo magnético, obtenidas por mínima señal de la bobina 2

En cualquier punto en donde se quiere dibujar una línea de campo, se hace girar la bobina 2 hasta obtener la mínima señal. El eje radial se marca con los dos puntos en el diámetro de la bobina. A continuación colocando el diámetro de la bobina en uno de los puntos, se gira nuevamente hasta obtener el siguiente punto, de esta forma se puede trazar una línea. La siguiente se elegirá por conveniencia del dibujo teniendo en cuenta que se pueden trazar infinitas líneas. La Figura 9 muestra la disposición experimental y la Tabla VIII en resultado numérico.

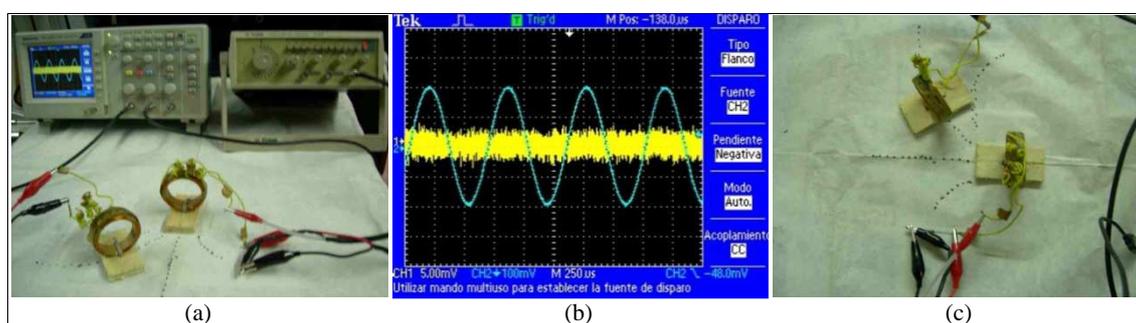


FIGURA 9. a) Disposición experimental, trazado de líneas de campo; b) Oscilograma: fem_2 , señal amarilla. Señal azul proporcional a I_{10} ; c) Detalle de la construcción de líneas de campo en el diámetro de la bobina 2.

TABLA VIII. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$, de $K_{exp.}$, para ejes perpendiculares utilizados para el trazado de líneas de campo.

	V_{20} [mV]	V_{R40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$K_{exp.}$ ($\times 10^{-3}$)
1500 Hz	5	0.4	0.013	0.3

G. Inducción mutua entre la bobina plana 2 y la bobina solenoide 3, ubicada la primera en el centro de la segunda

La Figura 10 muestra la disposición de bobinas y su oscilograma. En la Tabla IX se muestra los resultados.

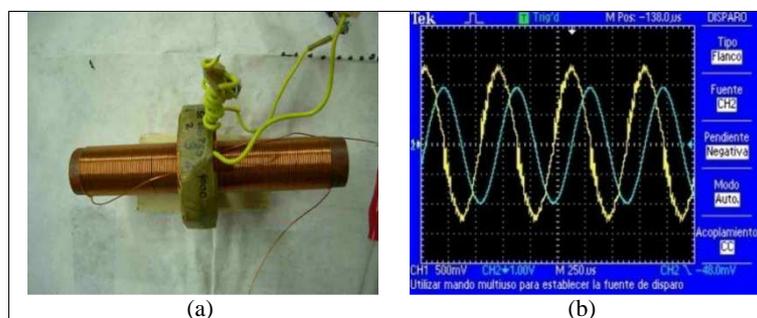


FIGURA 10. a) Disposición de bobinas, la 2 en el centro de la 3; b) Oscilograma. Señal amarilla fem_2 , tomada en bobina 2 y señal azul proporcional a I_{10} tomada en bobina 3.

H. Inducción mutua entre la bobina plana 2 y la bobina solenoide 3, ubicada la primera en el extremo de la 3

La Figura 11 muestra la disposición experimental y el oscilograma. La Tabla IX se muestra los resultados.

