

# Óptica del Arco Iris

## Rainbow Optics

**Fulvio Andres Callegari, Agnaldo Aparecido Freschi**

*Universidade Federal do ABC, UFABC. Avenida dos Estados, 5001. Bairro Santa Terezinha, Santo André. CEP 09210-580. São Paulo. Brasil*

**E-mail:** fulvio.callegari@ufabc.edu.br

REVISTA  
DE  
ENSEÑANZA  
DE LA  
FÍSICA

(Recibido el 25 de octubre de 2016; aceptado el 15 de febrero de 2017)

### Resumen

Las características fundamentales y bien conocidas del arco iris son explicadas utilizando la ley de Snell de la refracción y consideraciones geométricas simples respecto de la interacción entre luz blanca en la forma de rayos y una gota esférica de agua. Son explicados el orden de los colores y el porqué de la forma de arco. También es considerado el tamaño angular del arco respecto a la posición del sol y se estudia la formación del arco iris secundario.

**Palabras clave:** Dispersión cromática; Arco iris; Óptica de rayos.

### Abstract

The fundamental and well known characteristics of rainbows are explained using Snell's law of refraction and simple geometric considerations involving interaction between white light in the form of rays and a raindrop of water. The sequence of colors and the form of the arc were derived. Also, considerations are presented about the size of the arc and the formation of the secondary arc.

**Keywords:** Chromatic dispersion; Rainbows; Ray optics.

## I. INTRODUCCIÓN

Es sabido que el fenómeno del arco iris se debe a la dispersión cromática, que es la variación del índice de refracción de los medios materiales (en este caso específico, del agua) como función de la longitud de onda de la radiación, la cual, en la región visible del espectro electromagnético, corresponde a los diferentes colores que se observan en la naturaleza. De esa forma, la luz del sol incidiendo en gotas de agua esféricas en un día de lluvia, es descompuesta, o refractada, en diferentes direcciones de acuerdo con la ley de Snell, lo que resulta en los diferentes colores observados en este fenómeno.

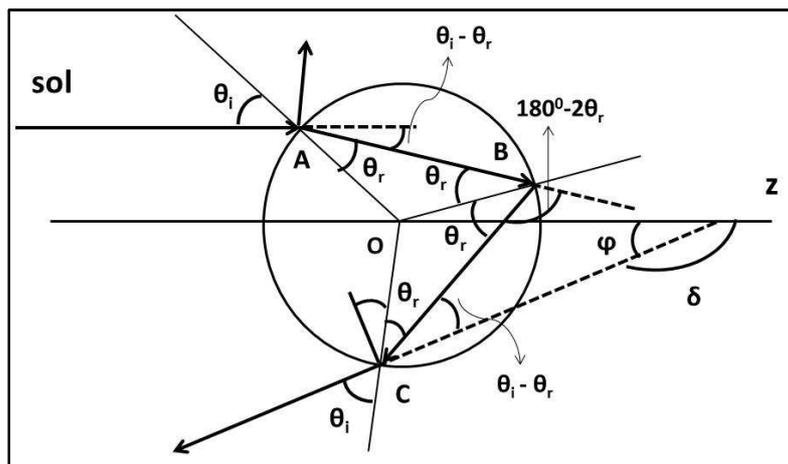
A pesar de poder ser estudiado apenas con principios básicos, una descripción detallada de la formación del arco iris no se encuentra en la bibliografía básica usualmente recomendada al estudiante de los cursos básicos de óptica. Por ejemplo, en Young y Freedman (2016) apenas unas pocas líneas son dedicadas al tema; los ángulos de refracción finales para los colores extremos del arco iris primario y secundario son mostrados, pero no se explica el papel fundamental de la dispersión cromática para llegar cuantitativamente a esos resultados. Lo mismo sucede en Serway y Jewett (2014). En un texto más avanzado, (Hetch, 2002) el tema ni siquiera es mencionado. Por otro lado, ha sido tratado en profundidad en diversas publicaciones científicas (Nussenzvieg, 1969; Walker, 1976; Mobbs, 1979; Casini y Covello, 2012). Sin embargo, estos artículos pueden ser de difícil lectura para los alumnos universitarios principiantes y también, algunas deducciones básicas son simplemente dejadas de lado. Pensamos por eso que es una buena oportunidad para, inspirados por estas publicaciones, desarrollar una descripción detallada y que explique ciertas características bien conocidas del arco, como por ejemplo: ¿por qué el color rojo aparece en la parte superior del arco y el color violeta en la parte inferior? ¿Por qué tiene forma de arco? Son deducidos los ángulos a los cuales se observan los colores extremos del arco. También, es discutida la formación del arco iris secundario y su orden específico de colores.

