

# La enseñanza problematizada de la física cuántica en el nivel introductorio. Una propuesta fundamentada

Teaching introductory quantum physics through a problem based unit. A reasoned proposal

REVISTA  
DE  
ENSEÑANZA  
DE LA  
FÍSICA

Joaquín Martínez Torregrosa<sup>1,2</sup>, Francisco Savall Alemany<sup>1</sup>,  
Josep Lluís Domènech Blanco<sup>1</sup>, Alexandra Rey Cubero<sup>1</sup>,  
Sergio Rosa Cintas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Didáctica General y Didácticas Específicas.  
Facultad de Educación, Universidad de Alicante. CP. 03690, Sant  
Vicent del Raspeig (Alicante), España.

<sup>2</sup>Instituto de Física Aplicada a las Ciencias y la Tecnología.  
Universidad de Alicante. Alicante, España.

E-mail: joaquin.martinez@ua.es

(Recibido el 15 de septiembre de 2016; aceptado el 7 de noviembre de 2016)

## Resumen

La investigación didáctica no ha llegado a un consenso sobre cómo se deben abordar los cursos introductorios de física cuántica, tanto en lo referente a los contenidos que se deben enseñar como a la interpretación física de modelos fundamentales como la dualidad onda-partícula. Ante la falta de consenso, hemos llevado a cabo un estudio histórico y didáctico que nos ha permitido establecer las ideas clave de un modelo cuántico de emisión y absorción de radiación con la capacidad explicativa suficiente para que valga la pena ser enseñado. Así mismo, hemos identificado las ideas clave de un modelo de cuántum que explica el comportamiento de los electrones y los fotones, lo que nos permite superar la crisis que ocasionó en la física la introducción del modelo cuántico de emisión y absorción de radiación. Aprovechando los problemas que históricamente llevaron al establecimiento de estos modelos, hemos diseñado la unidad problematizada para la enseñanza de la física cuántica en el bachillerato que presentamos en este artículo, haciendo especial hincapié en los grandes pasos que llevan a los estudiantes a construir los modelos propuestos.

**Palabras clave:** Enseñanza problematizada; Física cuántica; Fotón; Quantum; Modelo.

## Abstract

Didactic research has not reached a consensus on how introductory quantum physics courses should be addressed, both in relation to the content to be taught as in the physical interpretation of key models such as the wave-particle duality. In the absence of consensus, we conducted a historical and didactic study aiming at establishing the key ideas of a quantum model of emission and absorption of radiation with sufficient explanatory power to make it worthwhile. We also identified the key ideas of a model for quantum that can explain the behaviour of electrons and photons and which allow us to overcome the crisis produced by the introduction of the quantum model of emission and absorption of radiation. Taking into account the problems that historically led to the establishment of these models, we designed the problem based unit for teaching quantum physics in high school that we present in this article, paying special attention to the great steps that drive students to build the proposed models.

**Keywords:** Problem based teaching; Quantum physics; Photon; Quantum; Model.

## I. INTRODUCCIÓN: ¿HAY ALGÚN PROBLEMA CON LA FÍSICA CUÁNTICA A NIVEL INTRODUCTORIO?

La enseñanza y aprendizaje de la física cuántica en el Bachillerato o cursos iniciales universitarios no ha recibido la misma atención en la investigación didáctica que otros temas, como el estudio del movimiento, la mecánica clásica o la energía. Las propuestas sobre cómo abordar los cursos

introdutorios de física cuántica carecen de la convergencia que podemos encontrar en otros campos. Más aún, no sólo hay divergencias sobre cómo habría que enseñarla, sino en qué sería importante tratar e, incluso, en la interpretación de conceptos o modelos clave.

