LAS MAREAS.

LORENZO MARCOS IPARRAGUIRRE

Facultad de Matemática Astronomía y Física (Fa.M.A.F.). Universidad Nacional de Córdoba.
Haya de la Torre y Medina Allende. Ciudad Universitaria. 5000. Córdoba.
E- mail: ipa@famaf.unc.edu.ar. TE. 0351-4334051/52/55; Fax: 0351-4334054.

RESUMEN

Con elementos de dinámica típicos de un curso de física básica universitaria se plantea y luego se resuelve un problema que debería ayudar a entender el mecanismo de las mareas. El problema propone el cálculo de la perturbación gravitatoria lunar en la superficie terrestre en tres situaciones simples diferentes, permitiendo identificar y comprender las denominadas "fuerzas de marea". Se discuten algunos aspectos con argumentos y enfoques que se consideran útiles para los profesores de Física.

ABSTRACT

By taking some elements of dynamics from a basic university physics course, it is formulated and them solved a problem that should help to understand the mechanism of tides. The problem proposes the calculation of the gravitatory perturbation of the moon on the terrestrial surface in three different simple situations, thus permitting identify and understand the so called "tidal forces". Some arguments, useful for the physics teachers, are also discussed.

INTRODUCCIÓN.

Podría decirse que la astronomía fue uno de los principales impulsores de la ciencia. Las actuales leyes de la Mecánica nacieron como respuesta a los interrogantes planteados por los movimientos observados de los astros, luego se desarrollaron para abarcar todos los ámbitos en los que hubiera movimientos, y sirvieron de base a todo el desarrollo científico actual. Ahora estas leyes forman parte de los contenidos de la enseñanza obligatoria en casi todas partes, los fenómenos celestes han sido extraordinariamente divulgados por los medios masivos de comunicación, y a pesar de ello la explicación de los más simples movimientos de los astros continúa, si no ignorada, plagada de interpretaciones superficiales y contradictorias, tanto para el público en general como para los alumnos de cualquier nivel y de casi cualquier carrera, y a veces también para muchos de sus profesores.

Un tema bastante complejo es el de las mareas. No obstante su complejidad consideramos que la aplicación de las leyes de la mecánica al esclarecimiento de sus aspectos básicos puede ser un interesante ejercicio para profesores y estudiantes de Física, y este trabajo es un intento de facilitarlo.

¿CÓMO SON LAS MAREAS? UN PROBLEMA.

La explicación básica de las mareas suele ser algo más o menos como: "**mareas**: movimiento periódico y alternativo de ascenso y descenso de las aguas del mar, producido por las acciones atractivas del Sol y de la Luna." (diccionario Espasa Calpe). Estas explicaciones suelen estar acompañadas de algunos esquemas como el que mostramos en la figura 1, indicando que bajo la influencia gravitacional de un astro "atractor", el agua se distribuye con dos abultamientos, o "pancitas", una hacia el astro, como se espera y otra apuntando en el sentido opuesto.

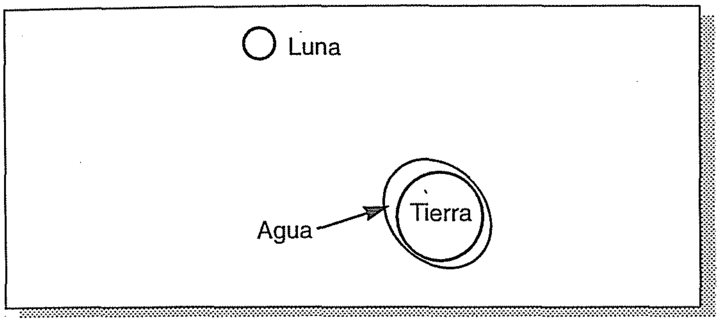


Fig. 1: figura explicativa habitual de las mareas.

Ahora bien, a partir de la idea básica de la atracción gravitatoria por parte de un astro, es difícil entender por qué el agua se eleva también en la parte de la Tierra opuesta al astro perturbador, ya que la noción de atracción sugiere la idea más o menos intuitiva y natural de que el agua del planeta, debido a sus posibilidades de movilidad con respecto a la masa sólida, sufre cierto desplazamiento hacia la Luna o el Sol (comenzaremos considerando **uno sólo** de estos astros para simplificar), como ilustra la figura 2.

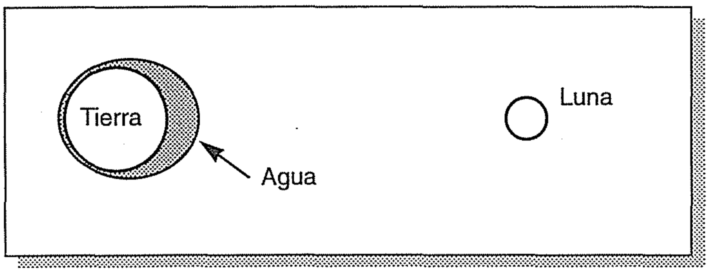


Fig. 2: una idea intuitiva y natural acerca del efecto que podría tener la atracción lunar sobre la distribución del agua en la Tierra.

Hay una contradicción entre las dos figuras. ¿Cómo podemos entender (figura 1) que la atracción lunar provoque una elevación del agua también en la parte opuesta de la Tierra? Y a la vez, si el fenómeno fuese como lo sugiere la figura 2, ¿cómo se entendería un desplazamiento del *agua con respecto a la masa sólida* de la Tierra, siendo que la Luna ejerce una atracción **también sobre esa masa sólida**?.

Tal vez la forma de obtener esa configuración del agua sería planteando una de esas situaciones escolares ideales, en la cual, por ejemplo, se definieran agentes externos que aplicándoles fuerzas a la Luna y la Tierra, a cada una en su parte sólida, las retuvieran inmovilizadas en esas posiciones equilibrando sus mutuas atracciones gravitatorias (ver figura 3). En estas condiciones parecería natural que la gravitación Lunar tendiera a deformar la masa líquida (sobre la cual no actúa directamente el agente externo) de la manera mostrada.

