# TRASLACION Y ROTACION SIMULTANEAS

CUDMANI, CARLOS
Independencia 1800 - 4000 Tucumán

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología - Universidad Nacional de Tucumán

*RESUMEN*

*En este trabajo se propone aclarar algunos aspectos confusos de un ejemplo muy conocido: El estudio del movimiento sobre un plano horizontal de un cilindro de masa M y radio R que rueda sin deslizar bajo la acción de una fuerza F aplicada sobre él.*

*El tratamiento que la mayoría de los textos hacen de este problema es casi siempre incompleto, lo que ocasiona que no sólo los estudiantes sino también los docentes tengan dificultades en su aprendizaje. Su estudio requiere, en efecto, una clara y profunda comprensión de los axiomas fundamentales de la dinámica, en un modelo en el cual, la fuerza de roce y la geometría del cuerpo deben ser considerados. Se presenta entonces una excelente situación problemática para integrar los temas de esta importante rama de la Física.*

*ABSTRACT*

*The purpose of this work is to clarify some confusional points of a well known example: The study of the rotation without sliding on a horizontal plane, of a cylinder of mass M and radius R under the action of a force F.*

*Most of the textbooks frecuently develop incompletely this problem causing difficulties not only to the students but also to the teachers. In fact, its study riquires a clear and deep understanding of the fundamental axioms of dynamics, in a model in which the frictional force and geometry must be considered.*

*We believe that this is an excellent problem to integrate the ideas of this important branch of Physics.*

Cuando en Mecánica se aborda el tema de la traslación y rotación simultáneas de un cuerpo se presenta una excelente situación problemática para integrar los temas de esta rama de la Física.

En efecto, su estudio requiere una clara y profunda comprensión de los axiomas fundamentales de la dinámica, en un modelo en el cual, la fuerza de roce y la geometría del cuerpo deben ser considerados.

El docente tendrá además oportunidad de analizar si las conocidas preconcepciones sobre la segunda y tercera ley de Newton han sido superadas.

Sin embargo, el tratamiento que la mayoría de los textos hacen de los ejemplos sobre el tema, son a menudo incompletos, lo que ocasiona que, no sólo los estudiantes sino también los docentes tengan dificultades para su comprensión. En la práctica docente, he tenido oportunidad de comprobar estas confusiones, no sólo en las evaluaciones de los cursos de Física para estudiantes de Física e Ingeniería, sino también en los docentes auxiliares y aún en las clases de concurso de los profesores.

En este trabajo se propone entonces, aclarar algunos aspectos confusos de un ejemplo, no por muy conocido, suficientemente bien comprendido. Se trata del estudio del movimiento sobre un plano horizontal de un cilindro de masa $M$ y radio $R$, que rueda sin deslizar bajo la acción de una fuerza $F$ aplicada sobre él. Se piensa generalmente que, para que el cilindro ruede sin desdlizar sobre el plano es imprescindible que haya una fuerza horizontal de contacto sobre el cilindro (fuerza de roce). Esto es absolutamente cierto si la fuerza aplicada pasa por el centro de masa del cilindro. Sin embargo, si ella se aplica a una distancia $r$ de dicho centro convenientemente elegida, puede el cilindro rodar sin deslizar aún en ausencia de la fuerza de contacto mencionada.

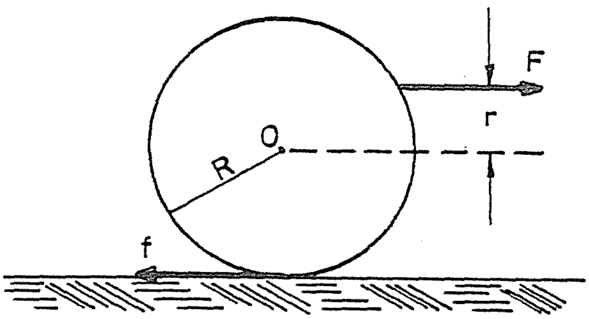


Figura 1

En la figura 1 se ha indicado con $f$ a esta fuerza (No se indica el peso del cilindro ya que es compensado por la reacción del plano). Aplicando ahora las leyes de la Dinámica (para la traslación y la rotación) y teniendo en cuenta que debe cumplirse la relación $a=\eta R$ donde $\eta$ es la aceleración angular y $a$ la aceleración del centro de masa del cilindro, se obtiene:

$$a=\frac{2}{3}\,\frac{F}{M}\,(1+\frac{r}{R})$$

$$f=\frac{F}{3}\,(1-\frac{2r}{R})$$

La segunda de estas ecuaciones nos confirma nuestra afirmación de que el cilindro pueda rodar aún en un plano perfectamente liso. En efecto, ella nos dice que si $r = R/2$, resulta $f = O$, lo que significa que, en este caso la fuerza de roce no es necesaria. En estas condiciones resulta:

$$a = F/M$$

Lo que no debe sorprendernos ya que no habiendo una fuerza de contacto horizontal, la fuerza neta es igual a la fuerza aplicada.

