# CAIDA LIBRE EN FLUIDOS VISCOSOS MEDIDA DE LA VISCOSIDAD

CARLOS A. CORDIVIOLA

Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas
Universidad Nacional de Rosario

## 1. *Introducción*

En los cursos de Física donde se incluye el tema de Fluidos viscosos es normal que los alumnos realicen un trabajo de laboratorio para medir la viscosidad dejando caer una esfera en el fluido y determinando la velocidad de caída una vez que la misma es constante: estado estacionario. La fuerza de roce sobre la esfera viene dada en tal caso por la llamada ley de Stokes. Un equipo standard que usa también este fundamento es el viscosímetro de Höeppler. En la mayor parte de los casos se les comenta a los alumnos que debe medirse la velocidad límite luego de que el móvil ha recorrido cierto camino para asegurarse el estado estacionario. En el mejor de los casos se les indica o pregunta como "debería" hacerse para saber que tal velocidad es constante.

Por otra parte no es común encontrar en la bibliografía la fórmula que nos indique la forma en que la velocidad varía con el tiempo y menos aún la ecuación horaria. En el Tomo I de Alonso-Finn[1] se analiza el movimiento de un cuerpo en un fluido viscoso graficando la variación de velocidad con el tiempo y sin dar datos numéricos. En el texto de Fisicoquímica de Eisenberg y Crothers[2] encontramos un tratamiento similar para el caso del movimiento de macromoléculas o moléculas con cargas eléctricas en un fluido y sometidas a la acción de un campo. Allí se comenta que el estado estacionario en este caso se logra rápidamente y puede considerarse que desde el establecimiento del campo la velocidad es la límite.

En el presente trabajo se hace un análisis exhaustivo del movimiento de caída de una esfera obteniendo la ecuación de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo (punto 2). En el punto 3 se analiza cuando, y a partir de qué recorrido previo puede considerarse estado estacionario.

Las expresiones son aplicadas al caso concreto de la determinación de la viscosidad de un fluido como se realiza en el laboratorio de Física I de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la Universidad Nacional de Rosario. Ello se explica en el punto 4 donde se determina a partir de que momento puede ocurrir el estado estacionario. El punto 5 resume las conclusiones de todo lo expuesto.

## 2. *Análisis del movimiento*

Sea una esfera de masa m y radio R que a partir del reposo comienza a caer por causa de su peso (P) en un medio viscoso de viscosidad $\eta$. Llamemos E al empuje del líquido sobre la esfera cuando la misma está totalmente sumergida en aquél y en ese momento $(t = 0)$ sea $X = 0$. Su coordenada X se medirá de arriba hacia abajo.

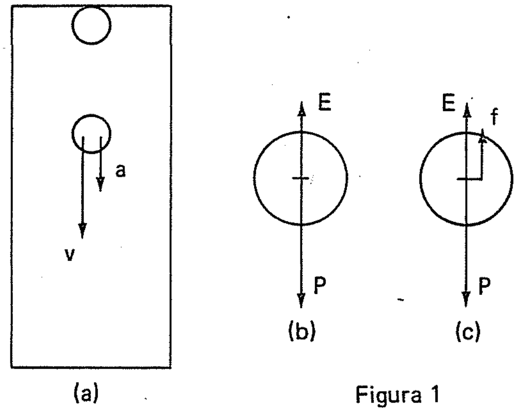


Figura 1

La figura 1 a) muestra la esfera en el líquido en dos instantes: t = 0 y t = t de su movimiento descendente. Las figuras 1 b) y 1 c) muestran para esos instantes los diagramas de cuerpo libre de la esfera con las fuerzas actuantes sobre la misma.

Por lo tanto podemos plantear la siguiente ecuación para el instante cualquiera t.

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = P - E - f \qquad (1)$$

donde f es la fuerza de roce que el fluido ejerce sobre la esfera y que de acuerdo a la fórmula de Stokes[3] vale

$$f = 6 \pi \eta r \frac{d x}{d t} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), dividiendo por m y ordenando llegamos a la ecuación diferencial

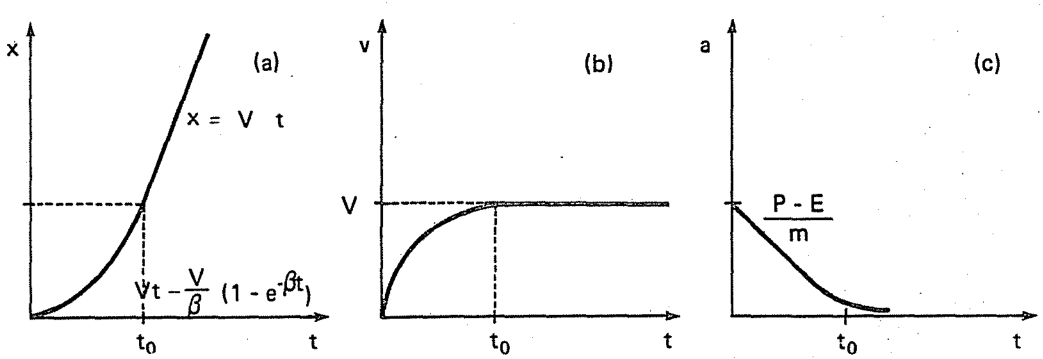

Figura 2

que permite determinar la posición en función del tiempo X = X (t)