Desde su aparición en los años 30 del siglo pasado los textos de los cursos introductorios de física cuántica se han basado en una presentación histórica de lo que podemos considerar “tópicos cuánticos” empíricos (radiación de cuerpo negro, efecto fotoeléctrico, espectros de los gases, dualidad onda-partícula de de-Broglie, etc.) (Johnston, Crawford y Fletcher, 1998; Fletcher y Johnston, 1999; Mc Kagan, Perkins, Dubson, Malley, Reid, Lemaster y Wieman, 2008), no exenta de errores y deformaciones (Niaz y Marcano, 2012; Savall, Domènech y Martínez Torregrosa, 2013a), que no alcanzan a transmitir (aun cualitativamente) la concepción única sobre materia y radiación que hace de la teoría cuántica una teoría cerrada y completa (y no un “perfeccionamiento o modificación” de la física clásica y el electromagnetismo), al igual que lo son la mecánica newtoniana o la teoría electromagnética de Maxwell (Heisenberg, 1972, pp 119-124). En el extremo opuesto (Fischler, 1999; Pospiech, 1999 y 2000; Michelini, Ragazzon, Santi y Stefanel, 2000), encontramos propuestas que defienden empezar por el formalismo matemático y abstracto, casi sin referencia empírica; propuesta que no compartimos para un curso introductorio.

Respecto a la ausencia de consenso sobre qué debe incluirse en una introducción a la física cuántica, la polémica sobre la presencia o no del modelo de Bohr en la enseñanza, con numerosos argumentos tanto a favor (Petri y Niedderer, 1998; Taber, 2001; Kalkanis, Hadzidaki y Stavrou, 2003) como en contra (Fischler y Lichfeld, 1992; Pospiech, 1999 y 2000; Michelini y otros, 2000; Budde, Niedderer, Scott y Leach, 2002a y b; Zollman, Rebellos y Hogg, 2002; Escalada, Rebello y Zollman, 2004) es tal vez el ejemplo más destacado. Así mismo, desde el punto de vista conceptual, llama la atención las diferentes interpretaciones sobre la *dualidad onda-partícula* (Wuttiptom, Sharma, Johnston, Chitaree y Soankwan, 2007; Cheong y Song, 2014), que es una pieza clave sobre la que se levanta la física cuántica, e incluso sobre la totalidad de la teoría cuántica (de Ronde, 2015).

A pesar de las diferencias en los objetivos planteados y las estrategias para alcanzarlos, la investigación recoge resultados convergentes sobre las principales dificultades de los estudiantes (¡y profesores!) que la enseñanza habitual no ha contribuido a superar. Así, se ha constatado que los estudiantes tienen dificultades para explicar fenómenos que se encuentran en el origen de la teoría cuántica, como el efecto fotoeléctrico (Steinberg, Oberem y McDermott, 1996; Thacker, 2003; Mc Kagan y otros, 2008) o los espectros de los gases (Rebello y Zollman, 1999; Zollman y otros, 2002; Escalada y otros, 2004, Ivanjek, Shaffer, McDermott, Planinic y Veza, 2015a y b; Savall, Domènech, Guisasola y Martínez Torregrosa, 2016). Respecto a los modelos cuánticos de partícula elemental y radiación, Niaz y Marcano (2012) han constatado que los libros de texto no dan una visión correcta del proceso histórico que llevó a la comunidad científica a construir el concepto de cuántum. Así mismo, también se ha constatado que construir el modelo abstracto de cuántum a partir de las imágenes “pictóricas” de partícula y de onda supone un gran esfuerzo para los alumnos (Johnston y otros, 1998) por lo que una parte de los estudiantes acaba considerando que tanto electrones como fotones se comportan como partículas clásicas (Fischler y Lichfeld, 1992; Fischler, 1999; Budde y otros 2002a y b), que los alumnos no desarrollan un modelo único de cuántum para la materia y la radiación (Olsen, 2001; Vokos, Shaffer, Ambrose y McDermott, 2000; Olsen, 2002), que tienen dificultades para interpretar la “dualidad onda-partícula” (Steinberg y otros, 1996; Fischler, 1999; Rebello y Zollman, 1999; Steinberg, Wittmann, Bao y Redish, 1999; Olsen, 2002) y el principio de incertidumbre (Johnston y otros, 1998; Fletcher y Johnston, 1999, Budde y otros, 2002a y b; Kalkanis y otros, 2003).