También hemos afirmado que si la fuerza aplicada pasa por el centro de masa del cilindro, resulta imprescindible una fuerza de roce para que el cilindro ruede sobre el plano. En efecto, en este caso, las ecuaciones anteriores se convierten:

$$a = 2/3\ F/M$$

$$f = 1/3\ F$$

ya que $r = 0$.

Es decir, que debe haber necesariamente una fuerza de roce que, en este caso, debe ser la tercera parte de la fuerza aplicada. Por otra parte, la aceleración resulta ser las dos terceras partes, de la que se obtiene cuando el plano es perfectamente liso.

Nos preguntamos ahora: ¿qué pasa en el caso en que la fuerza F se aplica a una distancia mayor que $R/2$? $(r>R/2)$

Es fácil ver que, en este caso, la aceleración es mayor que cuando no hay rozamiento. Pero, ¿cómo puede explicarse que la aceleración sea mayor cuando hay una fuerza de roce que cuando no la hay?. Esto se comprende, teniendo en cuenta que en este caso la fuerza de roce resulta negativa, es decir, cambia de sentido, dirigiéndose en el mismo sentido que la fuerza aplicada y por lo tanto la "ayuda" a ésta en lugar de oponérsele.

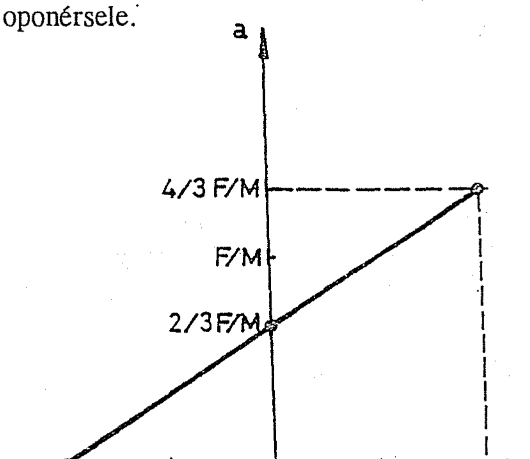


Figura 2

La Figura 2 muestra la variación de $a$ con $r$. Como dijimos, a partir de $r = R/2$, la aceleración se hace mayor que $F/M$, hasta llegar a valer $4F/3M$ cuando $r = R$.

Simultáneamente con $a$, debe aumentar $\eta$ (aceleración angular) para que se cumpla la condición $a = \eta R$ .

En consecuencia, debe aumentar también la cupla resultante. Esto en cambio, no parece tan evidente, ya que al cambiar de sentido la fuerza $f$, su par de rotación se opone al de $F$ (tiende a hacer girar el cilindro en sentido contrario). Sin embargo, el par de rotación es siempre positivo y crece desde cero para $r = -R$ hasta $2/3\ FR$ para $r=R$ (Figura 3).

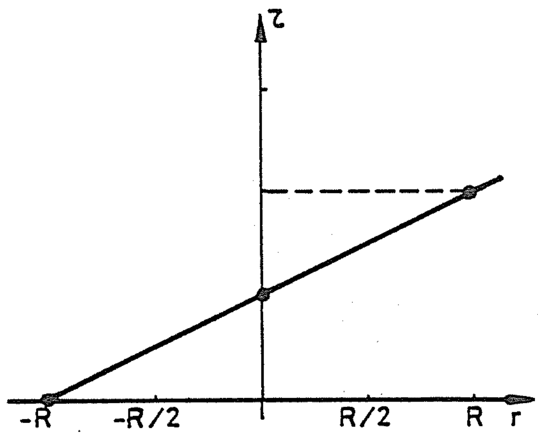

Figura 3

En efecto, el par de rotación resultante es:

$$\tau = F\,r + f\,R$$

Reemplazando el valor de $f$ dado por la ecuación (1) se obtiene:

$$\tau = F/3\ (r + R)$$

que justifica la Figura 3.

