

PROBLEMAS COMENTADOS

CUIDEMOS LAS LÁMPARAS, QUE SON CARAS!!!

ENUNCIADO.

Se desea construir una llave térmica para utilizarla en el circuito eléctrico de un retroproyector. Esta llave deberá proteger a la lámpara de un exceso de temperatura debido a algún desperfecto del sistema de ventilación.

La lámpara se alimenta con una fuente de corriente continua cuya tensión es $E = 20 \text{ V}$ y en funcionamiento disipa una potencia $P = 100 \text{ W}$.

Se pretende emplear una "llave bimetalica", cuya presencia modifique a la resistencia total del circuito (en funcionamiento) a lo sumo en un 0.02%; de lo contrario la lámpara no iluminará correctamente. En la Figura N°1 se esquematiza el circuito.

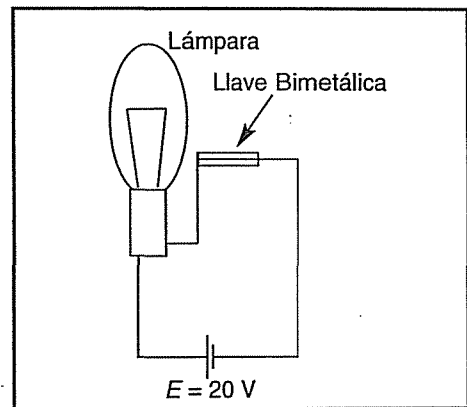


Figura N° 1.

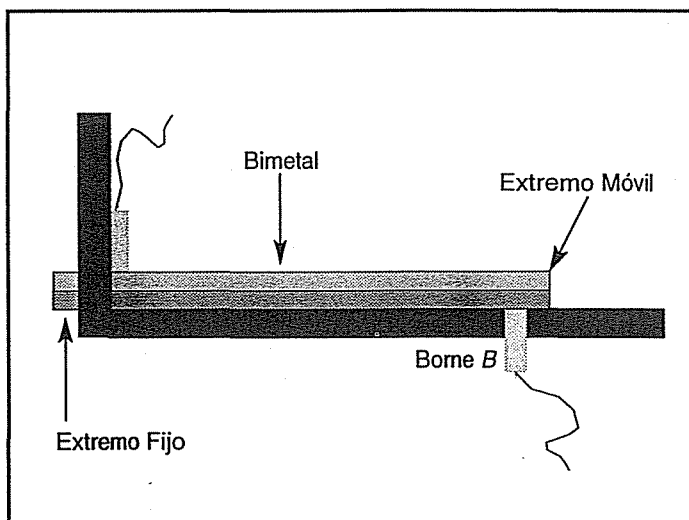


Figura N° 2.

Se construirá una llave bimetalica formada por dos láminas planas, una de cobre (Cu) y otra de hierro (Fe), soldadas entre ellas por una de sus caras de forma tal que a $T_0 = 25^\circ\text{C}$ el bimetálico permanece plano. A T_0 cada metal tiene una longitud $L_0 = 25 \text{ mm}$ y un ancho $\alpha = 3 \text{ mm}$, y el espesor de la lamina de cobre (e_{Cu}) es 4 veces menor que la del hierro (e_{Fe}) a T_0 y tales que la resistencia del bimetálico a T_0 , es la cuarta parte de la que tiene cuando el retroproyector esta encendido (Ver figura N°2).

Para abrir el circuito, la separación (h) entre la llave bimetalica y el borne B de la llave, debe ser aproximadamente de 1 mm .

Propuesta:

- 1) Explique el funcionamiento de la llave bimetalica.
- 2) Determine la resistencia del bimetálico, cuando la lámpara está encendida, de manera que se cumplan los requerimientos extremos pedidos.
- 3) Calcule el espesor de cada metal e_{Cu} y e_{Fe} .
- 4) Calcule la temperatura (T_A) a la que el circuito se abre.

RESPUESTA.

RESPUESTA 1.

Cuando el sistema que se muestra en la Figura N°3 experimenta un incremento de temperatura, adquiere la forma de un arco de circunferencia. Esto es porque el Fe , adopta una longitud menor que el Cu , debido a que el coeficiente de dilatación del Fe es menor

que el del Cu .

Al estar unidas solidariamente, una parte de cada una de las láminas se tensiona y otra se comprime, por arriba y por debajo de la línea media de cada lamina respectivamente.