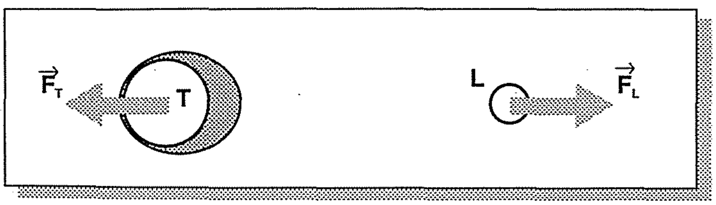


Fig. 3: si fuera posible inmovilizar la Luna y la Tierra equilibrando sus atracciones gravitacionales por medio de hipotéticas fuerzas como las mostradas, aplicadas en sus respectivos cuerpos sólidos por "agentes exteriores", el efecto gravitacional de la Luna sobre la masa de agua terrestre, perturbando al efecto principal de la Tierra, determinaría un desplazamiento general de la masa líquida como el que se muestra exageradamente.

Ahora bien, siendo que no existen los agentes externos capaces de aplicar estas hipotéticas fuerzas e inmovilizar los astros, no deberíamos esperar este efecto. ¿Y qué debemos esperar? ¿Podemos, como profesores o alumnos de Física, elaborar un razonamiento para explicar cuál debe ser el efecto de la gravitación lunar sobre las aguas de la Tierra?

Los libros destinados al nivel secundario o universitario básico en general no tratan el tema. Aunque hay excepciones (por ejemplo Hewitt, 1995, Miguel, 1997), que presentan excelentes planteos cualitativos para el nivel secundario, la ausencia de tratamientos cuantitativos deja la sensación de que debe ser un tema realmente complejo, inabordable a partir de los conceptos o las herramientas matemáticas disponibles en estos niveles.

Veremos a continuación que no es así. Usaremos la idea de la figura 3 para plantear, con los ingredientes típicos de un curso de Física básica universitaria, un problema que debe aclarar algunos aspectos esenciales del tema, tales como la razón por la que la gravitación lunar disminuye el peso (aparente) de los cuerpos que están del lado opuesto de la Tierra, el cálculo de esa disminución, y algunos otros detalles.

UN PROBLEMA DE DINÁMICA.

Considere a la Tierra y la Luna como dos cuerpos esféricos sólidos, que son mantenidos en reposo por fuerzas exteriores a una distancia d_{LT} similar a la que mantienen entre sí en promedio en su movimiento orbital.

Considere además como parte del sistema cuatro pequeños cuerpos de masa m depositados sobre la superficie de la Tierra en las posiciones A y B, puntos más lejano y más cercano a la Luna respectivamente, y C y D, en los extremos de un diámetro perpendicular al AB (figura 4).

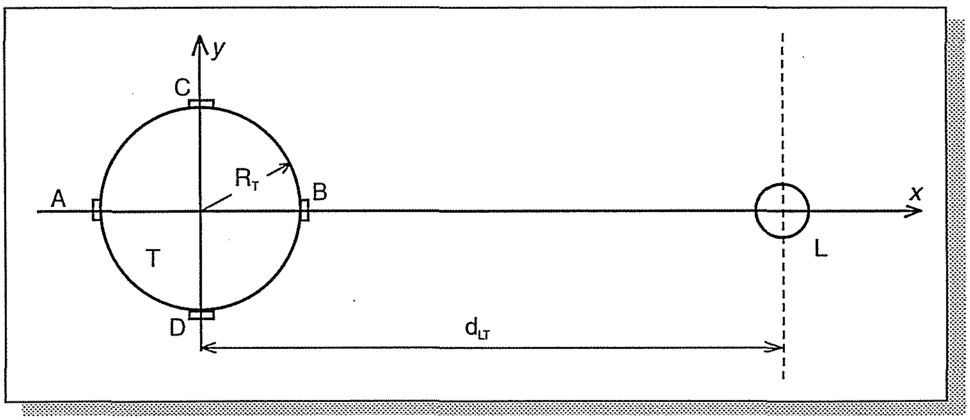


Fig. 4: elementos esenciales del problema. Indicamos ejes que luego utilizaremos. La distancia d_{LT} debería dibujarse mucho mayor ($d_{LT} \cong 60\ R_T$).

Se pide, en la aproximación $d_{LT} >> R_T$:

a) Hallar la fuerza de interacción entre cada uno de los cuerpos en A, B, C, y D y el piso. Comparar con las que habría en ausencia de la perturbación que introduce la Luna, y calcular las diferencias.

b) En $t = t_0$ se suspende la aplicación de las fuerzas exteriores que inmovilizaban a los astros. Éstos inician un movimiento de "caída libre" uno hacia el otro en línea recta. Para los instantes iniciales, cuando aún la situación no se ha alterado mucho (estime el intervalo correspondiente), repita nuevamente el cálculo de las fuerzas hecho en a).

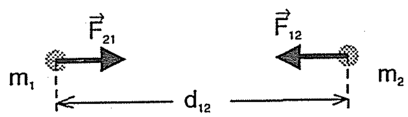
c) Muestre que las fuerzas calculadas en b) son las mismas que actúan si la Luna está en órbita alrededor de la Tierra. Muestre que se cumplen las condiciones para que éstas sean una buena representación de las fuerzas de marea en el caso real.

Para resolver antes repasemos un poco las ideas relacionadas con el campo gravitatorio.

GRAVITACIÓN UNIVERSAL, CAMPO GRAVITATORIO Y ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

La fuerza de gravitación entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2, está dada por la

Ley de Gravitación Universal:



$$F_{12}=F_{21}=G\ \frac{m_1\, m_2}{d_{12}^{\,2}} \qquad [1]$$

Expresión en la cual:
G: es la constante de gravitación universal: $G \cong 6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$;
d_{12}: es la distancia entre (los centros de) las partículas;
m_1 y m_2: son las respectivas masas.