Las figuras 2 y 3 muestran también la variación de $a$ y de $\tau$ para valores negativos de $r$ (Fuerza aplicada por debajo del centro del cilindro).

Finalmente queremos señalar aquí que es muy frecuente ver en los textos de Física, que se aplica el principio de conservación de la energía mecánica para resolver problemas donde intervienen cuerpos con movimientos de traslación y rotación simultáneos, como por ejemplo el cálculo de la velocidad con que llega a la base de un plano inclinado, un cilindro que ruede desde la cúspide del mismo. Esto sorprende generalmente al estudiante, ya que se considera que se conserva la energía mecánica en un problema donde actúan fuerzas de rozamiento. Es evidente que la cuestión sólo podría aclararse si se demuestra que, en este caso, la fuerza de roce no disipa energía.

Calcularemos para ello, el trabajo total de la fuerza de roce.

En el movimiento de traslación, el trabajo de la fuerza de roce será:

$$W_1 = -f\,s$$

ya que la fuerza y el desplazamiento $s$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

Por otra parte, el par de rotación provocado por la misma fuerza ( $\tau = f\,R$) realiza un trabajo:

$$W_2 = \tau\,\phi$$

donde $\phi$ es el ángulo descripto al avanzar la distancia $s$.

En consecuencia:

$$W_2 = f\,R\,s\,/R = f\,s$$

y el trabajo total:

$$W = W_1 + W_2 = 0$$

Es decir, la fuerza de roce necesaria para producir rodamiento sin deslizamiento, no realiza trabajo y, en consecuencia, no disipa energía. Podrá decirse entonces que ella actúa como "transformadora" de energía cinética de rotación.

En efecto, como vimos, el trabajo total de la fuerza de roce consta de dos partes ($W_1$ y $W_2$). La parte negativa $W_1$ hace que la energía cinética traslacional $1/2\ Mv^2$ del cilindro cuando llega a la base del plano, sea menor que la que hubiera tenido si deslizara sin rodar. En cambio la parte positiva $W_2$ se convierte en energía cinética de rotación, ya que la cupla provocada por la fuerza de roce es la que impulsa el cilindro a girar.

Como $W_1$ y $W_2$ son iguales en valor absoluto, la energía cinética traslacional perdida se recupera como energía cinética rotacional.

## CONCLUSIONES FINALES

Desde hace varios años se viene trabajando el tema de esta manera en las clases de Física experimental I en la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (a cargo del autor) y los resultados obtenidos han sido excelentes ya que, en las evaluaciones finales se ha puesto de manifiesto una mejor comprensión del mismo. Por esta razón se ha incluido este desarrollo en la tercera edición de el libro: FISICA: MECANICA Y TERMODINAMICA (CUDMANI, Carlos E.). La primera y la segunda edición han sido publicadas por la Editorial Librería Universitaria. La tercera edición se encuentra en preparación. En el apéndice se incluye, como ejemplo, un cuestionario de examen sobre el tema.

### Referencias bibliográficas

CUDMANI, C. *"Sobre una propuesta para un examen final"*. Revista APFA, V 2, N°2, 1988.

### Apéndice

a- Traslación y rotación simultáneas. Cálculo de la aceleración y de la fuerza de roce para que no haya deslizamiento en función de la fuerza aplicada y de la posición en que se aplica.

b- 1 Un cilindro de radio $R$ rueda sobre una superficie horizontal ¿Cuánto vale en este caso la aceleración?. ¿Qué conclusiones saca?.

2 Analice esta afirmación: "Cuando la fuerza $F$ se aplica a una distancia

$$r > R/2$$

la fuerza de contacto cambia de sentido y colabora con $F$ en la cesión de cantidad de movimiento". De acuerdo con la afirmación anterior, la aceleración $a$ y consecuentemente $\eta$ deben aumentar.¿Cómo se entiende que $\eta$ aumente si para este caso, el par de rotación de $f$ se opone al de $F$?. Explique su respuesta.

c- Sobre una esfera de masa $M = 4{,}0\ kg$ y $R=10\ cm$ situada en un plano horizontal ($\mu=0{,}2$) se aplica una fuerza de $60N$ (horizontal y que pasa por el centro de masa de la esfera). ¿Rueda ésta sin deslizar?. Si su respuesta es negativa, calcule a qué distancia del centro de masa, debe aplicarse la fuerza de $60N$ para que la esfera ruede sin deslizar.