

PROBLEMAS COMENTADOS

¡¡AHORA SÍ ME GUSTA LA FÍSICA, MAMÁ!!

ENUNCIADO.

Juan jugaba en la caja del camión de su papá, haciendo rebotar una pelota de goma sobre la rampa metálica que se utiliza para subir bultos al camión. Como todas las tardes el niño practicaba este juego, podía pronosticar el número de rebotes que realizaba la pelota sobre la rampa antes de que tocara el piso, de acuerdo con la forma en que lanzara la pelota.

Su mamá se disgustaba debido a que el niño no estudiaba. Un día, finalmente, la mamá de Juan cansada de que su hijo se llevara a rendir física, decidió aprovechar el interés que él tenía por este juego y lo desafió a que realizara otros tiros, diferentes a los que usualmente hacía. Ante el desconcierto de Juan, pues con las nuevas formas de arrojar la pelota no podía pronosticar el número de rebotes, su mamá le sugirió que resolvieran juntos el problema teóricamente, y que luego verificaran sus resultados realizando los lanzamientos correspondientes.

Luego de esto Juan y su mamá pudieron determinar los siguientes resultados para hacer sus predicciones:

- 1) El tiempo que transcurre entre los dos primeros rebotes.
- 2) La velocidad de la pelota inmediatamente antes de que se produzca el segundo rebote.
- 3) La distancia entre los dos primeros rebotes.
- 4) El número de rebotes que hace la pelota antes de que entre en contacto con el plano horizontal si el plano inclinado tiene una longitud l .

Le proponemos que realice los cálculos necesarios para lograr los mismos objetivos.

RESPUESTA.

HIPÓTESIS.

Para resolver este problema se suponen las siguientes hipótesis:

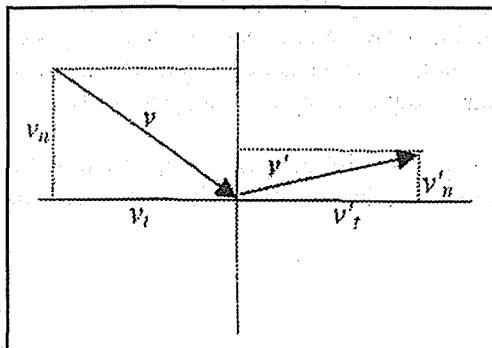
a) La pelota no interacciona con el aire, no hay viento y el movimiento se desarrolla en un plano vertical:

b) La pelota es una partícula puntual.

c) El plano inclinado, donde rebota la pelota, es rígido y está firmemente unido al suelo y al camión y forma un ángulo α con el plano horizontal.

d) En un impacto: la componente de la

velocidad tangencial a la superficie, v_t , no cambia. Mientras que la componente de la



velocidad normal a la superficie, v_n , cambia en

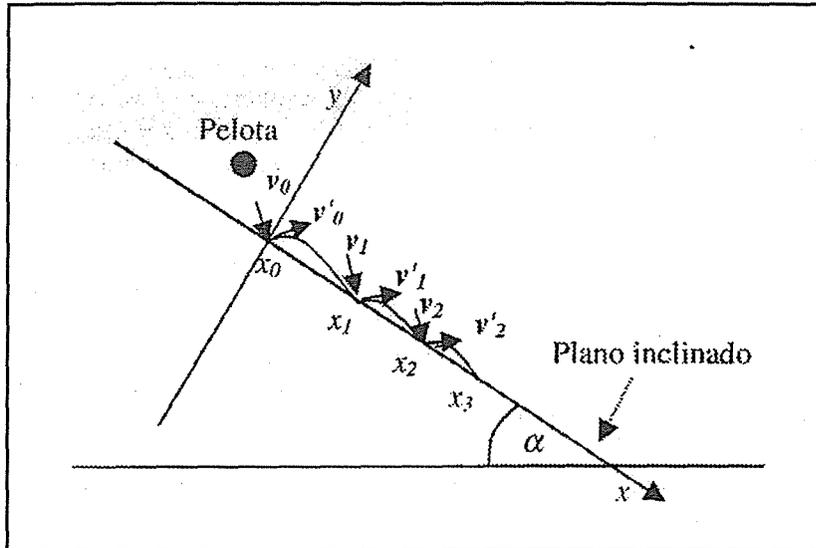
magnitud y en sentido. Estos dos hechos se reflejan en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}v'_t &= v_t \\v'_n &= -e v_n\end{aligned}$$

Donde e se denomina coeficiente de restitución. El valor que toma e es 1 cuando el choque es perfectamente elástico y menor que 1 cuando el choque es plástico.