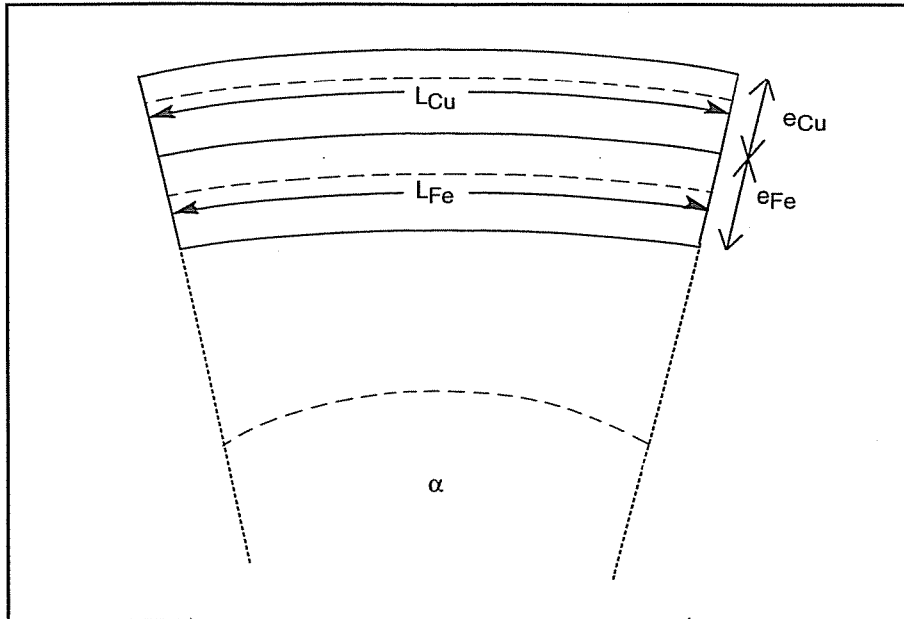


Figura N° 3.

El arco de circunferencia subtende un ángulo α . Las longitudes L_{Fe} y L_{Cu} cumplen con:

$$\begin{aligned} L_{Fe} &= r_{Fe} \alpha = L_0 (1 + \gamma_{Fe} (T - T_0)) \\ L_{Cu} &= r_{Cu} \alpha = L_0 (1 + \gamma_{Cu} (T - T_0)) \end{aligned}$$

Donde r_{Fe} , r_{Cu} , L_{Cu} , L_{Fe} , γ_{Cu} y γ_{Fe} son: los radios de curvatura, las longitudes de las líneas medias de las placas y los coeficientes de dilatación lineal del cobre y de hierro, respectivamente.

$$\gamma_{Cu} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{C} \quad \text{y} \quad \gamma_{Fe} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$$

Por otro lado, se cumple que:

$$r_{Cu} = r_{Fe} + (e_{Fe} + e_{Cu}) / 2$$

Donde:

$$\begin{aligned} e_{Fe} &= e_{0Fe} (1 + \gamma_{Fe} (T - T_0)) \\ e_{Cu} &= e_{0Cu} (1 + \gamma_{Cu} (T - T_0)) \end{aligned}$$

Así el ángulo que subtende el bimetalo a una

dada temperatura viene dado por:

$$\alpha = \frac{2 L_0 (\gamma_{Cu} - \gamma_{Fe}) (T - T_0)}{(e_{Cu} + e_{0Fe}) + (e_{0Fe} \gamma_{Fe} + e_{0Cu} \gamma_{Cu}) (T - T_0)}$$

Nota: Estos cálculos no se ven afectados por la dilatación del ancho de las placas.

RESPUESTA 2.

La resistencia total del circuito (R_T) es la suma de la resistencia de la lámpara (R_L) y de la resistencia de la llave bimetálica (R_B):

$$R_T = R_L + R_B$$

Cuando la lámpara está encendida, el circuito disipa una potencia dada por:

$$P = E^2 / R_T$$

La R_B puede tener un valor máximo, en

condiciones de trabajo (de acuerdo a los requerimientos deseados), igual a:

$$R_B = (0.02 / 100) R_T$$

Así, tenemos que:

$$R_B = (0.02 / 100) E^2 / P = 8 \times 10^{-4} \Omega$$

Luego la resistencia del bimetetal a T_0 , R_{B0} , es:

$$R_{B0} = R_B / 4 = 2 \times 10^{-4} \Omega$$

RESPUESTA 3.

La resistencia de cada una de las láminas en términos de sus dimensiones y de acuerdo a la resistividad de cada material, viene dada por:

$$R_{Fe} = \rho_{Fe} L_{Fe} / (\alpha e_{Fe})$$

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} L_{Cu} / (\alpha e_{Cu})$$

Donde la resistividad del hierro, ρ_{Fe} , es $9.7 \times 10^{-5} \Omega\text{mm}$ y la resistividad del cobre, ρ_{Cu} , es $1.68 \times 10^{-5} \Omega\text{mm}$.