El formalismo desarrollado en este trabajo tiene el rigor suficiente para responder esas preguntas, ofrecer resultados numéricos y, al mismo tiempo, puede ser presentado en una clase especial o seminario,

conociendo apenas la ley de Snell de la refracción, nociones básicas de geometría y el concepto de variación del índice de refracción del agua con la longitud de onda (dispersión cromática).

## II. INTERACCIÓN ENTRE UN RAYO DE LUZ Y UNA GOTA DE AGUA

Vamos a considerar la interacción entre un rayo de luz proveniente del sol y una gota de agua con forma esférica. Consideremos la figura 1, donde se asume la propagación de la luz del sol en la horizontal (dirección  $z$ ), es decir, con el sol en el horizonte. Consideramos este caso primero por ser el que brinda el análisis cuantitativo más simple, además de ser un caso compatible con la realidad. Posteriormente, rotando la figura (respecto a un eje perpendicular al plano de la página, y pasando por "O"), podrán ser visualizados los resultados para cualquier otra posición del sol.



**FIGURA 1.** Interacción entre una gota esférica de agua y un rayo de luz proveniente del sol, para ángulos de incidencia,  $\theta_i$ , entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Tenemos refracción en el punto A, reflexión en el punto B y refracción en el punto C. El ángulo total de desvío entre los rayos incidente y reflejado por la gota es  $\delta$  (en este contexto, entender por reflejado el rayo transmitido en C).

En la figura 1, el rayo incide en el punto A, con ángulo de incidencia  $\theta_i$ . Recordemos que para aplicar la ley de Snell, los ángulos deben ser medidos respecto de la normal a la interface en el punto de incidencia, ver, por ejemplo, Hetch (2002). En este caso, la normal (prolongada hacia el interior de la gota) coincidirá con el radio de la esfera (recta AO, siendo el punto O el centro de la esfera). El rayo se refracta (transmite) en A, con un ángulo  $\theta_r$ , dado por la ley de Snell:

$$n_{ar} \sin \theta_i = n_{H_2O} \sin \theta_r. \tag{1}$$

Consideraremos el índice de refracción del aire,  $n_{ar} = 1$ . El índice de refracción del agua es representado por  $n_{H_2O}$ .

Junto con la refracción, parte de la energía incidente es reflejada en el punto A, como indica la figura 1, pero esto no tiene consecuencias en nuestro estudio, por lo que no será considerado. El rayo refractado en A va a sufrir reflexión en el punto B, donde incide con un ángulo de incidencia  $\theta_r$ , idéntico al ángulo de refracción en el punto A. Esto es evidente en la figura 1, donde vemos que las normales a la superficie de la esfera coincidirán con el radio de ésta, formando un triángulo isósceles con vértices en los puntos A, B, y O, siendo la base del triángulo formada por la recta que describe la propagación del rayo del punto A al punto B. En el punto B, el rayo será reflejado (y también transmitido, pero esto no interfiere en nuestro estudio), con ángulo de reflexión igual al ángulo de incidencia,  $\theta_r$  (ley de la reflexión). Finalmente, en el punto C, el rayo incide con ángulo  $\theta_r$ , (como ya se ha explicado), y sufre transmisión, abandonando la gota esférica con ángulo  $\theta_i$ , el cual es idéntico al ángulo de incidencia en el punto A. Esto puede ser fácilmente entendido aplicando la ley de Snell en el punto C y el principio de reversibilidad de los rayos. Observar que, si consideramos los rayos de luz incidiendo en la totalidad de la sección recta de la esfera (que será siempre el caso), el ángulo de incidencia varía entre  $-90^\circ$  y  $90^\circ$ . Inicialmente consideraremos apenas la variación entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Como consecuencia, la gota esférica de agua produce un haz de luz reflejado que forma un cono con ángulo  $\varphi$  respecto a la dirección horizontal (ver figura 1). Es la luz transmitida en el punto C la cual estará en la línea de visión de un observador situado "por debajo" (en nuestro caso especí-