Decimos que cada partícula produce un **campo gravitacional** en todo el espacio que la rodea, el cual es el responsable directo de la fuerza gravitacional sobre la otra.

Así, decimos que la partícula 1 produce un campo gravitacional $\vec{g}_1$ en todo el espacio, y que $\vec{g}_1$ actuando allí donde está la partícula 2, es quien le aplica la fuerza $\vec{F}_{12}$. Esta fuerza dividida por m_2 define el campo $\vec{g}_1$ al que ella está sometida

$$\vec{g}_1=\frac{\vec{F}_{12}}{m_2};\ \text{de módulo } g_1=\frac{F_{12}}{m_2}=\frac{G\, m_1}{d_{12}^{\,2}};$$

el cual sólo depende de la masa de la partícula 1, y de la distancia a ella. Además este cociente también indica la aceleración que adquiriría la partícula 2 bajo la acción de $\vec{F}_{12}$.

Cuando hablamos de cuerpos extensos en lugar de partículas, siempre podemos, subdividiéndolos, suponerlos compuestos por muchas partículas, y aplicar las siguientes ideas básicas:

1) El campo total es la suma vectorial de todos los campos debidos a todas las partículas, en cada instante, en cada lugar (esto es el Principio de superposición).

2) En cada instante la fuerza total sobre la partícula i, de masa m_i, situada en el lugar dado por $\vec{r}_i$, es $\vec{F}_i=m_i\vec{g}_{ext}(\vec{r}_i)$; en donde el campo $\vec{g}_{ext}(\vec{r}_i)$ es la superposición del campo producido por **todas las otras**, en el lugar $\vec{r}_i$ (esto es la definición de campo).

3) El campo producido por un cuerpo con simetría esférica en el espacio exterior al mismo, es el mismo que habría si toda la masa estuviera concentrada en el centro (esto se demuestra a partir de [1]).

Veamos algunos valores importantes para nuestro problema (oportunamente utilizaremos los valores referidos al Sol):

Masa del Sol: .... $m_S \cong 2{,}0\times10^{30}$ kg.
Radio del Sol: .... $R_S \cong 650\times10^{6}$ m.
Masa de la Tierra: .... $m_T \cong 6{,}0\times10^{24}$ kg.
Radio de la Tierra: .... $R_T \cong 6{,}37\times10^{6}$ m.
Masa de la Luna: .... $m_L \cong 7{,}4\times10^{22}$ kg.
Radio de la Luna: .... $R_L \cong 1{,}74\times10^{6}$ m.
Radio medio órbita lunar: .... $d_{LT} \cong 384\times10^{6}$ m $\cong 60\ R_T$.
Radio medio órbita terrestre: .... $d_{TS} \cong 149\times10^{9}$ m $\cong 390\ d_{LT}$.

Como ejemplo podemos decir que:

1- La Tierra produce un campo gravitatorio en la zona en la cual está la Luna; este campo vale aproximadamente:

$$G\ m_T\ /\ d_{LT}^{\,2} \cong 2{,}7\times10^{-3}\ N/kg,$$

lo cual significa que la Luna, o cualquier cuerpo que estuviera en ese lugar cayendo libremente hacia la Tierra, lo haría con una aceleración:

$$a_L \cong 2{,}7\times10^{-3}\ m/s^2.$$

2- La Luna produce un campo gravitatorio que en la zona en la cual está la Tierra vale aproximadamente:

$$G\ m_L\ /\ d_{LT}^{\,2} \cong 3{,}3\times10^{-5}\ N/kg,$$

lo cual significa que la Tierra, o cualquier cuerpo que estuviera en ese lugar cayendo libremente hacia la Luna, lo haría con una aceleración:

$$a_T \cong 3{,}3\times10^{-5}\ m/s^2.$$

Resolución del problema.

a) Con los astros inmovilizados por hipotéticas fuerzas exteriores.

Lo que debemos hallar son las fuerzas de contacto entre el piso y cada cuerpito en A, B, C, y D. Las reacciones del piso sobre los cuerpos se muestran en la figura 5 con flechas huecas.

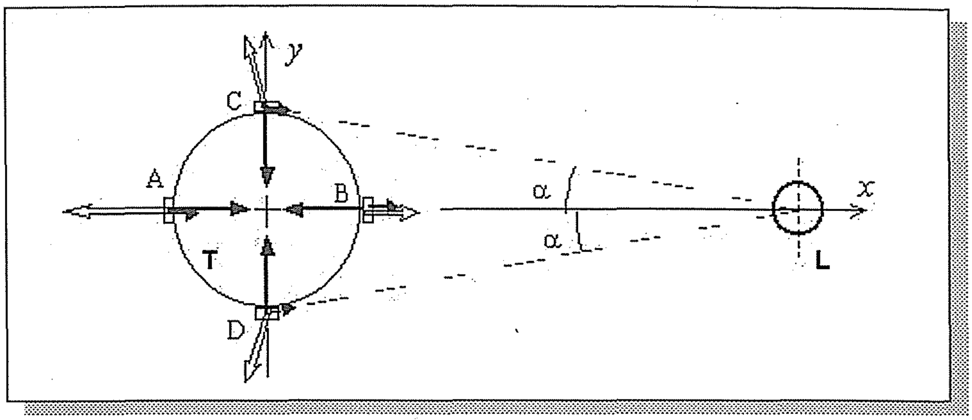


Fig. 5: se muestran las fuerzas exteriores actuantes sobre cuatro cuerpos pequeños en A, B, C y D. La atracción lunar se dibuja exageradamente grande para que se distinga.

Las fuerzas representadas en la figura son (algunos detalles más también en figura 7):

- $\vec{P}$ es la fuerza que habitualmente llamamos peso, debida al campo gravitacional terrestre, orientada hacia el centro de la Tierra, cuyo módulo, para un cuerpo de masa m, vale:

$$P = m\frac{Gm_T}{R_T^2};$$

donde $G\ m_T / R_T^2 \cong 9{,}80\ m/s^2$, es el valor del campo terrestre en la superficie del planeta.