PLANTEO.

El movimiento de la pelota se puede describir como una alternancia entre choques y movimientos parabólicos. Se usa el sistema de coordenadas indicado en el gráfico. Esto es: el origen de coordenadas está en el punto del plano en donde se produce el primer impacto, el eje x es paralelo al plano y el eje y es normal al mismo.



Se toma $t = 0$ cuando la pelota está en el origen de coordenadas y tiene una velocidad $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, como se indica en la figura. Esta velocidad es la que resulta de la caída de la pelota desde la mano de Juan.

Así, como se dijo en las hipótesis, las componentes de las velocidades antes y después del choque de la pelota contra el plano están relacionadas por:

$$\begin{aligned}v'_{0x} &= v_{0x} \\v'_{0y} &= -e v_{0y}\end{aligned}$$

Donde v'_0 es la velocidad después del rebote de la pelota, y será la velocidad inicial del inmediato movimiento parabólico. La posición de la pelota en el instante en el que se produce el primer choque, $t_0 = 0$, es $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Luego del rebote, las componentes de la aceleración a la que esta sujeta la pelota son:

$$\begin{aligned}a_x &= g \sen \alpha \\a_y &= -g \cos \alpha\end{aligned}$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned}v_x &= v'_{0x} + t g \sen \alpha \\v_y &= v'_{0y} - t g \cos \alpha\end{aligned}$$

Luego, integrando estas ecuaciones obtenemos las coordenadas de la pelota:

$$\begin{aligned}x &= v'_{0x} t + (1/2) t^2 g \sen \alpha \\y &= v'_{0y} t - (1/2) t^2 g \cos \alpha\end{aligned}$$

Luego de transcurrido un intervalo de tiempo t_1 , durante el cual la pelota realiza el movimiento parabólico, impactará nuevamente contra el plano; esto será cuando el valor de y sea cero. Esto es:

$$y = v'_{0y} t_1 - (1/2) t_1^2 g \cos \alpha = 0$$

De donde se obtiene el valor de tiempo correspondiente al segundo contacto de la pelota con el plano, t_1 :

$$t_1 = 2 v'_{0y} / g \cos \alpha$$

Con el valor t_1 se pueden calcular las componentes de la velocidad, v_1 , con la que impactará la pelota esta vez:

$$v_{1x} = v'_{0x} + t_1 g \sen \alpha = (v'_{0x} + 2 v'_{0y} \tan \alpha)$$

$$v'_{1y} = v'_{0y} - t_1 g \cos \alpha = -v'_{0y}$$

Y la coordenada x , en donde impactara, será x_1 :

$$x_1 = (2 v'_{0y} / g \cos \alpha) (v'_{0x} + v'_{0y} \tan \alpha)$$

Este es el valor de la distancia entre el origen y el punto del segundo impacto:

$$x_1 - x_0 = (2 v'_{0y} / g \cos \alpha) (v'_{0x} + v'_{0y} \tan \alpha)$$

Para continuar con la descripción del movimiento se deben usar los valores de x_1 y de v_1 .