fico de estudio, las gotas de agua estarán a una cierta altura y el observador en el suelo), por este motivo, no son consideradas reflexiones/transmisiones más allá del punto C). Más adelante, y para radiación incidiendo con ángulos  $\theta_i$  entre  $-90^\circ$  y  $0^\circ$ , será considerada una reflexión más dentro de la gota, lo cual explica la formación del arco iris secundario. En ambos casos, considerar reflexiones posteriores da origen a más arcos (llamados arcos de orden superior, 3, 4, etc.), los cuales pueden ser observados en laboratorio, (Casini y Covello, 2012). La clave para entender la formación del arco iris consiste en el estudio de la variación del ángulo  $\varphi$ . Vamos a escribirlo como:

$$\varphi = 180^\circ - \delta. \quad (2)$$

Es oportuno aclarar aquí que los ángulos  $\varphi$  y  $\delta$  son siempre medidos respecto al eje z, independientemente de la posición del sol. Ahora, expresemos el ángulo  $\delta$  como función de  $\theta_i$  e  $\theta_r$ . Es fácil ver, sumando las desviaciones (ángulos) parciales detalladas en la figura 1, que el valor del ángulo  $\delta$  es:

$$\delta = 180^\circ + 2\theta_i - 4\theta_r. \quad (3)$$

Substituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2), el ángulo del cono es:

$$\varphi = 4\theta_r - 2\theta_i. \quad (4)$$

Para continuar el análisis, debemos expresar el ángulo  $\varphi$  como función apenas del ángulo  $\theta_i$ . Para eso, a partir de la ecuación (1), obtenemos:

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{\text{H}_2\text{O}}}\right). \quad (5)$$

Reemplazando la ecuación (5) en la ecuación (4):

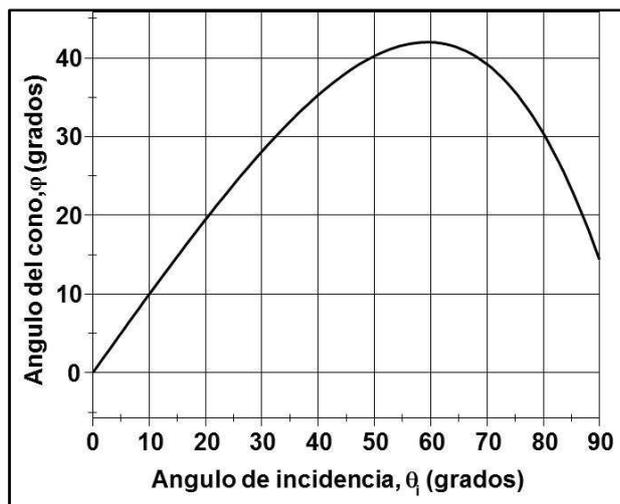
$$\varphi = 4 \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{\text{H}_2\text{O}}}\right) - 2\theta_i. \quad (6)$$

A partir de la ecuación (6), vamos a dar al ángulo  $\theta_i$  valores entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y observaremos el comportamiento del ángulo  $\varphi$ , consideraremos, para  $n_{\text{H}_2\text{O}}$ , un valor de 1,333. Los valores obtenidos pueden ser vistos en la tabla I.