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta para la introducción a la física cuántica en el último curso de Bachillerato – y, con algunas variaciones, para la asignatura de Física de primer curso universitario – elaborada tras una extensa revisión de la literatura didáctica, dentro del modelo de enseñanza problematizada. No obstante, no describiremos el proceso completo que seguimos para planificar la enseñanza problematizada de un tema o de una gran síntesis (véanse Verdú y Martínez Torregrosa, 2004, pp. 71-98; Osuna, Martínez Torregrosa, Carrascosa y Verdú, 2007), sino que nos centraremos en justificar qué se debería tratar de conseguir en una introducción a la física cuántica y a discutir algunos apartados de la secuencia de enseñanza, que puede encontrarse completa en Savall, Domènech y Martínez Torregrosa (2015). Dicha secuencia se ha llevado a cabo durante varios años en la asignatura de Física del último curso de Bachillerato (alumnos de 17 a 18 años), siendo el tiempo empleado de 16 a 20 horas.

## II. ¿QUÉ NOS GUSTARÍA CONSEGUIR CON NUESTROS ALUMNOS EN UNA INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CUÁNTICA? ¿QUÉ PROBLEMA SERÍA ADECUADO PARA ORGANIZAR SU ENSEÑANZA?

Para establecer la meta orientadora del tema, identificar ideas que permitieron avanzar y los obstáculos que hubo que superar, hemos realizado un estudio –guiados siempre por una intencionalidad didáctica- de la evolución de las ideas en este campo. Exponemos brevemente lo más relevante - aprovechando la familiaridad del lector con los pasajes más divulgados - y lo que nos ha permitido seleccionar el problema en torno al cual organizar la enseñanza.

### A. Un gran primer paso: la invención de un modelo sobre la interacción entre la radiación y la materia

Como es bien sabido, los orígenes de la física cuántica se remontan a principios del siglo XX, cuando los intentos por explicar cómo interacciona la radiación con la materia llevaron a la física a una crisis profunda (Einstein e Infeld, 1986). De hecho, desde finales del siglo XIX diversos fenómenos relacionados con la emisión y absorción de radiación, como la distribución de la intensidad del espectro del cuerpo negro o los espectros de los gases, no tenían explicación a partir de los modelos clásicos de emisión y absorción de ondas electromagnéticas.

Para explicar el espectro del hidrógeno, Niels Bohr tuvo que abandonar el modelo clásico de emisión de radiación electromagnética (de acuerdo con el cual un oscilador cargado emite radiación electromagnética de naturaleza ondulatoria cuya frecuencia es idéntica a la frecuencia de oscilación del sistema emisor) y postular que la emisión de radiación por parte del átomo de hidrógeno se debe a transiciones de su único electrón entre estados de energía estacionarios, en los cuales el electrón vibra sin emitir radiación. Para explicar la frecuencia de las líneas espectrales, Bohr estableció una relación de proporcionalidad entre la energía emitida o absorbida por el átomo y la frecuencia de las radiaciones emitidas o absorbidas (Bohr, 1913a y b). Matemáticamente, dicha relación se expresa a través de la ecuación  $\Delta E_{\text{átomo}} = h\nu_{\text{radiación}}$ , donde  $h$  representa la constante de Planck. A pesar del éxito conseguido por Bohr con la explicación de la frecuencia de las líneas espectrales del hidrógeno, dicho modelo tuvo que ser ampliado y modificado, al menos en los aspectos siguientes, para dar cuenta de una mayor cantidad de fenómenos de emisión y absorción de radiación:

- Bohr consideraba en su trabajo de 1913 que la radiación estaba formada por ondas electromagnéticas, aunque la hipótesis del cuanto de radiación de Albert Einstein había sido propuesta en 1905. Esta hipótesis, de acuerdo con la cual la energía de la radiación ha de ser concebida como suma de cuantos de energía indivisibles, sufrió un fuerte rechazo por parte de la comunidad científica (Savall, Domènech y Martínez-Torregrosa, 2013a) y no fue hasta 1923, con la interpretación del efecto Compton, cuando el modelo cuántico de radiación basado en el concepto de fotón acabó siendo aceptado. Este es el que se usa en la actualidad para explicar los procesos de emisión y absorción.