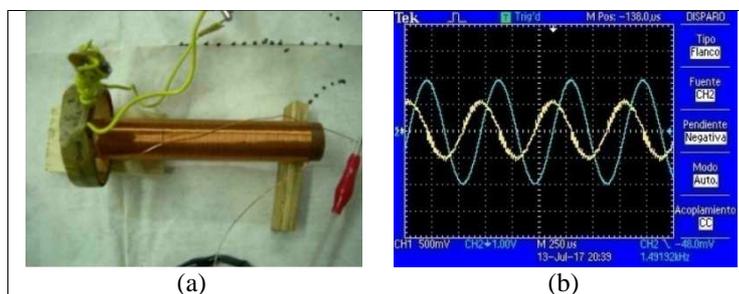


FIGURA 11. a) Disposición de bobinas, la 2 en el extremo de la 3; b) Oscilograma. Señal amarilla fem_2 , tomada en bobina 2 y señal azul proporcional a I_{10} tomada en bobina 3.

I. Inducción mutua entre la bobina 3 y la bobina 2, ubicada externa, en el lateral del solenoide

La Figura 12 muestra la disposición experimental y el oscilograma. La Tabla IX se muestra los resultados.

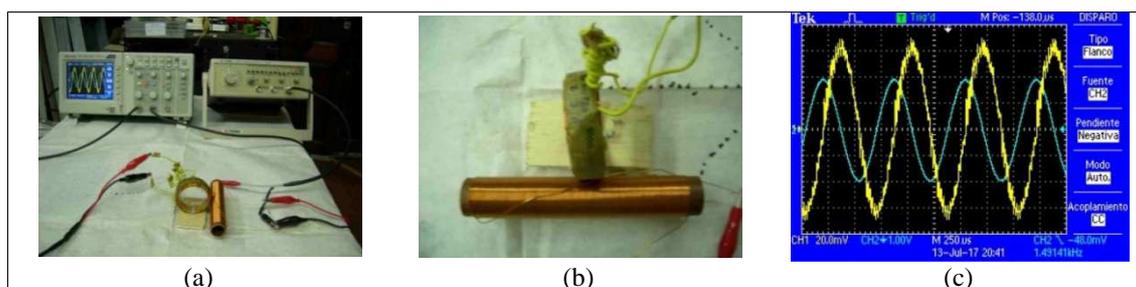


FIGURA 12. a) Disposición experimental; b) Disposición de bobinas, la 2 en el lateral de la 3, con sus ejes paralelos; c) Oscilograma. Señal amarilla fem_2 , tomada en bobina 2 y señal azul proporcional a I_{10} tomada en bobina 3.

TABLA IX. Valores medidos y resultados calculados de $M_{exp.}$ de $K_{exp.}$ para acoplamientos en el centro, extremo y lateral del solenoide.

Solenoid ubicación	f [Hz]	V_{20} [V]	V_{R_40} [V]	$M_{exp.}$ [mHy]	$K_{exp.}$ 10^{-3}
Medio	1500	2.65	4	0.70	0.015
Extremo	1500	1.15	4	0.3	0.006
Lateral	1500	0.120	4	0.032	0.006

J. Medición de la frecuencia de resonancia de la bobina 2 y su capacidad parasita.

La medición de la frecuencia de resonancia de la bobina 2 se realizó por acoplamiento mutuo con la bobina 1, a 20 cm entre ambas, variando la frecuencia, hasta obtener el máximo de tensión en la bobina 2.

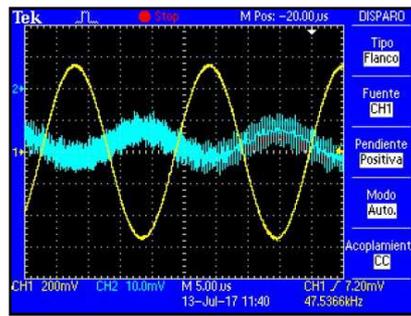


FIGURA 13. Medición de la frecuencia de resonancia de la bobina 2, por valor máximo de la tensión fem_2 , señal amarilla. Señal azul corriente proporcional a I_{10} .

El coeficiente de autoinducción de la bobina 2, $L_2(1000) = 53.5$ mHy, está en paralelo con una capacitancia equivalente, C_{T2} , formada por la capacidad de entrada del osciloscopio de 20 pF, la capacidad del cable de conexión 100 pF y la capacidad distribuida de la bobina, C_{d2} .

$$C_{T2} = 120pF + C_{d2} \tag{29}$$

Midiendo la frecuencia de resonancia f_0 y sabiendo que $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_{T2}}}$, podemos calcular la capacidad total equivalente C_{T2} . Para $f_0 = 47.54$ kHz, resulta:

$$C_{T2} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L_2} = 210 \text{ pF} \tag{30}$$

Y obtenemos por medio de la ecuación (29) la capacidad parásita:

$$C_{d2} = 210 \text{ pF} - 120 \text{ pF} = 90 \text{ pF}$$

K. Medición de la frecuencia de resonancia en la bobina 1 y su capacidad parásita

El circuito de la bobina 1 es un circuito paralelo con la capacidad parásita C_{d1} y el coeficiente de autoinducción $L_1(1000) = 52.3$ mHy. La condición de resonancia aparece cuando la corriente es mínima y la impedancia del circuito es máxima.