**TABLA I.** Angulo del cono  $\varphi$  en función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ .

Angulo de incidencia $\theta_i$ (grados)	Angulo del cono $\varphi$ (grados)
0	0
10	9,94
20	19,47
30	28,12
40	35,32
50	40,31
60	42,07
70	39,30
80	30,51
90	14,43

Vemos que el valor del ángulo  $\varphi$  presenta un máximo como función del ángulo de incidencia. Esto también puede ser observado haciendo un gráfico de la ecuación (6), el cual se muestra en la figura 2.



**FIGURA 2.** Gráfico que muestra la relación entre el ángulo del cono de luz reflejada en función del ángulo de incidencia, de acuerdo con la ecuación (6). Fue utilizado para el índice de refracción el valor  $n=1.333$ .

Vamos a encontrar entonces ese máximo en forma general haciendo la derivada de la ecuación (6) respecto del ángulo  $\theta_i$  e igualar a cero;

$$\frac{d\varphi}{d\theta_i} = -2 + \frac{4 \times \left( \frac{\cos \theta_i}{n_{H_2O}} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sin \theta_i}{n_{H_2O}} \right)^2}} = 0. \tag{7}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{2n_{H_2O}}{\cos \theta_i} = \frac{4}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sin \theta_i}{n_{H_2O}} \right)^2}}. \tag{8}$$

Con algunos pasos elementales, llegamos a:

$$\sqrt{\left( \frac{1}{\cos \theta_i} \right)^2 - \left( \frac{\tan \theta_i}{n_{H_2O}} \right)^2} = \frac{2}{n_{H_2O}}. \tag{10}$$

Utilizando la identidad  $\frac{1}{(\cos \theta_i)^2} = 1 + (\tan \theta_i)^2$  en la ec.(10):

$$\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n_{H_2O}^2}\right) \tan^2 \theta_i} = \frac{2}{n_{H_2O}}. \tag{11}$$

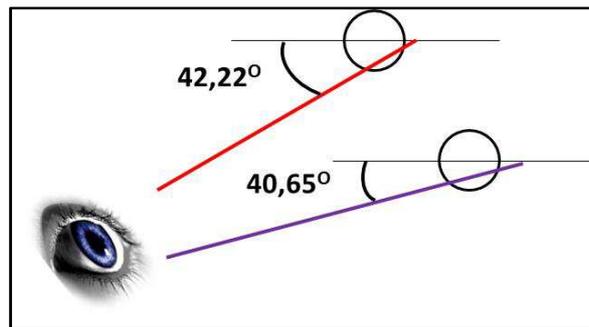
A partir de la ecuación (11), elevando al cuadrado los dos términos y con un poco de álgebra, es trivial llegar a:

$$\tan \theta_i = \sqrt{\left( \frac{4 - n_{H_2O}^2}{n_{H_2O}^2 - 1} \right)}. \tag{12}$$

Esta expresión representa el ángulo de incidencia para el cual el ángulo  $\varphi$  del cono de luz reflejada por la gota de agua es máximo.

### III. FORMACION DEL ARCO IRIS

Debido a la dependencia del índice de refracción del agua,  $n_{H_2O}$ , con la longitud de onda, es decir, con el color de la luz, los valores máximos del ángulo del cono serán diferentes para los diferentes colores, y aquí está la clave para entender con precisión la formación del arco iris y su orden específico de colores. Vamos a calcular el ángulo máximo del cono para las longitudes de onda correspondientes al violeta,  $\lambda = 404$  nm, y rojo,  $\lambda = 633$  nm. Consideraremos esos colores como los dos extremos do espectro visible. Los índices de refracción del agua para esas longitudes de onda son:  $n_{VIOLETA}=1.343$ ,  $n_{ROJO} = 1,332$ , (Casini y Covello, 2012). Calculamos primero los ángulos de incidencia correspondientes a los máximos ángulos del haz de luz reflejado por la gota. Usando la ecuación (12);  $\theta_{VIOLETA} = 58.83^\circ$ , y  $\theta_{ROJO} = 59.47^\circ$ . Reemplazando esos valores en la ecuación (6), y utilizando el índice de refracción del agua específico para cada longitud de onda, obtenemos los valores de los ángulos máximos del cono para cada color:  $\varphi_{MAXVIOLETA} = 40.65^\circ$ , e  $\varphi_{MAXROJO} = 42.22^\circ$ , lo que explica a distribución angular de los colores en el arco iris, como se muestra en la figura 3.