La resistencia equivalente del bimetetal es el

paralelo de estas dos. Así:

$$R_{B0} = (R_{Fe} R_{Cu}) / (R_{Fe} + R_{Cu})$$

$$R_{B0} = \frac{\rho_{Fe} \rho_{Cu} L_0}{\alpha e_{Fe} e_{Cu} (\rho_{Fe} / e_{Fe} + \rho_{Cu} / e_{Cu})}$$

Usando las condiciones:

$$e_{Cu} = e_{Fe} / 4$$

$$R_{B0} = R_B / 4$$

Se pueden despejar los espesores correspondientes de cada metal:

$$e_{Cu} = \frac{\rho_{Fe} \rho_{Cu} L_0}{\alpha R_B (\rho_{Fe} / 4 + \rho_{Cu})} = 0.414 \text{ mm}$$

$$e_{Fe} = 4 \frac{\rho_{Fe} \rho_{Cu} L_0}{\alpha R_B (\rho_{Fe} / 4 + \rho_{Cu})} = 1.656 \text{ mm}$$

RESPUESTA 4.

Para calcular la temperatura a la cual se abre el circuito, se debe considerar la separación a la cual el bimetetal se despega del borne B y a partir de ella estimar aproximadamente el ángulo que subtende el arco de circunferencia formado por el bimetetal (ver Figura N°4).

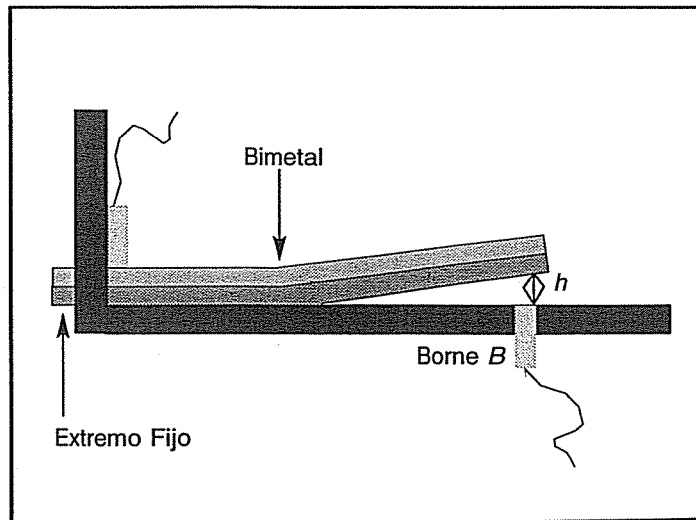


Figura N° 4.

Considerando que el ángulo subtendido por el bimetetal es pequeño, se puede considerar que el bimetetal es aproximadamente recto y el $\text{sen}(\alpha) \approx \alpha$, por lo cual:

$$\alpha \approx h / L_{Cu} \approx h / L_0$$

$$\alpha \approx 1 \text{ mm} / 25 \text{ mm} \approx 2^\circ 20'$$

Finalmente con este ángulo se obtiene la tem-

peratura buscada:

$$T_A = T_0 + \frac{\alpha (e_{Cu} + e_{Fe})}{2 L_0 (\gamma_{Cu} \gamma_{Fe}) - \alpha (e_{Fe} \gamma_{Fe} + e_{Cu} \gamma_{Cu})}$$

$$T_A = 269^\circ \text{C}$$

SUGERIMOS QUE EL LECTOR EVALÚE...

- ¿Las dimensiones encontradas en el "diseño" de esta llave térmica son razonables si se tienen en cuenta las propiedades elásticas de los materiales utilizados? ¿Funcionará la llave?

- Teniendo en cuenta la disipación de calor al ambiente por parte de la llave, ¿habría que cambiar algo en el razonamiento expuesto en la solución del problema?

*“Cuidemos las lámparas, que son caras!!!”,
es una situación problemática realizada por:
Dr. Guillermo Aguirre Varela,
y Dr. Rodolfo Pereyra.*

*La misma, está basada en un problema de la
Instancia Local de la Olimpiada Argentina de
Física, llevada a cabo en Agosto de 2002
en la Escuela Técnica Philips,
de Ciudad de Buenos Aires.*

AL LECTOR: Le pedimos al lector que nos envíe su respuesta comentada. Publicaremos las más interesantes con el nombre de sus autores.