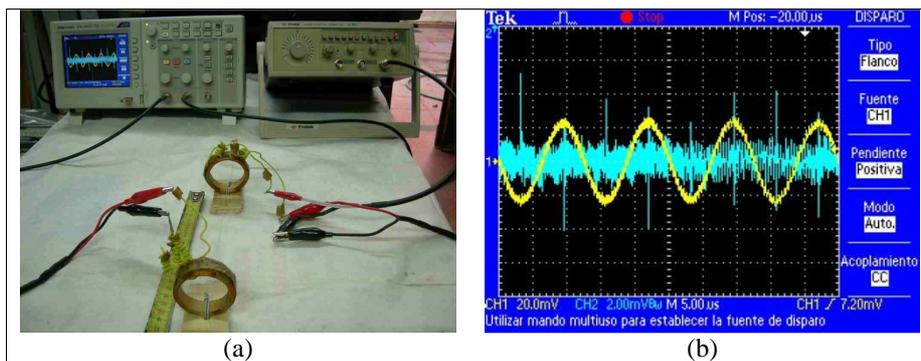


FIGURA 14. a) Disposición experimental para medir la frecuencia de resonancia de la bobina 1, por mínima corriente; b) Oscilograma: fem_2 señal amarilla. Señal azul proporcional a la corriente I_{10} , con mínima corriente.

Midiendo la frecuencia de resonancia, $f_0 = 76.9$ kHz, y utilizando la ecuación (30) resulta $C_{d1} = 82.8$ pF, valor muy próximo al medido para la bobina 2, dado que tienen igual construcción. La diferencia porcentual entre los valores obtenidos entre las bobinas es: $\frac{(C_{d2}-C_{d1})}{C_{d2}} = 8\%$

L. Medición de L_1 , por medio del tiempo característico τ del circuito R L_1

Otra forma de medición del coeficiente de autoinducción L_1 de la bobina 1 se puede realizar por medio de la medición del tiempo característico τ de un circuito R L, (Edminster y Nahvi, 1997).

Se aplica al circuito RL una onda cuadrada de una frecuencia tal que garantice que se llega al valor de saturación de la corriente, en nuestro caso se utilizó 143 Hz. La saturación se observa por un trazo horizontal de la tensión medida sobre la resistencia R_4 , ver Figura 14 a. En la Figura 14 b se observa la medición del tiempo característico, a partir del eje vertical central del osciloscopio y el inicio de la señal.

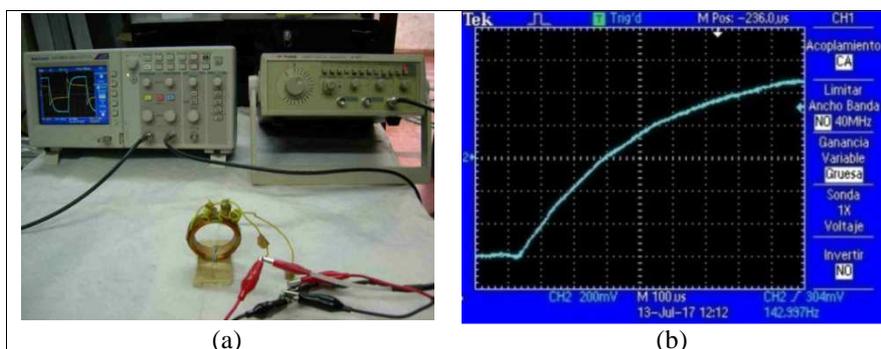


FIGURA 15. a) Disposición experimental para medida de resonancia de la bobina 1, distancia entre bobinas 20 cm; b) Oscilograma: fem_2 señal amarilla, señal proporcional a la corriente I_{10} , señal azul, con mínima corriente.