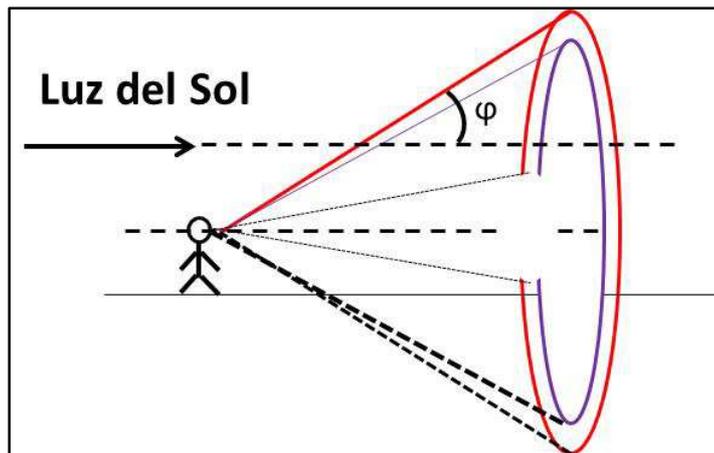


**FIGURA 3.** Posición angular de los colores extremos del arco iris. Los ángulos no están en escala.

Los diferentes colores son observados con nitidez porque, para aquellos ángulos específicos, apenas el color correspondiente está presente. Además, las intensidades relativas presentan un máximo en el ángulo correspondiente,  $\varphi_{MAX}$ , (Casini y Covello, 2012).

Debemos suponer el espacio uniformemente cubierto de gotas de agua esféricas (condición de lluvia). Si el observador mira en una dirección que subtienda un ángulo mayor que  $42,22^\circ$  respecto a la horizontal, ningún efecto relativo al arco iris será observado (recordar que ese valor de  $\varphi$  es máximo, no existe haz de luz reflejada para ángulos mayores). En la dirección correspondiente al ángulo  $\varphi = 42,22^\circ$ , será observado el color rojo, que aparece en la parte superior del arco iris. Para ángulos menores, aparecerán los otros colores, hasta que por último, en la parte inferior del arco (correspondiente a  $\varphi = 40,65^\circ$ ) será observado el color violeta. Vale aclarar que, al observar en estas direcciones, la figura del arco es debida a las contribuciones de millares de pequeñas gotas esféricas distribuidas en el espacio y que están en la línea de visión del observador.

Estamos en condiciones de responder la pregunta sobre la forma circular característica do arco. Es debido a la simetría mostrada en la figura 3. Considerando que el espacio está uniformemente poblado con gotas esféricas, los ángulos mostrados son válidos no solo para el plano mostrado en la figura, sino para todo el espacio. Para visualizar la situación, deberíamos “rotar” la figura 3 en torno a una línea horizontal que pase por el observador. La situación resultante es observada en la figura 4, donde, vale aclarar una vez más, los rayos de luz incidentes están en la dirección del eje z.