- $\vec{L}$ es la fuerza de atracción gravitacional hacia la Luna, cuyo módulo, para un cuerpo de masa m vale:

$$L = m\frac{Gm_L}{d^2};$$

en donde $G\ m_L / d^2 = g_L(d)$ es el campo debido a la Luna en cada lugar (a distancia d de su centro). Debido a que $R_T << d \cong 60\ R_T$, este campo puede considerarse con el mismo valor, $\approx 3{,}3x10^{-5}$ N/kg , en todos los puntos considerados. Al responder el próximo punto del problema deberemos hacer una distinción más fina y considerar las diferencias en los distintos lugares.

- $\vec{FM}$ es la fuerza mecánica de contacto, o reacción del piso, equilibrante de las otras dos en cada lugar. La hemos distinguido con flechas huecas en la figura. El vector opuesto a ella indicaría la fuerza de contacto sobre el piso, que denominaremos "peso aparente".

En la figura no se muestran las fuerzas exteriores sobre Luna y Tierra, ya que sólo existen para que podamos decir que todo permanece en reposo, y así plantear un problema de *ESTÁTICA*.

Como en cualquier problema de estática, en cada uno de los lugares planteamos el equilibrio de fuerzas: $\vec{P} + \vec{L} + \vec{FM} = \vec{0}$, y obtenemos $\vec{FM} = -(\vec{P} + \vec{L})$.

Esto significa que la reacción del piso, es decir la fuerza necesaria para mantener inmóvil un objeto sometido simultáneamente a las gravitaciones lunar y terrestre, es la fuerza que equilibra exactamente a la suma vectorial de ambas. De manera que en cada lugar simplemente se agrega la gravitación lunar a la terrestre, como lo indican cualitativamente los vectores dibujados en la figura 5. Y repasando lo que sucede en las diferentes posiciones podemos decir:

- En A, $\vec{P}$ y $\vec{L}$ tienen igual sentido, y así el módulo de $\vec{FM}$ (y el de su opuesto, el peso aparente) se incrementa por la atracción de la Luna, que para este observador se halla ubicada hacia abajo, hacia más allá de las antípodas.

- En B ocurre lo opuesto, el módulo de $\vec{FM}$ (y el peso aparente) disminuye por la atracción de la Luna, que está en el cenit.

- En C o D, la Luna está cerca del horizonte y su atracción agrega una componente aproximadamente horizontal que se manifiesta esencialmente como una pequeña inclinación del peso aparente.

Y en general vemos que *en este caso hipotético*, puramente ESTÁTICO, con los planetas fijados a sus posiciones por increíblemente fuertes agentes exteriores (que extrañamente no tienen suficiente masa como para perturbar el campo gravitatorio), resulta que en cualquier lugar de la

Tierra la gravitación lunar se manifiesta tal cual es: tirando de cualquier cuerpo exactamente hacia donde esté la Luna con la intensidad dada por el campo lunar ($\approx 3{,}3\text{x}10^{-5}$ N/kg). Esto representa una pequeña perturbación frente al campo terrestre, y tiene las características exactas de la idea que hemos presentado en las figuras 2 y 3: todas las cosas en el planeta sufren una pequeña fuerza hacia donde está la Luna en cada momento.

Como ya lo hemos sugerido antes estas fuerzas no son las que se perciben en la realidad. Para entender las características de las que realmente se denominan "fuerzas de marea", encaremos los siguientes puntos del problema.

b) Astros en caída libre rectilínea (y sin rotación).

En $t = t_0$ se suspende la aplicación de las fuerzas exteriores que inmovilizaban a los astros. Éstos inician un movimiento de "caída libre" uno hacia el otro en línea recta. Para los instantes iniciales, cuando aún las posiciones y las velocidades no se han alterado mucho, tendríamos la situación mostrada en la figura 6 (estos instantes iniciales podrían durar algunas horas; el astro más acelerado, que es la Luna, partiendo del reposo, con la aceleración que ya hemos calculado, en una hora recorrería algo menos de 20 km, y alcanzaría una velocidad de casi 10 m/s).

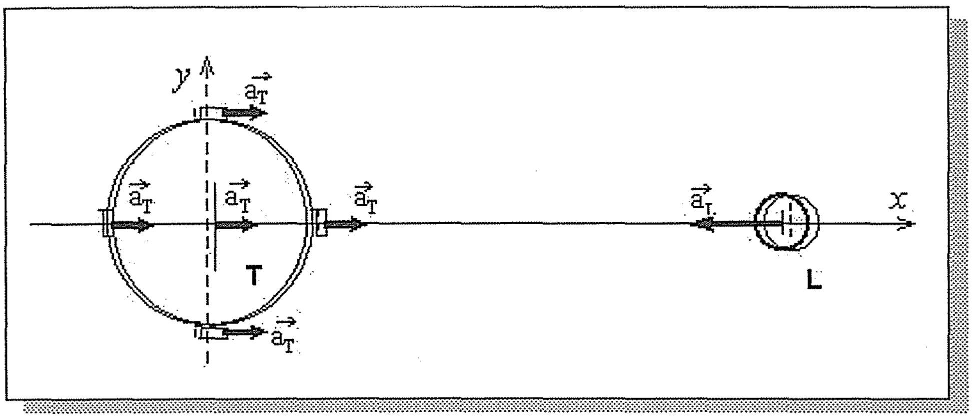


Fig. 6: todos los cuerpos solidarios con la Tierra tienen la aceleración $\vec{a}_T$.

