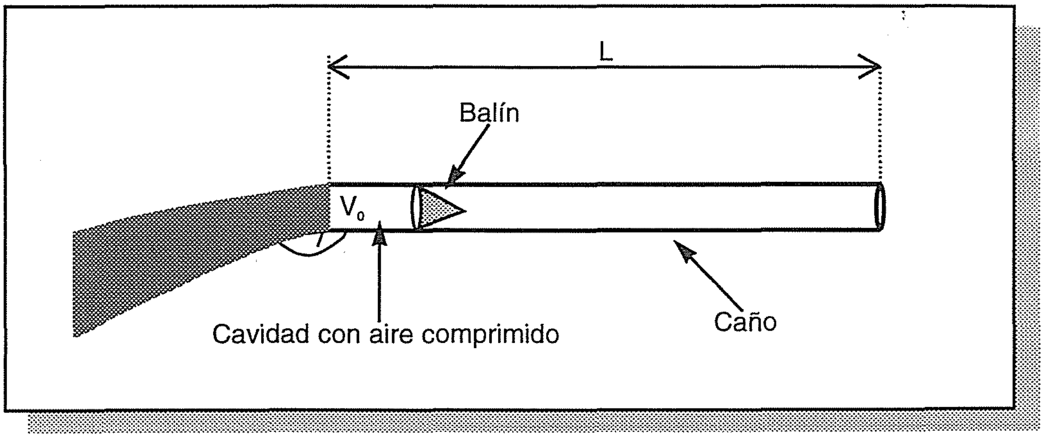
PROBLEMAS COMENTADOS

TIRO AL BLANCO!!

ENUNCIADO.

Un rifle de aire comprimido dispara un proyectil de masa m (balín) mediante una expansión de aire comprimido. Un modelo simplificado consiste en un caño de largo L y de sección uniforme S, cerrado en uno de sus extremos. En dicho caño se aloja el balín que junto con el extremo cerrado forma una cavidad V_o, en la que el aire está a alta presión. El balín se mantiene fijo mediante el sistema del gatillo y se libera cuando se efectúa el disparo.



Considerando la siguientes hipótesis simplificadoras:

- El aire, para las condiciones del problema, se comporta como un gas ideal diatómico.
- No existe fricción entre el balín y el caño.
- El aire comprimido no escapa entre los bordes del balín y la superficie interna del caño.
- No hay intercambio de calor entre el aire comprimido, el caño y el balín.
- La presión en la parte abierta del tubo es uniforme y es la presión atmosférica P_a.
- La presión P dentro de la cavidad formada por el extremo cerrado del caño y el balín es uniforme.

a) Escribir la ecuación de movimiento del balín para todo tiempo t, mientras se encuentra viajando dentro del caño.

b) Calcular el trabajo W_g que hace el aire comprimido sobre el balín, cuando este último ha recorrido una distancia Δx medida desde su posición inicial x_o.

c) Calcular el trabajo W_a de la fuerza aplicada sobre el balín debido a la presión atmosférica, cuando el balín ha recorrido la distancia Δx.

d) Encontrar el cambio de energía cinética del balín en función de su posición dentro del caño.

De todas las posibles longitudes del caño del rifle, hay una (L_f) con la cual el balín adquiere la máxima velocidad de salida posible, para similares condiciones iniciales de presión, volumen y temperatura.

e) Determinar esta longitud y la velocidad v_f que adquiere el balín cuando el caño del rifle tiene esta longitud.

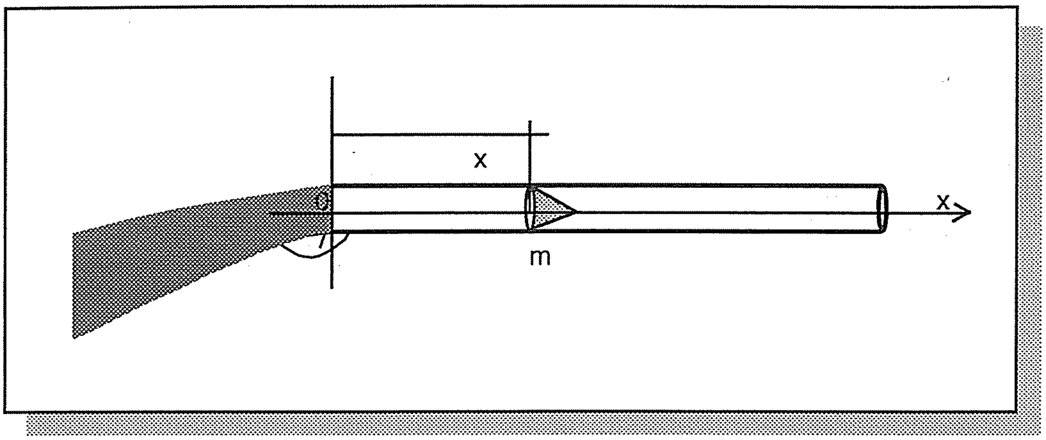
RESPUESTAS.

a) Para escribir la ecuación de movimiento recordamos la segunda ley de Newton.