- En los procesos de absorción de radiación solo se absorben fotones que excitan a los electrones que se encuentran en el estado fundamental. Las transiciones de electrones de un estado excitado a otro de mayor energía a causa de la absorción de un fotón son *altamente improbables*, aspecto que Bohr no contempló en sus trabajos iniciales. Si esto ocurriese, los átomos y moléculas se ionizarían con facilidad. Por ejemplo, en el caso concreto del hidrógeno, tras absorber un fotón capaz de excitar al electrón desde el estado fundamental al primer estado excitado, el átomo podría absorber un segundo fotón e ionizarse. Sin embargo, este fenómeno no se observa en condiciones normales. Solo si la temperatura del gas es lo suficientemente elevada habrá átomos de hidrógeno en el segundo estado estacionario que puedan absorber fotones con una probabilidad que no sea extremadamente baja, de forma que pueda observarse en el espectro de absorción la línea negra correspondiente a la ausencia de la frecuencia que produce la transición electrónica entre estados excitados (Rutherford, Holton y Watson, 1981; Martínez Sancho, 1992, p. 264).

- Las predicciones iniciales de Bohr se limitaron a las frecuencias de los espectros, no ofrecían ninguna explicación sobre la diferente intensidad de las líneas espectrales (Lindley, 2008, p. 59-60). Un modelo completo que explique la emisión y absorción de radiación debía dar cuenta no solo de las frecuencias de la radiación emitida por una fuente luminosa, *sino también de su intensidad*, en tanto que esta es una característica básica de cualquier radiación. Fue Einstein quien relacionó la intensidad que presenta cada frecuencia de la radiación con la *probabilidad* de que se dé en la fuente luminosa la transición electrónica que genera la radiación de dicha frecuencia (Einstein, 1917). Este carácter probabilístico es una consecuencia de la existencia de los niveles discretos de energía e impide hacer predicciones deterministas sobre el comportamiento futuro de los electrones que se encuentran en estados excitados (Bohr, 1964; p. 43; Jammer, 1966, p. 170-171).

La incorporación de la idea de indeterminación intrínseca, que solo permite hablar de “probabilidad de”, de las transiciones electrónicas (y, por tanto, la indeterminación sobre cuándo será absorbido o emitido un fotón), supuso un paso significativo en la elaboración de un modelo sobre la interacción radiación-materia. Otro paso importante fue la demostración de que la cuantización de la energía en los átomos y en la radiación no era una característica exclusiva de los procesos de emisión y absorción, sino que la energía del átomo y de la radiación está cuantizada “por separado”. James Franck y Gustav Ludwig Hertz constataron que los átomos de mercurio en fase gaseosa solo pueden absorber cantidades discretas de energía al ser bombardeados con electrones acelerados, y que esas cantidades de energía eran iguales a las que absorbían cuando eran irradiados, lo que constituyó una nueva evidencia de la cuantización de la energía de los átomos (Sánchez Ron, 2001, p. 299-300). Por otro lado, los trabajos de Compton y su equipo zanjaron la controversia sobre la naturaleza corpuscular de los fotones evidenciando que la cuantización de la energía de la radiación es una característica propia de la radiación, no exclusiva de los procesos de emisión y absorción (Compton, 1927; Pais, 1984, p. 418-423).

A la luz de este análisis histórico y epistemológico, consideramos que el modelo cuántico que deben adquirir los alumnos para explicar la emisión y absorción de radiación debe constar de la cuantización de la energía de los átomos (o de los electrones en los átomos); de la cuantización de la energía de la radiación y de un modelo de interacción radiación-materia que incluya la indeterminación intrínseca (probabilidad de los sucesos). Este modelo se concreta en las siguientes ideas clave (IC) (Savall y otros, 2016):