Ahora en cada uno de los lugares tenemos las mismas fuerzas gravitatorias que antes, ya que sólo dependen de las posiciones relativas de los astros, pero no la misma fuerza mecánica de interacción de cada cuerpo con el suelo, y eso es lo que trataremos de calcular. Para ello planteamos, para cada cuerpo en A, B, C, y D:

$$\vec{P} + \vec{L} + \vec{FM} = m\vec{a} \qquad [2]$$

Siendo $\vec{a}$ la misma para todos los cuerpos, igual a la que adquiere la Tierra, igual a su vez a la intensidad del campo lunar calculado en el centro de la Tierra $a = a_T \cong 3{,}3\text{x}10^{-5}$ m/s².

Comencemos aplicando [2] a los cuerpos en A y B (luego lo haremos para los cuerpos en C y D). Escribimos la ecuación con los **módulos** de los vectores involucrados, supuestos los sentidos de la figura 7:

$$P_A + L_A - FM_A = m_A\, a_T$$

$$FM_B + L_B - P_B = m_B\, a_T$$

Para ambos cuerpos despejemos la fuerza de reacción del piso, que es la que nos indica el peso aparente teniendo en cuenta la perturbación lunar:

$$FM_A = P_A + L_A - m_A\, a_T$$
$$= P_A - m_A\, \{a_T - g_L(A)\}$$

$$FM_B = P_B - L_B + m_B\, a_T$$
$$= P_B - m_B\, \{g_L(B) - a_T\}$$

Si nos mantuviésemos en el orden de aproximación del cálculo estático hecho antes, recordando que a_T es la intensidad del campo lunar en el centro de la Tierra, encontraríamos que ambas llaves serían nulas, y para ambos cuerpos sería $FM \cong P$.

Pero si tenemos en cuenta que el campo gravitatorio disminuye con la distancia, vemos que la resta dentro de cada llave ya no se anula. En ambos casos se ha escrito la resta de manera que la llave sea positiva, ya que $g_L(B) > a_T > g_L(A)$, de manera que vemos que para ambos

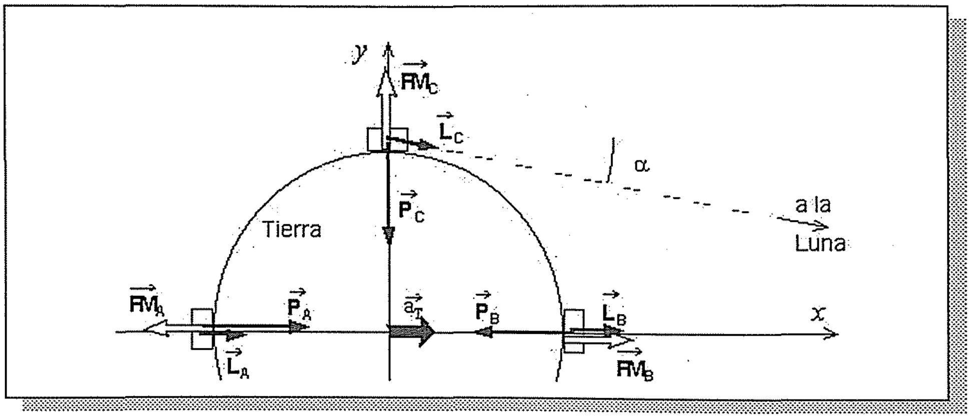


Fig. 7: ampliación de la figura 5, adaptada a la aceleración de la Tierra.

cuerpos, tanto para el más cercano **como para el más lejano**, el efecto gravitacional de la Luna es **disminuir** levemente el peso aparente.

Hay muchas maneras de evaluar las restas en estas llaves, y todas llevan al resultado de que en primera aproximación ambas son iguales y valen:

$$a_T - g_L(A) \cong g_L(B) - a_T$$

$$\cong \frac{2\,R_T}{d_{LT}}\, a_T$$

$$\cong \frac{2\,Gm_L\,R_T}{d_{LT}^3}$$

$$\cong 1{,}1\text{x}10^{-6}\ \text{m/s}^2 \qquad [3]$$

Vemos que este efecto aparece en un orden de aproximación más fino (éste es el que corresponde a las fuerzas de marea). La modificación del peso aparente ya no es del orden de la fuerza de atracción lunar (m× $3{,}3\times10^{-5}$ m/s²), sino del orden de la diferencia entre los valores que tomaría esta fuerza en distintas partes de la Tierra (m× $1{,}1\times10^{-6}$ m/s²).

Analicemos ahora lo que sucede en el punto C (es lo mismo para D). Encontramos que $\vec{L}$ tiene dos componentes: $L_x = L\cos\alpha \cong L$, y $L_y = -L\,\text{sen}\alpha \cong -L\times(R_T / d_{LT})$.

En el eje *x* resulta entonces que $m\,a = L_x$, y por ello $\vec{FM}$ no tiene componente horizontal en este orden de aproximación.

Para el eje *y*, aplicamos

$$m\,a_y = 0 = \sum Fy = FM - L\,\frac{R_T}{d_{LT}} - P, \text{ y obtenemos:}$$

$$FM = P + L\,\frac{R_T}{d_{LT}} = P + m\,a_T\,\frac{R_T}{d_{LT}} \qquad [4]$$

Vemos que el efecto de la Luna en C (y lo mismo en D) es **aumentar** el peso aparente en la mitad de lo que lo disminuye en las posiciones A y B (más lejana y más cercana).

Vemos que la **atracción directamente hacia la Luna** donde quiera que ella esté, que era el efecto perceptible en el caso de los astros inmovilizados, aparentemente DESAPARECE ahora por la libertad del sistema Tierra para acelerarse.

c) El caso de la Luna en órbita alrededor de la Tierra.

Ahora consideremos el movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra, para ver que efectivamente eso no modifica las fuerzas calculadas en b), es decir que las fuerzas halladas con los astros en caída libre rectilínea son esencialmente las *fuerzas de marea reales.*

Estamos acostumbrados a imaginar a la Tierra con su centro en reposo mientras la Luna orbita a su alrededor. Notemos ahora que si aceptamos eso estaríamos violando la ley $\vec{F} = m\vec{a}$, ya que la Tierra es un cuerpo sobre el cual las fuerzas no están en equilibrio: actúa sobre ella la fuerza gravitacional de la Luna, la cual, sin otra fuerza que la contrarreste, le produce una aceleración, pequeña pero no nula, que ya hemos calculado.