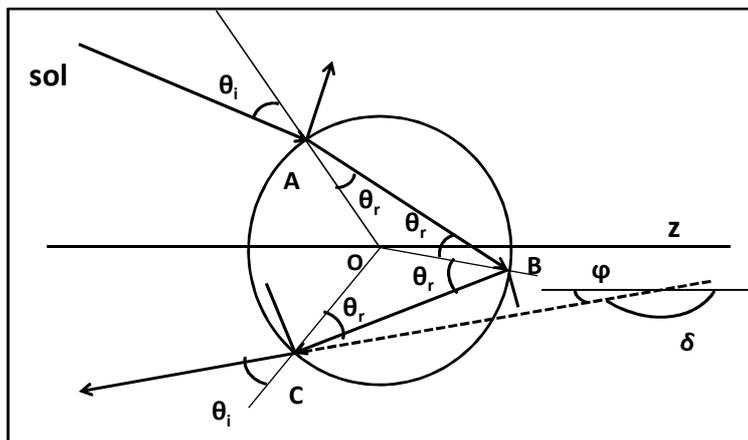


**FIGURA 4.** Forma circular del arco iris. Si se da el caso de alguna región que carezca de agua, aquella parte del arco no será observada.

Claramente, apenas se observa la parte del arco que está por encima del suelo. En situaciones especiales, como al borde de un precipicio o desde un avión, se puede observar el arco completo. Observando la figura 4 llegamos a la conclusión de que el centro del arco se situará en una línea que pasa por los ojos del observador y es paralela a los rayos de luz incidentes. También se ilustra en la figura 4, el caso frecuentemente observado en el cual alguna región en la línea de observación, en los ángulos correspondientes al arco, carece totalmente de agua. En este caso, la parte correspondiente del arco no será visible debido a la ausencia de gotas que refracten la luz del sol.

En este punto nos podríamos preguntar qué observaríamos si el ángulo entre nuestra línea de visión y la horizontal fuese menor que  $40,64^\circ$ , es decir, en la parte interna del arco. En este caso, todas las longitudes de onda están siendo reflejadas por las gotas, lo que resulta en la percepción de luz blanca. A esto se debe la característica bien conocida de la parte interna del arco iris ser más clara que la parte externa.

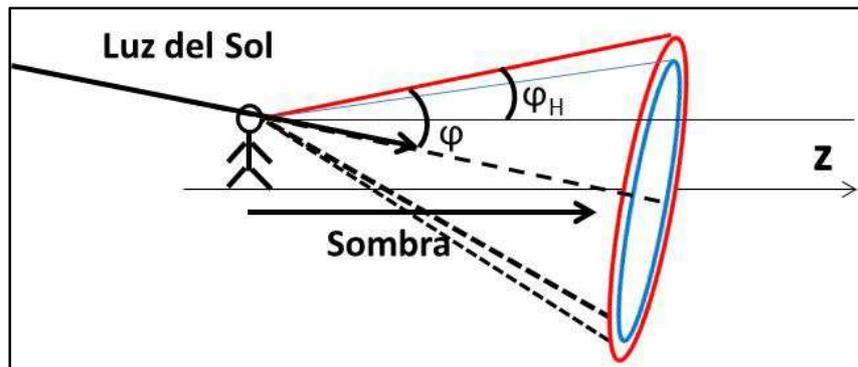
Otra conclusión que extraemos de este estudio es que, para observar el arco iris, el sol debe estar a nuestras espaldas. Nuestra deducción consideró el sol posicionado exactamente en el horizonte, de tal forma que los rayos incidentes en las gotas son paralelos a la superficie de la tierra. Cuando el sol se eleva sobre el horizonte la situación cambia como muestra la figura 5.



**FIGURA 5.** Geometría de las reflexiones de la luz en la gota de agua para incidencia no horizontal.

Como ya fue mencionado anteriormente, la figura 5 es obtenida a partir de la figura 1 por rotación respecto de un eje perpendicular a la página que pasa por el centro “O” de la gota. De esta forma los ángulos  $\theta_i$  e  $\theta_r$  no cambian. Sin embargo, de la figura 5, podemos observar cualitativamente que el ángulo  $\delta$  aumenta y el ángulo  $\varphi$  disminuye respecto a los valores que tenían en la figura 1. Esto sucede porque esos ángulos son medidos entre la línea de visión del observador (que coincidirá con la dirección del rayo que abandona la gota en el punto “C”), y la horizontal. La disminución del ángulo  $\varphi$  significa que el tamaño del arco iris va a disminuir. También es útil mencionar el valor del ángulo  $\varphi$  permanecerá como calculado, si es medido entre la línea de visión del observador y la dirección de incidencia de los rayos del sol (cualquiera que esta sea). Para visualizar mejor este caso, podemos pensar en una línea imaginaria

que va desde nuestro punto de visión hasta el punto correspondiente de nuestra sombra (esta línea indica la dirección de incidencia del sol), como se muestra en la figura 6.