- IC1. La energía de los electrones en átomos, moléculas o cristales está cuantizada:
  - IC1.1. Los electrones solo se pueden encontrar en estados estacionarios caracterizados por valores discretos de la energía, en los cuales no emiten energía. Cualquier cambio de energía implica el paso del electrón de un estado estacionario a otro.
- IC2. La energía de la radiación está cuantizada:
  - IC2.1. La radiación consiste en un flujo de fotones, entendidos como cuantos indivisibles.
  - IC2.2. La energía de cada fotón es proporcional a la frecuencia de la radiación.
  - IC2.3. La intensidad de la radiación es proporcional a la cantidad y frecuencia de los fotones que la integran.
- IC3. Cada transición electrónica es consecuencia de la interacción entre un electrón y un fotón:
  - IC3.1. La frecuencia de la radiación emitida o absorbida por un electrón es proporcional a la diferencia de energía entre los estados entre los que tiene lugar la transición.
  - IC3.2. Las transiciones hacia estados de menor energía son de carácter aleatorio, tanto por lo que se refiere al estado final como al instante en que tendrá lugar una transición.
  - IC3.3. La intensidad de cada frecuencia de radiación emitida es proporcional a la cantidad de transiciones que la originan por unidad de tiempo.
  - IC3.4. Para un colectivo de electrones que se encuentran en el estado fundamental, las transiciones producidas por la absorción de un fotón tienen lugar desde dicho estado a un estado excitado. Las transiciones, por absorción, entre estados excitados son muy poco probables.

Este modelo tiene suficiente capacidad explicativa y predictiva para que merezca la pena enseñarlo y debe constituirse en un primer paso básico en la enseñanza de la física cuántica.

## **B. Un segundo paso: la recuperación de la coherencia. El modelo de cuántum de Copenhague o principio de complementariedad**

No obstante, aunque el modelo propuesto explica la emisión y absorción de radiación, presenta diversos problemas. Por un lado, introduce un modelo corpuscular para la radiación que contradice al modelo ondulatorio aceptado por el electromagnetismo. No podemos afirmar que la luz es una onda cuando atraviesa dos rendijas y que es una partícula cuando interacciona con un átomo, ¡y quedarnos tan tranquilos! Ambos modelos son imprescindibles para dar cuenta de la totalidad de los resultados experimentales conocidos, pero carecen de conexión lógica (Pais, 1984, p. 416; Holton, 1982, p. 120-121).

Por otro lado, adolece del mismo problema que tenía la teoría cuántica anterior a 1925, que se caracterizaba por resolver los problemas cuánticos aplicando las leyes clásicas y posteriormente “pasarlos a través de las misteriosas condiciones cuánticas” para ajustar la solución a los resultados experimentales (Jammer, 1996, p. 196). Así es como se determinaban las energías de los estados estacionarios de los átomos: ajustándolas para dar cuenta de los espectros. Nada comparable con la elegancia hipotético-deductiva de la mecánica newtoniana (dentro de su campo de aplicación), por ejemplo. Por último, ni más ni menos, incorpora la idea de la indeterminación intrínseca y diferente probabilidad de los sucesos, algo contrario no ya a la física clásica, sino a la visión del mundo clásica, incluyendo la filosofía kantiana (Heisenberg, 1972, p.

146-155). Superar esta disyuntiva entre la física clásica y la nueva física cuántica exigió encontrar un nuevo marco teórico tan coherente como lo había sido la física clásica (Jammer, 1996, p. 88).

El intento de recuperación de la coherencia exigía encontrar un nuevo modelo de materia y radiación (de electrón y fotón) que introdujese, a la vez, propiedades de partícula y de onda. Fue Louis de Broglie quien, en 1924, estableció como hipótesis que un electrón (y por extensión cualquier partícula) se ha de corresponder con una onda estacionaria cuya longitud de onda responde a la ecuación  $\lambda = \frac{h}{p}$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $p$  el momento lineal de la partícula (De Broglie, 1929). Esta hipótesis presentaba la ventaja de que los estados estacionarios del átomo se pueden obtener a partir de las características físicas del electrón y del propio átomo, lo que evita tener que postularlos. Sin embargo, y a pesar de que la evidencia experimental llegó tan solo 3 años más tarde, el modelo propuesto por de Broglie no aclaraba la naturaleza de la “onda de materia” ni establecía una ecuación que la describiese matemáticamente. De Broglie se limitó a añadir una longitud de onda a un electrón considerando que la partícula coincidía en el espacio con un paquete de ondas que la guía pero que no transporta energía. De hecho, en un principio hablaba de una “onda asociada ficticia” (Sánchez Ron, 2001, p. 403; Heilbron, 2010, p. LIV; Kumar, 2011, p. 205).