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{6 \pi \eta r}{m} \frac{dX}{dt} = \frac{P - E}{m} \qquad (3)$$

La forma de resolver la ecuación se encuentra en el apéndice A. Para las condiciones iniciales X = 0, v = 0 para t = 0 tal solución es

$$X = V . t - \frac{V}{\beta} ( 1 - e^{- \beta t}) \qquad (4)$$

donde

$$V = \frac{P - E}{6 \pi \eta r}$$

$$\beta = \frac{6 \pi r \eta}{m}$$

Derivando 4 se obtiene la ley de variación de v con el tiempo

$$v = V \left[ 1 - e^{-\beta t} \right] \qquad (5)$$

Podemos finalmente calcular la aceleración:

$$a = V \beta e^{-\beta t} \qquad (6)$$

De esta última expresión confirmamos, ya que

$$V \beta = \frac{P - E}{m}$$

la aceleración inicial para t = 0.

Las figuras 2a), 2b) y 2c) muestran las gráficas de x, v y a en función del tiempo. En todas ellas puede reconocerse que para un tiempo conveniente x = Vt, v = V y a = 0, vale decir el movimiento se hace rectilíneo y uniforme. Teóricamente ello ocurriría para $t \to \infty$ pero en la realidad será así cuando la diferencia V - v sean inferiores al error en la medida de la velocidad.

## 3. *Estado estacionario (velocidad límite)*

Como se ha visto en las gráficas de la figura 2 o en las expresiones 4, 5 y 6 a partir de cierto tiempo to, el movimiento es prácticamente rectilíneo y uniforme. Veríamos como puede calcularse el instante to y el camino recorrido por la esfera hasta ese momento.

De la expresión 5 puede deducirse

$$t = \frac{1}{\beta} \ln \frac{V}{V - v} \qquad (7)$$

Si $\epsilon$ es el error relativo (no porcentual) en la medida de v ó V la expresión 7 conduce a

$$to = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \qquad (8)$$

En caso de querer determinar Xo, o sea el camino recorrido por la esfera hasta ese momento resulta, también en función de v,

$$X = \frac{V}{\beta}\left(e^{-\beta\left[\frac{1}{\beta}\ln\frac{V}{V-v}\right]} - 1\right) + V\,\frac{1}{\beta}\,\ln\frac{V}{V-v}$$

que simplificada convenientemente conduce a

$$X = \frac{V}{\beta}\left(\frac{V-v}{V} - 1\right) + \frac{V}{\beta}\ln\frac{V}{V-v} \qquad (9)$$

De donde, como en el caso del tiempo puede obtenerse, fijado el error para medir v

$$\left(\epsilon = \frac{V-v}{V}\right)$$

$$Xo = \frac{V}{\beta}\left(\epsilon - 1 + \ln \underline{1}\right) \qquad (10)$$

En el punto 4 se dan ejemplos numéricos del uso de estas expresiones con datos obtenidos en el laboratorio de Física I de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas (UNR).

## 4. *Aplicaciones numéricas*

Las expresiones 8 y 10 obtenidas en el punto anterior permiten calcular el tiempo y camino recorrido necesarios para que la velocidad de caída de la esfera difiera de la velocidad límite en menos de un valor prefijado $\epsilon$. Si tal valor $\epsilon$ es precisamente el error en la medida de la velocidad límite, a partir de to y después de recorrido Xo no se habrá de distinguir entre v y V.

En el laboratorio de Física I° C de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la UNR se trabaja para determinar la viscosidad de la glicerina, con una esfera de 0,45 cm de diámetro.

Los datos necesarios son los siguientes:

d = 0.45 cm        R = 0.225 cm

- Volumen de la esfera: 0.0477 $cm^3$
- Masa de esfera ($\rho = 7{,}6\ g/cm^3$) 0.363 g
- Masa de glicerina desplazada por la esfera ($\rho = 1{,}25\ g/cm^3$) 0.060 g
- Viscosidad de la glicerina 8,33 poise $\frac{(g)}{cm.s}$

Además debemos conocer el error con que se determina la velocidad. La longitud medida es de 1 m apreciando 5 mm debido al movimiento de la esfera. El tiempo es de orden de 12s una apreciación de 0,1 s. Por lo tanto el error relativo en la medida de la velocidad límite resulta

$$\text{error } \epsilon = \frac{5}{1000} + \frac{0.1}{12} = 0.013 = 1{,}3 \times 10^{-2}$$

Por lo tanto podremos asegurar que para $\epsilon = 10^{-2}$ en las expresiones 8 y 10 no se distinguirá entre v y V.