**FIGURA 6.** Disminución del tamaño del arco con la elevación del sol

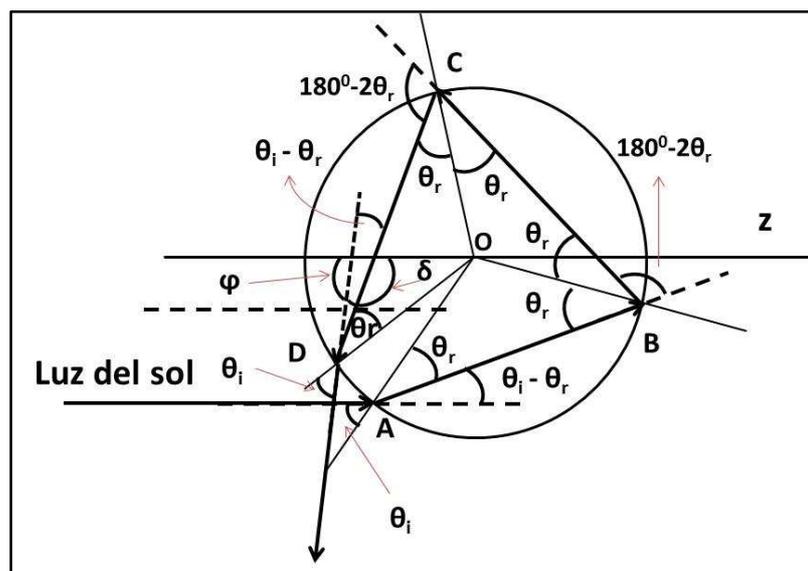
En la figura 6 y para evitar confusiones, denotamos ahora como  $\varphi_H$  el ángulo correspondiente entre nuestra línea de visión y la horizontal. Observar que, cuando la luz del sol tiene la dirección horizontal (eje z), los ángulos  $\varphi$  y  $\varphi_H$  son iguales. Cuando el sol comienza a elevarse en el horizonte el ángulo  $\varphi_H$  comienza a disminuir, lo que hace que veamos la extremidad superior del arco a una altura menor.

Cuando el sol alcance una altura sobre el horizonte de tal forma que sus rayos formen un ángulo (respecto a la horizontal) mayor que  $\sim 42,22^\circ$ , en general no será posible ver el arco iris (a no ser que haya gotas de lluvia uniformemente distribuidas a muy baja altura, o a nuestros pies (en este último caso, y con el sol en su cénit, sería posible ver el arco entero y nosotros como centro).

De todo lo anterior concluimos también que la formación del arco iris es un fenómeno subjetivo, esto significa que cada observador verá un arco iris cuyo centro estará en una línea imaginaria, que pasa por los ojos y es paralela a los rayos incidentes provenientes del sol.

#### IV. FORMACION DEL ARCO IRIS SECUNDARIO

En algunas ocasiones, cuando la distribución de las gotas de agua debido a la lluvia ocupa volúmenes considerables en el espacio, es posible observar el arco iris secundario, a una altura mayor que el primario. Para estudiar la geometría de este arco, debemos tener en cuenta una reflexión más en el interior de la gota, como se muestra en la figura 7.