Fue Erwin Schrödinger quien, como hipótesis (igual que lo es el segundo principio de la mecánica newtoniana), propuso una ecuación que permitió deducir la expresión matemática de las “ondas de materia”, conocida posteriormente como ecuación de Schrödinger. Él mismo dio una interpretación de su significado: consideró el electrón como una nube de carga eléctrica oscilante distribuida alrededor del núcleo atómico y relacionó el cuadrado de la amplitud de la onda con la densidad volumétrica de carga (Jammer, 1966, p. 267; Heilbron, 2010, p. LIV). Esta interpretación, que negaba los saltos cuánticos y la indeterminación intrínseca (Heisenberg, 1972, p. 93-96) y que parecía válida para electrones ligados al átomo, no permitía explicar otros fenómenos en los que los electrones se identificaban con cargas puntuales indivisibles, y donde la discontinuidad es evidente, como la fórmula de Planck para la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, la dispersión Compton o las imágenes obtenidas en las colisiones entre partículas elementales usando cámaras de niebla (Lindley, 2008, p. 135 y 142; Kumar, 2011, p. 291).

Max Born, influenciado por la idea de Einstein de relacionar la amplitud del campo electromagnético con el número de cuantos de luz, propuso que las ondas de materia se relacionaban con la probabilidad de detectar la partícula. Así, allí donde la onda tiene poca amplitud la probabilidad de detectar a la partícula es pequeña y viceversa (Lindley, 2008, p. 142). De acuerdo con esta interpretación, el carácter ondulatorio no lo tiene el electrón, sino la función de probabilidad de encontrarlo en una determinada región del espacio (Kompanéyetz, 1971, p. 37). Son diversos los fenómenos físicos en los que se pone de manifiesto esta relación entre el cuadrado de la amplitud y la probabilidad de detectar al electrón, siendo el de la doble rendija el más paradigmático. En él, se lanzan electrones a través de una doble rendija y posteriormente se les hace incidir sobre una pantalla. Al analizar los puntos de impacto de los electrones se observa que reproducen un patrón de interferencia característico de una onda. Este resultado, que se obtiene también al usar fotones, evidencia la diferencia entre estos y las partículas clásicas (Gribbin, 1986, p. 144; Feynman, 2000; p. 141-164).

De acuerdo con la interpretación de Born, para dar cuenta de la distribución de los cuántums (electrones o fotones) sobre la pantalla hemos de considerar que se propagan como una onda que atraviesa la doble rendija y llega hasta la pantalla, sufriendo interferencias. Donde el cuadrado de la amplitud de la onda es mayor (donde se producen interferencias constructivas) tendremos una mayor probabilidad de detectar un cuántum. Pero en el momento de la detección el cuántum se comporta como una partícula, impactando en un punto. Esta interpretación se conoce como principio de complementariedad e introduce un modelo para los cuántums al que llamaremos “modelo de Copenhague”.

Desde el punto de vista matemático, la onda de probabilidad está descrita por la función de onda, una función compleja que toma valores para cada punto del espacio. Estos valores representan la superposición de todos los posibles estados físicos del sistema. Cuando se mide una magnitud (la posición, por ejemplo), la función de onda toma un valor de entre todos los posibles (matemáticamente se dice que se proyecta sobre uno de sus autovectores). Justo en ese instante la probabilidad de detectar el electrón en cualquier otro punto de la pantalla se convierte en cero (Kumar, 2011, p. 351). Tenemos, por tanto, que la posición de un cuántum (y otras magnitudes físicas como el momento lineal o la energía) está indeterminada, afectada por una incertidumbre, *antes* de llevar a cabo una medida (Holton y Brush, 1987, p. 730-731).