Con los datos previos calculamos $\beta$ y V:

$$\beta = \frac{6 \times \pi \times 0.225\ cm \times 8{,}33\ g/cm.s}{0.363\ g} = 97{,}32\ s^{-1}$$

$$V = \frac{(0.363 - 0.060)\ g \ .\ 980\ cm/s^2}{6 \times \pi \times 0.225\ cm \times 8{,}33\ g/cm.s} = 8{,}40\ cm/s$$

y finalmente obtenemos, en base a las ecuaciones 8 y 10 to y Xo:

$$to = \frac{1}{97{,}32\ S^{-1}} \quad \ln \frac{1}{10^{-2}} = 0{,}05\ s$$

$$Xo = \frac{8{,}40\ m/s}{97{,}32\ S^{-1}}\left[10^{-2} - 1 + \ln\frac{1}{10^{-2}}\right] = 0{,}31\ cm$$

Como se puede comprobar estos valores son prácticamente despreciables, encontrándose aún por debajo de los errores en la medición de la longitud y el tiempo al determinar la velocidad límite.

Por lo tanto, tan pronto se puede considerar se ha establecido el régimen laminar (validez en la fórmula de Stokes) puede medirse la velocidad límite.

## 5. *Conclusión*

Las ecuaciones deducidas en los parágrafos precedentes, juntamente con los resultados numéricos obtenidos al aplicar las mismas al caso concreto analizado en el punto 4, permiten concluir que tanto el tiempo transcurrido, así como el camino recorrido para alcanzar el estado estacionario son enormemente cortos aún cuando se defina tal estado estacionario a partir del momento en que

$$\frac{V-v}{V} = 10^{-2}$$

Los errores en la medida v ó V siempre están muy por encima de este valor. Por todo ello, en las experiencias realizadas por alumnos se puede inmediatamente medir la velocidad límite; sólo debe atenderse al tiempo necesario para que comience el movimiento laminar evitando los efectos del ingreso de la esfera en el fluido. Es, de todos modos muy útil que los alumnos hagan este análisis y conozcan que es perfectamente posible realizar la medida inmediatamente pues ello no produce error.

**APENDICE A**

*Resolución de la ecuación diferencial del movimiento.*

La ecuación planteada es:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \beta \frac{dX}{dt} = \frac{P - E}{m}$$

donde se ha reemplazado $\frac{6\pi r \eta}{m}$ por $\beta$

La ecuación asociada a la ecuación diferencial homogénea es

$$k^2 + k\beta = 0$$

$$k(k + \beta) = 0$$

cuyas soluciones son $k_1 = 0$ $k_2 = -\beta$. Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$Xc_1 = C_1 + C_2 e^{-\beta t}$$

Una solución particular de la ecuación completa es

$$XC_2 = \frac{P - E}{\beta m} t$$

ya que la primer derivada es $\frac{P - E}{m}$ y la segunda nula y por ende satisface a la ecuación.

La solución general resulta entonces

$$X = C_1 + C_2 e^{-\beta t} + \frac{P - E}{\beta m} t$$

Para calcular $C_1$ y $C_2$ tomamos para $t = 0$, $X = 0$, $v = 0$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$-\beta C_2 + \frac{P - E}{\beta m} = 0$$

de donde $C_2 = \frac{P - E}{\beta^2 m}$ y $C_1 = -\frac{P - E}{\beta^2 m}$

Nos queda así finalmente:

$$X = \frac{P - E}{\beta^2 m}\left[e^{-\beta t} - 1\right] + \frac{P - E}{\beta m} t$$

y

$$v = -\frac{P - E}{\beta m} e^{-\beta t} + \frac{P - E}{\beta m}$$

o sea

$$v = \frac{P - E}{\beta m}\left[1 - e^{-\beta t}\right]$$

como para $t \to \infty$ $v \to \frac{P - E}{\beta m} = \frac{P - E}{6\pi\eta r}$

llamamos a este valor V y significa la velocidad límite. Por lo que finalmente

$$X = Vt - \frac{V}{\beta}\left[1 - e^{-\beta t}\right]$$

**BIBLIOGRAFIA**


1. ALONSO M. and FINN, E.: *Fundamental University Physics*, Pont I, pág. 168 y sig. Addison Wesley Pu. Co. 1969.
2. EISENBERG D. and CROTHERS D.: *Physical Chemistry with Applications to the Life Sciences*, pág. 700 y 701. Benjamin/Cummings Pu. Co. Inc.
3. Es importante dejar aclarado que la fórmula de Stokes, como lo puntualiza ALONSO-FINN (obra citada) es válida para pequeñas velocidades (bajo número de Reynolds). Una demostración detallada de esta expresión puede encontrarse en Landau and Lifshitz, Fluid Mechanics, (traducción al inglés) Pergamon-Press, 1959, pág. 63. Esta condición de baja velocidad se cumple para una esfera en un medio viscoso como glicerina. Para una gota de lluvia, por ejemplo, en aire ya no es válido y en ese caso la fuerza de roce es proporcional al cuadrado de v.