**FIGURA 7.** Geometría de las reflexiones de la luz en la gota de agua que dan origen al arco secundario.

La luz incide en el punto A, sufre una primera refracción, luego es reflejada en los puntos B y C y finalmente se refracta en el punto D. También tenemos refracciones en B y C, así como reflexiones en A y D, pero estos rayos no influyen en nuestro estudio. Debemos, una vez más, determinar el ángulo del cono de luz reflejado  $\varphi$ ; para ello, primero calculamos el ángulo  $\delta$ , debemos aplicar el mismo procedimiento que nos llevó a la ecuación (3). En este caso, al hacer los cálculos, debemos prestar atención al hecho de que el ángulo de incidencia  $\theta_i$  es negativo. El ángulo  $\delta$  es:

$$\delta = 360^\circ - 6\theta_r + 2\theta_i = 2\theta_i - 6\theta_r. \quad (13)$$

De la figura 7, como  $\varphi = 180^\circ - \delta$ , obtenemos:

$$\varphi = 180^\circ + 6\theta_r - 2\theta_i. \quad (14)$$

Ahora, debemos reemplazar la ecuación (5) en la ecuación (14):

$$\varphi = 180^\circ + 6 \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{H2O}}\right) - 2\theta_i. \quad (15)$$

Una vez más, para encontrar el valor máximo de  $\varphi$ , debemos hacer la derivada de la ecuación (15) con respecto al ángulo  $\theta_i$  e igualar a cero. Los cálculos son formalmente idénticos a los desarrollados en el caso del arco iris primario, excepto por factores numéricos. La ecuación (15) tiene un valor máximo de  $\varphi$  para el ángulo de incidencia,  $\theta_i$ , tal que:

$$\tan \theta_i = \sqrt{\left(\frac{9 - n_{H2O}^2}{n_{H2O}^2 - 1}\right)}. \quad (16)$$

Calculemos los ángulos correspondientes a las longitudes de onda violeta y roja, utilizando índices de refracción ya utilizado en la sección 3. Los resultados son (módulo):  $\theta_{\text{VIOLETA}} = 71.52^\circ$ , e  $\theta_{\text{ROJO}} = 71.87^\circ$ , colocando estos valores en la ecuación (15), con signo negativo, tenemos, para el ángulo del cono  $\varphi_{\text{MAXVIOLETA}} = 53.48^\circ$ , y  $\varphi_{\text{MAXROJO}} = 50.63^\circ$ . Los ángulos subtendidos son mayores, como se esperaba, lo que indica que el arco secundario es mayor. Notamos también ahora que el color violeta subtende un ángulo mayor que el color rojo, al contrario del caso con el arco primario. Esto indica que el orden de los colores en el arco secundario se invierte, lo que efectivamente se observa en la naturaleza.

Todos los valores numéricos calculados en este trabajo de los ángulos máximos  $\varphi$  para los colores extremos, tanto para el arco iris primario como el secundario, coinciden con los presentados en Young y Freedman (2016).

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo, a partir de consideraciones geométricas simples y utilizando la ley de la Snell de la refracción, las características principales del arco iris fueron explicadas; forma circular y orden de colores. También se hicieron consideraciones sobre la dependencia del tamaño del arco con la posición del sol y la formación del arco secundario.

## REFERENCIAS

Casini, G. y Covello, A. (2012). The “rainbow” in the drop. *American Journal of Physics*. 80(11), pp. 1027-1034.

Hecht, E. (2002). *Optics*. USA: Pearson.

Mobbs, S. D. (1979). Theory of the Rainbow. *Journal of Optical Society of America*. 69(8), pp. 1089-1092.

Nussenzveig, H. M. (1969). High Frequency Scattering by a Transparent Sphere. II. Theory of the Rainbow and the Glory. *Journal of Mathematical Physics* 10, pp. 125-176.

Serway, R. y Jewett, J. (2014). *Physics for Scientists and Engineers with modern Physics*. Boston: Brooks/Cole.

Walker, J. D. (1976). Multiple rainbows from single drops of water and other liquids. *American Journal of Physics* 44(5), pp. 421-433.

Young, H. y Freedman, R. (2016). *Sears & Zemansky's University Physics with modern Physics*. USA: Pearson.