La corriente en un circuito RL está determinada por la siguiente expresión:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (31)$$

Con

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (32)$$

La resistencia R representa la resistencia total que tiene el circuito, es decir, la resistencia de la bobina de 1000 vuelta R_1 , la externa R_4 y la interna del generador R_G .

$$R = R_1 + R_4 + R_G = 80.5\Omega + 10\Omega + 50\Omega = 140.5\Omega$$

La tensión $V_0 = 1.16 V$, es el valor máximo asintótico de la tensión del generador, valor medido con el osciloscopio.

En la Figura 14 b, observamos $V_{R4}(t)$. Sabemos que en $t = \tau$, la tensión $V_{R4} = 63\%V_0$. Haciendo coincidir este valor con el eje central de las ordenadas, se mide τ a partir del comienzo de la señal, obteniéndose $\tau = 360\mu s$. Con este valor y utilizando la ecuación (32) resulta: $L_1 = \tau R = 50.5 mHy$, valor muy próximo al medido con el *tester*, $L_{1(1000)} = 52.3 mHy$, con una diferencia porcentual de 3.4%.

M. Medición de L_3 por medio del tiempo característico τ de circuito RL:

Utilizando el método descrito anteriormente se mide el coeficiente de auto inducción L_3 , de la bobina 3. En este caso resulta:

$$\tau = 2.25 \mu s; V_0 = 3V, V_{R4}(t = \tau) = 63\% V_0 = 1.89 V \\ \text{con } R = R_3 + R_4 + R_G = 1.1\Omega + 10\Omega + 50\Omega = 61.1\Omega$$

Considerando la ecuación (32) resulta: $L_3 = \tau R = 137.5 \mu Hy$, valor próximo al medido con el *tester*, $L_{3tester} = 129 \mu Hy$, con una diferencia porcentual de 6.6 %.

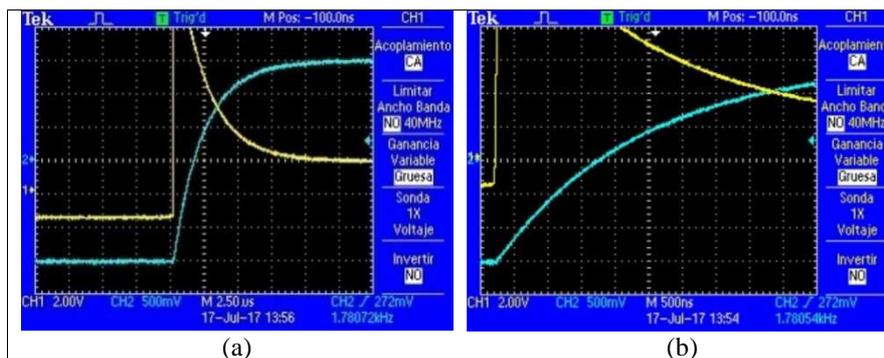


FIGURA 16. a) Tiempo característico τ de L_3 . Señal amarilla tensión en la bobina. Señal azul corriente por la bobina; b) Ídem (a), pero con escala de tiempo expandida 500 ns.

N. Medición de L_1 por diferencia de fase entre la tensión y la corriente en un circuito R L en 400Hz

Otro método para medir L_1 , consiste en utilizar una señal senoidal y medir la diferencia de fase entre la tensión del generador y la corriente del circuito.

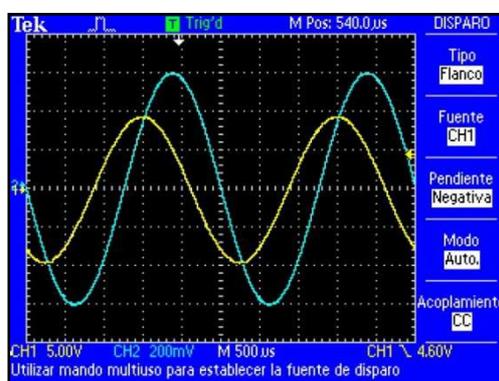


FIGURA 17. Medición de L_1 por diferencia de fase. Señal amarilla tensión del generador. Señal azul, corriente del circuito.