En el siguiente impacto de la pelota sobre el plano se produce un nuevo cambio en la velocidad de la misma:

$$\begin{aligned} v'_{1x} &= v_{1x} \\ v'_{1y} &= -e v_{1y} \end{aligned}$$

Así, v'_1 será la velocidad inicial de un nuevo movimiento parabólico, se debe considerar que en este caso la pelota esta en $(x_1, 0)$ al tiempo $t = t_1$. De lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + v'_{1x} (t - t_1) + (1/2)(t - t_1)^2 g \sin \alpha \\ y &= v'_{1y} (t - t_1) - (1/2)(t - t_1)^2 g \cos \alpha \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se puede determinar el siguiente tiempo de impacto, t_2 :

$$\begin{aligned} y &= v'_{1y} (t_2 - t_1) - (1/2)(t_2 - t_1)^2 g \cos \alpha = 0 \\ t_2 &= t_1 + 2 v'_{1y} / g \cos \alpha \end{aligned}$$

Y el siguiente punto de contacto será en x_2 :

$$x_2 = x_1 + v'_{1x} (t_2 - t_1) + (1/2)(t_2 - t_1)^2 g \sin \alpha$$

Y la distancia entre el segundo impacto y el tercero, $x_2 - x_1$, en términos de las componentes de la velocidad v'_1 es:

$$x_2 - x_1 = (2 v'_{1y} / g \cos \alpha) (v'_{1x} + v'_{1y} \tan \alpha)$$

La velocidad con que la pelota llega a x_2 es:

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v'_{1x} + t_2 g \sin \alpha \\ v_{2y} &= v'_{1y} - t_2 g \cos \alpha \end{aligned}$$

Así, se puede ver en general que para $n \geq 0$ se cumple:

$$\begin{aligned} v'_{nx} &= v_{nx} \\ v'_{ny} &= -e v_{ny} \end{aligned}$$

Y el tiempo entre dos choques consecutivos cumple con:

$$t_{n+1} - t_n = 2 v' / g \cos \alpha$$

La sucesión comienza con $t_0 = 0$.

Además se cumple:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (2 v'_{ny} / g \cos \alpha) (v'_{nx} + v'_{ny} \tan \alpha) \\ v_{(n+1)x} &= v'_{nx} + t_{(n+1)} g \sin \alpha \\ v_{(n+1)y} &= v'_{ny} - t_{(n+1)} g \cos \alpha \end{aligned}$$

Y la distancia que habrá recorrido la pelota en la dirección x es:

$$x_{n+1} = x_n + (2 v'_{ny} / g \cos \alpha) (v'_{nx} + v'_{ny} \tan \alpha)$$

Así, para saber el número de rebotes que dará una pelota contra un plano de longitud l , se deberán calcular los valores de x_i desde $i = 0$ hasta el que corresponda a un k tal que el x_k sea mayor que l , con lo cual el número de choques será k .

En el caso particular en que: $e = 0.8$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 2.5 \text{ m}$, $v_{0x} = 1 \text{ m/s}$, $v_{0y} = -1.74 \text{ m/s}$ (que corresponden a una velocidad de módulo 2 m/s con dirección paralela a la aceleración de la gravedad) se obtiene:

i	$v_{iy} \text{ (m/s)}$	$v'_{iy} \text{ (m/s)}$	$t_i \text{ (s)}$	$v_{ix} \text{ (m/s)}$	$v'_{ix} \text{ (m/s)}$	$x_i \text{ (m)}$
0	-1,74	1,39	0	1	1	0
1	-1,39	1,11	0,33	2,61	2,61	0,59
2	-1,11	0,89	0,26	3,89	3,89	1,44
3	-0,89	0,71	0,21	4,92	4,92	2,37
4	-0,71	0,57	0,17	5,74	5,74	3,27

Por lo tanto se puede decir que la pelota hará cuatro rebotes sobre el tablón.

¿QUIERE IMITAR A JUAN?

Le proponemos que:

1. Realice cálculos similares, considerando el valor de $e = 1$ (choque elástico).
2. Encuentre la distancia entre rebotes consecutivos sobre un plano horizontal.
3. Haga una tabla para una gran cantidad de rebotes y observe el comportamiento que tiene el tiempo transcurrido y la distancia entre rebotes a medida que aumenta el número de los mismos.

*“¡¡Ahora sí me gusta la física, Mamá!!”,
es una situación problemática
ideada y realizada por:
Lic. Omar Evequoz,
Dr. Guillermo Aguirre Varela,
y Lic. Rodolfo Pereyra.*

AL LECTOR: Le pedimos al lector que nos envíe su respuesta comentada. Publicaremos las más interesantes con el nombre de sus autores.