Originalmente, la incertidumbre asociada a una magnitud fue atribuida a la sensibilidad de los instrumentos usados para hacer las medidas de posición o momento lineal. Sin embargo, el uso de mejores instrumentos permite medir la posición (o el momento lineal) de un cuántum con gran precisión pero no permite reducir el tamaño de la región en que dicho cuántum puede ser detectado. Heisenberg, a pesar de que sabía que la indeterminación era fruto de la teoría (es decir, del modelo de cuántum), favoreció inicialmente una interpretación experimental de la incertidumbre que la atribuye al hecho de que cualquier medida de la posición de una partícula altera su momento lineal y viceversa (Heisenberg,



1933; Heilbron, 2010, p. LVII), debido a su interés por contradecir los ejemplos específicos que le planteaban otros físicos (como el de la medición con un “super-microscopio ideal”). Esta interpretación no gozó del acuerdo de la comunidad científica en tanto que suponía que toda partícula era un corpúsculo, lo que viola el “principio de complementariedad” o “modelo de Copenhague” de acuerdo con el cual antes de medir la posición o el momento lineal de un cuántum solo existe la función de onda de probabilidad. Atendiendo al modelo de cuántum que establece el principio de complementariedad, la incertidumbre debe ser considerada como una medida estadística de la dispersión de los posibles valores de una magnitud predichos por la función de onda, y esta dispersión de valores no depende de los instrumentos de medida, sino que es característica del sistema bajo estudio (Tarrach, 1987).

Tras estudiar los cambios ontológicos que llevaron al establecimiento de un modelo de cuántum que resuelve el problema de la naturaleza de la luz y tiene capacidad para predecir los estados estacionarios de los átomos, podemos establecer las siguientes ideas clave para la enseñanza:

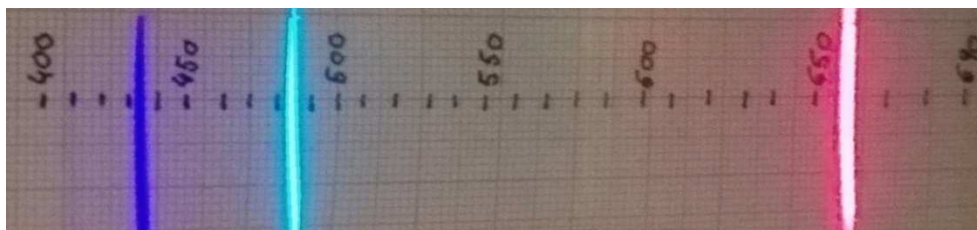
- IC4. Tanto los fotones como los electrones son cuántums. Estos entes se caracterizan por:
  - IC4.1. Se propagan como ondas de probabilidad.
  - IC4.2. Se detectan como partículas, en un punto y con una determinada energía y momento lineal.
  - IC4.3. Es más probable detectarlos en aquellos lugares donde la amplitud de la onda es mayor.
  - IC4.4. Como consecuencia de su propia naturaleza, no se puede conocer de manera simultánea y con absoluta precisión su posición y momento lineal (y, por tanto, su trayectoria).

A la luz del análisis realizado, consideramos que la comprensión y uso funcional del modelo de emisión y absorción de la luz por la materia (expresado en las ideas claves IC1 a IC3) junto con el modelo de cuántum (expresado en las ideas claves IC4) deberían constituirse en las metas de una introducción a la física cuántica. Y el problema que puede ser adecuado para organizar la enseñanza en torno a su solución es el de “¿Cómo se emite y absorbe radiación?”. Como veremos, durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza aparecerán nuevos problemas que será necesario tratar, pero el título debe ser una pregunta que tenga sentido cuando se comienza el tema.

### III. ESTRATEGIA SEGUIDA PARA AVANZAR EN LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DE EMISIÓN Y ABSORCIÓN DE RADIACIÓN Y EN EL MODELO DE QUÁNTUM DE COPENHAGUE

Puesto que ya hemos remitido a la secuencia problematizada completa (que contiene, además de las actividades, los comentarios para el profesor), en esta sección desarrollamos algunos aspectos con mayor detalle y nos limitamos a apuntar las ideas que permiten conectar las diferentes partes.