El punto que puede permanecer en reposo en esta descripción es el centro de masa[1], que es el punto, en la recta que une los centros de

[1] A veces expresamos esto mismo diciendo que estamos describiendo el movimiento desde el sistema más simple posible, que es el *sistema "centro de masa".*

estos astros, cuya distancia a ellos está dada por $m_L\, d_L = m_T\, d_T$, es decir,

$$d_T = \frac{m_L}{m_T}\, d_L \qquad [5]$$

Como la masa de la Tierra es tan grande comparada con la de la Luna, resulta que el centro de masa del sistema está dentro de la Tierra, $d_T \cong 0{,}012\ d_L \cong 0{,}73\ R_T$, y todo **parece ocurrir** como si efectivamente el centro de ésta estuviese inmóvil y la Luna fuese el único cuerpo en órbita aquí. No obstante, como ya hemos dicho esto no es así, sino que el centro de la Tierra describe una trayectoria parecida a una pequeña circunferencia de radio d_T alrededor del punto fijo CM, mientras la Luna, diametralmente opuesta, describe algo parecido a una gran circunferencia[2] de radio d_L, como se muestra en la figura 8.

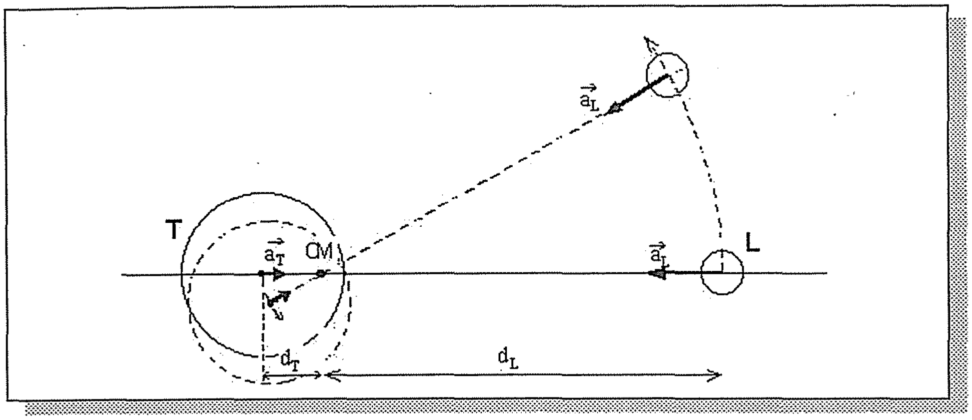


Fig. 8: movimiento de Luna y Tierra alrededor del centro de masa común.

En esta descripción la velocidad lineal de cada astro resulta inversamente proporcional a su masa, y tiene valor tal que la aceleración centrípeta $v^2/R = \omega^2 R$ sea la que corresponde a la fuerza actuante (con los valores que ya hemos calculado):

$$a_L = \frac{Gm_T}{d_{LT}^2} = \frac{v_L^2}{d_L} = \omega^2\, d_L \cong 2{,}7\text{x}10^{-3}\ \text{m/s}^2 \qquad [6]$$

$$a_T = \frac{Gm_L}{d_{LT}^2} = \frac{v_T^2}{d_T} = \omega^2\, d_T \cong 3{,}3\text{x}10^{-5}\ \text{m/s}^2 \qquad [6']$$

Aquí vemos que cada astro está "cayendo libremente" hacia el otro con la misma aceleración con la cual lo haría en línea recta. La diferencia entre este movimiento orbital y el movimiento rectilíneo considerado antes, es que ahora cada astro tiene una velocidad (tangencial) perpendicular a la recta que une sus centros, de valor determinado según las expresiones anteriores. La aceleraciones [6] y [6'] están dadas por el cociente $\vec{F}/m$, y la velocidad que tengan los astros en un instante dado no pueden influir sobre ellas, ya que **la fuerza actuante aquí es la gravitatoria, dependiente sólo de la distancia entre los astros.**

Si replanteásemos nuestro problema de dinámica dando cualquier velocidad inicial a los astros, el cálculo de la fuerza mecánica de interacción de cada cuerpo con el piso se haría nuevamente a partir de la expresión [2], $\vec{P} + \vec{L} + \vec{FM} = m\vec{a}$, y en ella intervendrían las mismas fuerzas gravitatorias y la misma aceleración de la Tierra (todas ellas independientes de la velocidad inicial que propongamos). Con el transcurso del tiempo cambiaría la orientación de la línea Tierra-Luna, pero en cada instante, ubicando adecuadamente los ejes y los cuerpos A,B,C,D, siempre aplicaríamos el mismo razonamiento, efectuaríamos los mismos cálculos, y obtendríamos los mismos resultados.

De manera que $\vec{FM}$ y el peso aparente en cada lugar son los mismos si Luna y Tierra caen en línea recta una hacia la otra, que si están en órbita.

Parece que ahora sólo faltaría analizar la influencia del movimiento de rotación terrestre, pero en realidad eso **no es necesario**: el movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma agrega a todas las consideraciones anteriores una aceleración centrífuga que no tiene nada que ver con la posición de la Luna, sino

[2] Estas trayectorias son elipses poco excéntricas muy parecidas a circunferencias. En adelante las tomaremos como circunferencias.

sólo con la ubicación del lugar respecto del eje de rotación. Esta aceleración hace que el nivel del agua suba en la zona ecuatorial con respecto al nivel en los polos, pero eso no fluctúa con la posición de la Luna, ni tiene que ver con ella[3].

De manera que podemos considerar que ésta ha sido una descripción completa de las llamadas *fuerzas de marea* en sus aspectos básicos.

Podemos enriquecer el tema mostrando cómo se hace el cálculo de la perturbación que la Luna introduce en el nivel del agua.