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde m es la masa del balín, $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas que actúan sobre él y $\vec{a}$ es la aceleración del balín. Como el balín sólo se mueve según la dirección del caño, de la ecuación vectorial **(1)** sólo nos interesará la proyección sobre esta dirección, que designaremos con el eje de coordenadas x.

$$m\,a_x = F_x \qquad \textbf{(2)}$$

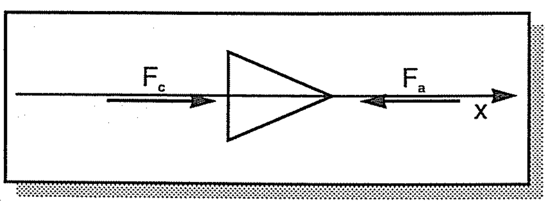


Las fuerzas que actúan sobre el balín en la dirección de x son:

* La producida por la presión del aire comprimido F_g:

$$F_g = P\ S \qquad \textbf{(3)}$$

Donde P es la presión dentro de la cavidad y S es la superficie transversal del balín.



* La producida por la presión atmosférica F_a:

$$F_a = P_a\ S \qquad \textbf{(4)}$$

Donde P_a es la presión atmosférica.

Luego de **(2)**, **(3)** y **(4)** obtenemos:

$$m\,a_x = P\ S - P_a\ S \qquad \textbf{(5)}$$

La presión del gas en el interior de la cavidad, por tratarse de una expansión adiabática (de acuerdo con nuestras hipótesis), está relacionada con el volumen de la cavidad de la forma:

$$P\ V^{\gamma} = P_o\ V_o^{\gamma} \qquad \textbf{(6)}$$

Donde γ es el coeficiente adiabático para un gas ideal diatómico ($\gamma = 7/5$), P_o y V_o son los valores iniciales de presión y volumen de la cavidad. Además, el volumen de la cavidad se puede expresar como:

$$V = x\ S \qquad \textbf{(7)}$$

Donde x es la coordenada del balín. De **(6)** y **(7)** llegamos a:

$$P\ x^{\gamma} = P_o\ x_o^{\gamma} \qquad \textbf{(8)}$$

Así, de **(5)** y **(8)** resulta que la ecuación de movimiento del balín es:

$$m\,a_x = S\ P_o\ (x_o/x)^{\gamma} - S\ P_a \qquad \textbf{(9)}$$

b) Para calcular el trabajo W_g que el aire comprimido hace sobre el balín, usaremos el primer principio de la termodinámica. Según este principio, sabemos que:

$$\Delta U = Q + W \qquad \textbf{(10)}$$

Donde U es la energía interna del sistema en consideración, Q y W son el calor y el trabajo que recibe el sistema. Consideramos el gas que esta dentro de la cavidad como nuestro sistema. Como éste experimenta una expansión adiabática, Q = 0, luego:

$$\Delta U = W \qquad \textbf{(11)}$$

Recordando que la energía interna de un gas ideal es sólo función de la temperatura y de la masa de gas, podemos escribir:

$$\Delta U = n\ C_v\ \Delta T \qquad \textbf{(12)}$$

Donde n es el número de moles de gas que hay dentro de la cavidad, C_v es el calor específico molar a volumen constante del gas y ΔT es la diferencia entre la temperatura final del gas T y la temperatura inicial del gas T_o, luego de que éste haya experimentado la transformación. Así de **(11)** y **(12)** podemos escribir:

$$W = n\ C_v\ (T - T_o) \qquad \textbf{(13)}$$

Recordando la ecuación de estado de los gases ideales:

$$P\ V = n\ R\ T \qquad \textbf{(14)}$$

Donde R es la constante de los gases ideales. Podemos reescribir la **(13)** como:

$$W = (C_v / R)\ (P\ V - P_o\ V_o) \qquad \textbf{(15)}$$

Y usando **(8)** y **(15)** obtenemos:

$$W = (C_v/R)\ P_o\ V_o\ [(x_o / x)^{\gamma-1} - 1] \qquad \textbf{(16)}$$

Este valor de W es el trabajo recibido por el gas. Debido a que x es mayor que x_o, el mismo es negativo, por lo que el gas hizo un trabajo sobre el exterior (balín) igual a -W. Finalmente, el trabajo hecho por el gas sobre el balín es:

$$W_g = - W = (C_v/R)\ P_o\ V_o\ [1 - (x_o / x)^{\gamma-1}] \qquad \textbf{(17)}$$

c) El trabajo W_a que se hace sobre el balín debido a la fuerza proveniente de la presión atmosférica es:

$$W_a = -\int_{X_0}^{X} F_a\, dx = -\int_{X_0}^{X} P_a\ S\ dx \qquad \textbf{(18)}$$

Y como P_a y S son constantes:

$$W_a = - P_a\ S\ (x - x_o) \qquad \textbf{(19)}$$

d) Para conocer el cambio de energía cinética que experimenta el balín E_c, recordamos que:

$$\Delta E_c = W_t \qquad \textbf{(20)}$$

Donde W_t es el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el balín, cuando este último se ha desplazado una dada distancia $\Delta x = x - x_o$. El trabajo total será la suma de los dos trabajos calculados anteriormente, W_g y W_a.

$$W_t = W_a + W_g \qquad \textbf{(21)}$$

Por lo que vimos antes, de las ecuaciones **(17)**, **(19)** y **(20)**, llegamos a:

$$\Delta E_c = (C_v/R)\ P_o\ V_o\ [1 - (x_o / x)^{\gamma-1}] - P_a V_o\ [(x/ x_o)-1] \qquad \textbf{(22)}$$

Como en el instante inicial la energía cinética era cero, la expresión **(22)** da el valor de la energía cinética que tiene el balín cuando está en la posición x.

e) Para determinar la longitud L_f observamos de la ecuación de movimiento que: la velocidad seguirá incrementándose mientras la fuerza debido a la presión del gas de la cavidad sea mayor que la debida a la presión atmosférica. Además vemos que, a partir de un dado instante la velocidad comenzará a disminuir debido a que la aceleración será negativa. Esto nos indica que la longitud óptima del caño será aquella para la cual el balín es acelerado positivamente durante todo su viaje, y abandona el caño en el instante en el que la aceleración es cero (antes de que cambie a valores negativos).

Así, la condición es que la aceleración sea cero cuando el balín está en el extremo del caño, esto es en la posición dada por $x = L_f$. Luego, de **(9)**:

$$m\ a_x = S\ P_o\ (x_o / L_f)^{\gamma} - P_a\ S = 0 \qquad \textbf{(23)}$$

De la cual obtenemos que:

$$L_f = (P_o / P_a)^{1/\gamma}\ x_o \qquad \textbf{(24)}$$

Así, con un caño de longitud L_f, el balín saldrá con una energía cinética dada por:

$$E_c = (m/2)\ v_f^2$$
$$= (C_v/R)\ P_o\ V_o\ [1-(P_a/ P_o)^{(\gamma-1)/\gamma}] - P_a V_o\ [(P_o/ P_a)^{1/\gamma} - 1] \qquad \textbf{(25)}$$

De la cual se puede despejar el valor de vf.

EJERCICIOS PARA EL LECTOR.

1. Proponga una forma alternativa para encontrar la longitud L_t, usando la expresión de la energía cinética del balín.

2. ¿Cuál es la condición que debe cumplirse para que el balín no abandone el caño?

3. ¿Cuál es la ecuación de la cual se obtendría la longitud del caño para la situación anterior?

4. ¿Cómo cambia la solución del problema resuelto si se considera un tiro oblicuo?

5. ¿Cómo cambia la solución del problema resuelto si se considera que existe rozamiento y que éste ejerce una fuerza equivalente a la que produce una presión constante P_r?

6. Similarmente a la pregunta 5, pero suponiendo que la fuerza de roce es proporcional a la velocidad del balín.

7. Encuentre el alcance máximo del rifle, medido sobre una línea horizontal, proponiendo valores adecuados para las magnitudes físicas que sean necesarias.

La situación problemática TIRO AL BLANCO!!,
fue ideada y realizada por:
el Dr. Guillermo Aguirre Varela
y el Lic. Rodolfo Pereyra.

AL LECTOR: Le pedimos al lector que nos envíe su respuesta comentada. Publicaremos las más interesantes con el nombre de sus autores.