Como ya fue mencionado, en un circuito serie RL en corriente alterna, para una tensión del generador $v_1(t) = V_{10} \sin(\omega t)$ (ecuación (3)), la corriente también será senoidal, con un desfase φ , entre $v_1(t)$ e $i_1(t) = I_{10} \sin(\omega t + \varphi)$ (ecuación (4)), donde: $I_{10} = \frac{V_{10}}{Z}$ (7), $Z = \sqrt{R_T^2 + (\omega L_1)^2}$, según la ecuación (6); con $R_T = R_1 + R_4$, $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L_1}{R_T} \right)$, según ecuación (5), y $\omega = 2\pi f_0$, con f_0 frecuencia del generador.

La corriente $i_1(t)$ se puede medir indirectamente a través de la tensión $v_{R_4}(t)$, en la resistencia R_4 externa, en serie con la bobina 1, en cuyo caso resulta: $i_1(t) = \frac{v_{R_4}(t)}{R_4}$ (9), con: $v_{R_4}(t) = V_{R_4,0} \sin(\omega t + \varphi)$, (10).

Considerando (4), (9) y (10), resulta: $R_4 I_{10} \sin(\omega t + \varphi) = V_{R_4,0} \sin(\omega t + \varphi)$, luego: $I_{10} = \frac{V_{R_4,0}}{R_4}$ (11)

Midiendo los valores máximos de tensión $V_{R_4,0}$, en R_4 , con el osciloscopio, se obtiene el valor máximo de la corriente I_{10} . Los valores obtenidos de las señales del osciloscopio son:

$$T = 5 \text{ div} \times 500 \mu\text{s} = 2.5 \text{ ms} \Rightarrow f_0 = 400 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2512 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$V_{R_4,0} = 1.2 \text{ V} \Rightarrow I_{10} = \frac{1.2 \text{ V}}{10 \Omega} = 0.12 \text{ A}$$

$$V_{10} = 3.7 \text{ div} \times 5 \frac{\text{V}}{\text{div}} = 18.5 \text{ V}$$

$$Z = \frac{V_{10}}{I_{10}} = 154.2 \Omega$$

$$\varphi = 360^\circ \frac{t}{T}, \text{ (} t \text{ es el tiempo entre la señal de corriente y tensión)}$$

$$t = 0.75 \text{ div} \times 500 \mu\text{s} = 375 \mu\text{s} \Rightarrow \varphi = 54^\circ$$

De la ecuación (5):

$$L_1 = \frac{R_T \tan \varphi}{\omega} \quad (33)$$

Con $R_T = 80.5 \Omega + 10 \Omega = 90.5 \Omega$. En este caso se eliminó la resistencia interna del generador R_G , porque la tensión medida externamente no incluye la caída en la resistencia interna. El cálculo de la impedancia externa se realiza con la tensión y la corriente externa.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente la autoinducción resulta: $L_1 = 49.6 \text{ mHy}$.

El valor obtenido con el *tester*, $L_{1(1000)} = 52.3 \text{ mHy}$. La diferencia porcentual es 5.2%.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrollan una serie de métodos que permiten introducir a los estudiantes en los fenómenos de inducción magnética en aire, como así también la operación de instrumentos como el osciloscopio y el generador de funciones. El abordaje del tema no llega a ser completo, por la falta de materiales magnéticos contemplados en la inducción magnética, quedando este tema para un próximo trabajo. Si bien el trabajo es extenso, permitirá a los estudiantes elegir los puntos que más les interesen y utilizar este material propuesto, como guía. Esto facilitará realizar un amplio debate sobre la inducción magnética, entre estudiantes y docentes, en donde se puede discutir el porqué del tema elegido.

Los valores del coeficiente de autoinducción, de las 3 bobinas: 2 planas y una solenoide, fueron medidas con un *tester*, en todos los casos el valor teórico resultó inferior al valor medido con este instrumento (Tabla I).

Las mediciones del coeficiente de acoplamiento mutuo, los cálculos teóricos y los coeficientes de acoplamiento experimentales y teóricos, se hicieron para 3 frecuencias y 9 distancias entre bobinas, considerando sus ejes colineales. Los resultados se muestran en la Tabla III obteniéndose muy buena correlación entre la teoría y la experiencia.

Para observar el efecto de aumento de frecuencia en la medición del M, se utilizó una frecuencia de 10 kHz, observándose un alto nivel de ruido, ver Figura 5. El resultado obtenido del $M = 0.072 \text{ mHy}$ contra $M = 0.065 \text{ mHy}$ a baja frecuencia, da buena correlación. El principal limitante en esta medición es el ruido, que hace poco conveniente medir a alta frecuencia.