LA ALTURA DE LA MAREA.

Para calcular, en nuestro esquema simplificado, cuánto asciende el nivel del agua en puntos como A y B con respecto a puntos como C y D, podemos seguir un esquema de razonamiento utilizado por Newton, basado en la idea de la figura 9: consideremos pozos o túneles cilíndricos (rectilíneos) verticales, de sección transversal S, que lleguen hasta el centro de la Tierra, O, desde A y desde C, y que se comuniquen allí (lo mismo para puntos como B y D).

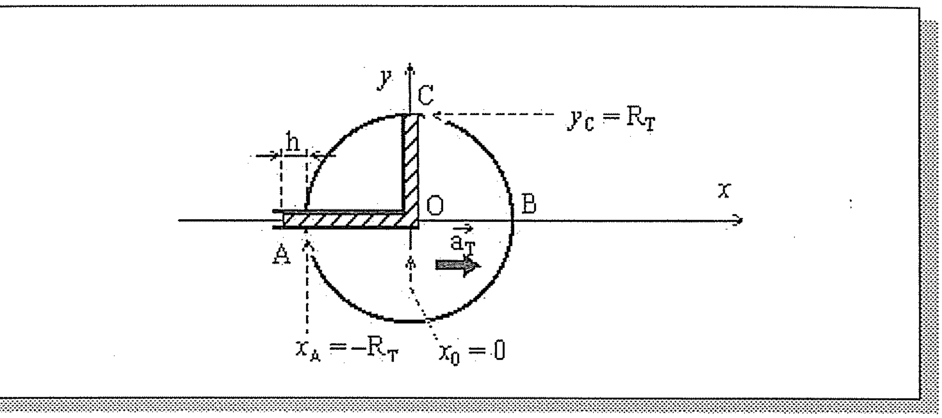


Fig. 9.

Calculemos ahora qué altura h, por encima de la superficie terrestre (supuesta esférica), debería alcanzar un líquido homogéneo de densidad D en el túnel OA, para producir la misma presión p_0 en el fondo (centro del planeta) que la que produce el mismo líquido en el tubo OC, lleno exactamente hasta $y = R_T$.

A partir de lo ya desarrollado podemos decir que en el planeta acelerado con $\vec{a}_T$ y sometido a los campos gravitatorios de Tierra y Luna, podemos calcular la acciones mecánicas de contacto (que divididas por S dan la presión), simplemente restando $\vec{a}_T$ al campo lunar, y trabajando como si el sistema estuviera en reposo.

En el Túnel OC, la resta $\vec{g}_L(y) - \vec{a}_T$ simplemente elimina la componente x del campo lunar. La componente y del campo lunar varía linealmente desde 0 en el centro, hasta $a_T R_T/d_{LT}$ en C (ver expresión [4]). Su valor medio es $\frac{1}{2}\, a_T\, R_T/d_{LT}$, y entonces la acción lunar en este túnel aumenta el peso aparente de todo el líquido en $D\ S\ R_T \times \{a_T\ R_T/2d_{LT}\} = D\ S\ a_T\ R_T^2\ /2d_{LT}$. Dividiendo por S tenemos la contribución al aumento de la presión en el fondo.

En el Túnel OA, la resta $\vec{g}_L(x) - \vec{a}_T$, disminuye el peso aparente de cada elemento de masa m en la cantidad $m \times \{a_T - g_L(x)\}$. En la aproximación que trabajamos (lineal) esta llave varía linealmente desde 0 en el centro hasta $2\ a_T\ R_T/d_{LT}$ en A (expresión [3]). De manera que la acción lunar en este túnel disminuye el peso aparente de todo el líquido (y la presión en el fondo) en el doble de lo que lo aumenta en el otro.

Como por otra parte la contribución de la gravedad terrestre se igualará en ambos túneles, excepto por el trocito de altura h que debemos calcular, entonces el peso de este trocito se deberá equilibrar con las dos contribuciones lunares sumadas:

$$D\ S\ h\ g_T(R_T) = 3\ D\ S\ a_T R_T^2 / 2\ d_{LT}$$

De manera que, finalmente:

$$h \cong \frac{3\ m_L\ R_T^4}{2\ m_T\ d_{TL}^3} \cong 0{,}54 \text{ m}.$$

[3] Además de la rotación terrestre introduce otras novedades en relación con las mareas, que no tienen que ver con la dinámica elemental que hemos planteado; algunas se comentan más adelante.

Agradecimientos.

Se agradece al Dr. Alberto Maiztegui la revisión con sus atinados comentarios.

Referencias Bibliográficas.

- Paul Hewitt, 1995. "Física Conceptual". Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. E.U.A.

- Hernán Miguel, 1997. "El Universo de la Física". Ed. El Ateneo. Bs.As.

Apéndice: Algunos detalles notables.

1.- La gravedad solar es más poderosa, pero su contribución a las mareas es más débil.

El campo gravitatorio solar en la región de la Tierra es extraordinariamente poderoso: $g_S = G\ m_S / d_{TS}^2 \cong 0{,}0060$ N/kg . ¡Se podría detectar con cualquier balanza sensible si no fuese por la libertad de la Tierra para acelerarse!. Es unas 180 veces mayor que el correspondiente campo lunar. No obstante resulta que la contribución solar a las mareas, es **más débil** que la lunar, debido a que, como hemos visto, el efecto no depende del valor del campo perturbador, sino de su diferencia entre el centro de la Tierra y los diferentes puntos de su superficie.

Efectivamente, aplicando los mismos procedimientos anteriores podemos calcular la diminución de peso aparente en A o B por unidad de masa, su aumento en C o D, o la correspondiente diferencia de nivel h debido al Sol:

$$\frac{\text{disminución peso (A, B)}}{m} \cong \frac{2 \times \text{aumento peso (C, D)}}{m} \cong \frac{2\ G\ m_S\ R_T}{d_{TS}^3} \cong 5{,}1 \times 10^{-7}\ \text{m/s}^2$$

$$h \cong \frac{3\ m_s\ R_T^4}{2\ m_T\ d_{TS}^3} \cong 0{,}24\ \text{m}$$

Vemos que estos valores que son casi la mitad de los correspondientes a la influencia lunar, de manera que es ésta última la que podríamos decir que "controla" el proceso.

Cuando Sol Tierra y Luna se alinean aproximadamente (cerca de la luna llena o la luna nueva), se suman los efectos de Luna y Sol y ocurren las mareas "vivas", de máxima diferencia entre "pleamar" y "bajamar", mientras que cerca de cuarto creciente o menguante se restan los efectos, y tienen lugar las mareas "muertas", de mínima diferencia de nivel. Cada 7 días se pasa de tener mareas vivas a muertas, y viceversa.

2.- La altura real de las mareas.

Hemos resuelto un problema de dinámica que nos ofrece lo que podríamos llamar, paradójicamente, explicación estática de las mareas. Es decir hemos calculado con qué desnivel las aguas estarían en equilibrio, suponiendo que estuviesen quietas, ignorando que para producirse esos desniveles mientras el planeta gira rápidamente (cada lugar pasa aproximadamente dos veces por día por la situación de máximo acercamiento y luego máximo alejamiento de la Luna) deben trasladarse continuamente inmensas masas de agua de unos lugares a otros.

Para poder hablar de la altura que realmente alcanza el agua en las mareas, además de superponer los efectos que hemos calculado para Luna y Sol, hay que tener en cuenta muchos factores, entre los cuales los más importantes serían:

1) Es muy difícil saber cuánto asciende el agua en mar abierto; en general se aprecia la altura que alcanza el agua en playas o costas. Pero en playas o costas lo que se observa es el efecto del flujo del agua que al llegar al accidente geográfico que se interpone en su camino, alcanza alturas que dependen de la forma del accidente teniendo valores muy distintos propios de cada lugar (en general, si la forma es propicia, la inercia del flujo de agua hace que estos sean mucho mayores que lo que habría resultado si no se hubiese interpuesto el obstáculo).

2) La solicitación aproximadamente periódica a subir o bajar a la que se halla sometida el agua, constituye un complejo fenómeno ondulatorio a nivel global. La teoría desarrollada por Newton produjo los primeros resultados explicativos en este panorama "estático" de las mareas, pero los resultados de suficiente exactitud para ser útiles a los navegantes recién se produjeron cuando Laplace desarrolló un tratamiento ondulatorio del fenómeno.

El fenómeno es realmente muy complejo, pero se habla de valores como los siguientes, correspondientes a las mareas vivas:

a) Mar abierto: 6 m.
b) Costa atlántica de Pcia. de Buenos Aires: 1 m.
c) Ushuaia: 2 m.
c) Bahía de Fundy (Canadá): 20 m.
d) Canal de Bristol (Inglaterra): 14 m.
e) Mar Blanco (Siberia): 3 cm (el flujo y reflujo del agua al mismo está dificultado por estrechos canales).

3.- El agua se demora en seguir a la Luna.

La resistencia al flujo del agua, y las condiciones para la propagación de las ondas de marea, imponen en general grandes demoras con respecto a la posición de los astros. Puede haber demora de horas, pero también de días con respecto a determinada posición astronómica, y el fenómeno puede ser muy complejo y tener grandes diferencias con respecto a una descripción simple como esta.

Además del efecto sobre el agua resulta también un leve pero continuo efecto de frenado sobre la rotación terrestre, ¡y de aceleración del movimiento orbital de la Luna! (pensar en la conservación de la cantidad de movimiento angular del sistema).

UNA OPORTUNIDAD PARA UNA FORMACIÓN SUPERIOR DE CALIDAD: EL INSTITUTO BALSEIRO.

Instituto Balseiro

El Instituto Balseiro es una institución de reconocido prestigio internacional en la formación de recursos humanos para la ciencia y la tecnología. La enseñanza permite el estrecho contacto entre profesores y alumnos y contribuye a desarrollar la capacidad de pensar independientemente y prepara adecuadamente para el aprendizaje continuo.

Ofrece las carreras de Ingeniería Nuclear y Física, y se ingresa luego de cursar dos años de una carrera de ciencias o de ingeniería en cualquier universidad del país. Para cursar estas carreras hay becas disponibles de la Comisión Nacional de Energía Atómica.

Ingeniería Nuclear: Carrera de Ingeniería adecuada a los requerimientos de los rápidos cambios tecnológicos, brinda una fuerte formación básica en las ciencias de la ingeniería. Sus egresados se caracterizan por una gran capacidad de modelización de problemas complejos, un fuerte espíritu crítico y una actitud para el desarrollo tecnológico y el diseño. Se desempeñan con éxito en diversos campos de la ingeniería, tanto en el área nuclear, particularmente en estos en los que Argentina encara importantes proyectos de exportación de tecnología nuclear, como en importantes empresas consultoras de ingeniería, de desarrollo de software, de la industria del petróleo, de servicios, etc..

Física: Una carrera con más de cuarenta años de experiencia, donde la formación se realiza al lado de profesores-investigadores de reconocido prestigio, utilizando los laboratorios más modernos del país en el campo de la física experimental. Los temas de trabajo en que los estudiantes pueden especializarse cubren un amplio espectro de la física de los materiales, la física de superficies, de neutrones y reactores y de las colisiones atómicas, además de la física teórica. Sus egresados se destacan en los más prestigiosos centros de investigación nacionales y del extranjero.

Para ambas carreras la CNEA otorga becas que permiten una dedicación full-time al estudio.

En el área de Posgrado, el Instituto ofrece el Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, el Doctorado en Física y la Carrera de Especialista en las Aplicaciones Tecnológicas de la Energía Nuclear (en convenio con la UBA). Estos posgrados han merecido los más altos niveles de acreditación por la CONEAU. Para ellos existen también becas de distintas instituciones.