Se midió el acoplamiento mutuo entre bobinas 1 y 2 con ejes paralelos a 2 distancias obteniéndose un valor de M de 2.7 mHy (0.05 m) y de 0.68 mHy (0.10 m), valores muy similares a ejes colineales de 3.27 mHy (0.05 m) y de 0.502 mHy (0.10 m). Ver Figura 6 y Tabla V.

Para evaluar el efecto de un blindaje sobre el acoplamiento mutuo se colocaron las bobinas 1 y 2 colineales a 0.10 m entre sí y se interpuso un blindaje de distintos materiales entre las mismas como: cobre, aluminio y hierro. Los resultados muestran que el efecto de blindaje aumenta con el tipo de materiales en el orden indicado anteriormente, disminuyendo a la mitad con el hierro respecto a sin blindaje. Ver Figura 7 y Tabla VI.

El efecto de poner los ejes perpendiculares entre bobinas dio lugar a un muy bajo acoplamiento entre las mismas, los resultados se ven en la Figura 8 y en la Tabla VII.

El método por el que se puede tener mínima señal en cualquier punto del espacio, permite trazar, tomando el diámetro de la bobina como marcación, una serie de puntos que constituyen una suerte de línea de campo magnético, según puede apreciarse en la Figura 9. El valor del acoplamiento, que es muy pequeño, se expresa en la Tabla VIII.

La medición del acoplamiento entre la bobina 2 y el solenoide, bobina 3, presenta una serie de casos particulares. Uno es que el valor del campo magnético en el extremo del solenoide, vale la mitad del valor del campo en el centro del eje longitudinal del solenoide. El otro caso interesante es el valor del campo en el lateral del solenoide. En general al aplicar la ley de Ampere, se considera a este último tramo con campo igual a cero, pero en la realidad se observa que el valor es aproximadamente 20 veces menos que el centro. Ver Figuras 10, 11 y 12. En la Tabla IX se pueden observar los resultados mencionados.

La medición de la frecuencia de resonancia propia de la bobina 2, como circuito paralelo, entre su coeficiente de autoinducción L y de la capacidad total, formada por la capacidad parásita sumada a las capacidades externas, nos permite medir la capacidad parásita, producto de la capacidad entre espiras. En este

caso la medición de la resonancia se obtiene por el valor máximo de tensión medido sobre la bobina. La Figura 13 permite ver el pico resonante de la bobina y el posterior cálculo de la capacidad parasita.

La resonancia de la bobina 1 se midió por corriente mínima, dado que como en el caso anterior, el circuito también es un circuito resonante paralelo. En esta ocasión al no tener capacidades externas en paralelo, la resonancia se produce directamente con la capacidad distribuida. Los valores obtenidos de la misma en ambas bobinas son muy similares dada que la construcción es igual. Ver Figura 14.

Para completar los métodos de medición del coeficiente L de una bobina, se midió el valor del mismo en la bobina 1 y la 3 por el método de crecimiento de la corriente en un circuito RL en régimen transitorio, este estado de un circuito forma parte de los temas dados en la materia Física III. Los resultados obtenidos están dentro del 7 % de diferencia respecto de las mediciones realizadas con el *tester* digital. Ver Figuras 15 y 16.

Otro método empleado en la medición del coeficiente L de la bobina 1 fue la medición de la fase entre la tensión y la corriente de un circuito RL en corriente alterna con señal senoidal. Se utilizó una frecuencia de 400 Hz, muy lejos de la frecuencia de resonancia de 74 kHz, por lo tanto el efecto de la capacidad parasita puede ser despreciado. En este caso, ver Figura 17, dio por resultado un valor similar al anterior y está dentro del 6 %.

La correlación que existe entre la teoría, en el ámbito en donde pudo ser calculada, (ejes axiales) y el resultado experimental corroboran las posibilidad de utilizar las ecuaciones mencionadas para el cálculo de dispositivos de uso en ingeniería antes de su construcción definitiva.

REFERENCIAS

Alonso, M. y Finn, E. (1970). *Física* Vol. 2. México: Fondo Educativo Interamericano.

Edminister, J. y Nahvi, M. (1997). *Circuitos Eléctricos*. McGraw Hill.

Teman, F. (1952). *Ingeniería electrónica y de radio*. Argentina: ARBO.

Young, H. D. y Freedman, R. A. (2009). *Física universitaria con física moderna*. Vol. 2. México: Pearson Educación.