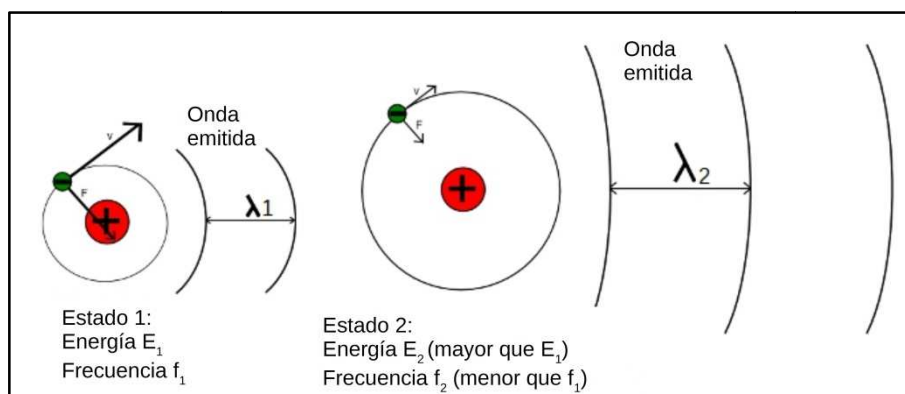
Las primeras actividades de la unidad están orientadas a que los estudiantes se familiaricen con el problema de cómo se emite y absorbe luz y se apropien de él. Para analizar en profundidad las características de la luz emitida por diferentes fuentes luminosas construimos un espectroscopio escolar (Savall, Domènech y Martínez Torregrosa, 2014) que permite obtener medidas cuantitativas de las longitudes de onda visibles presentes en una radiación. Observamos que los gases a baja presión sometidos a descargas eléctricas (tubos espectrales) emiten un espectro discreto, como se observa en la figura 1, caracterizado por unas frecuencias fijas, únicas e invariables para cada gas, independientemente de la intensidad de la descarga eléctrica, que solo influye sobre la intensidad de la luz emitida. La relación entre el espectro emitido y la estructura del átomo es, pues, indiscutible. Y lo lógico es empezar por tratar de inventar un modelo que explique cómo los átomos más simples, los de hidrógeno, pueden emitir el espectro de la figura 1.



**FIGURA 1.** Espectro del hidrógeno obtenido con el espectroscopio escolar. Se puede leer sobre la escala la longitud de onda de las líneas espectrales en nanómetros. También se observa, a nivel cualitativo, la diferencia de intensidad. El espectro visible del hidrógeno tiene una cuarta línea de color violeta y 405 nm de longitud de onda, pero su intensidad es tan baja que es difícil de registrar con un espectroscopio escolar.

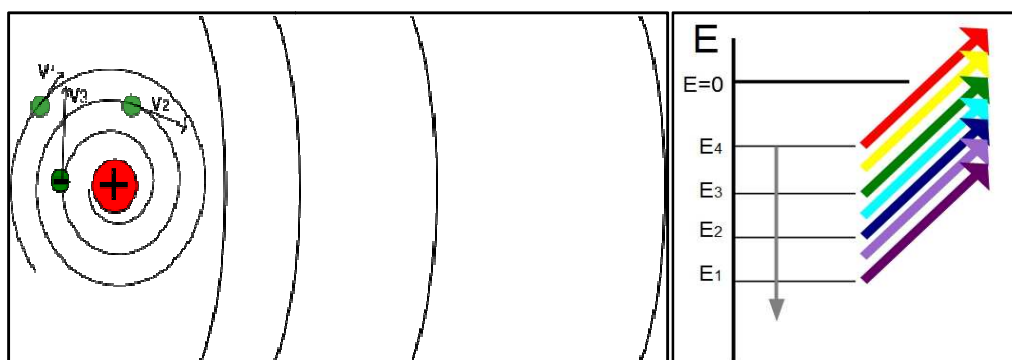
### A. Elaboración de un primer modelo que explique el caso más sencillo de emisión y absorción de radiación: los espectros de los gases

Empezamos nuestra investigación pidiendo a los alumnos que recuerden el modelo planetario de átomo y lo aprendido sobre emisión de ondas electromagnéticas (OEM) para elaborar un primer modelo que explique el espectro del hidrógeno. Puesto que las OEM se producen cuando las cargas se aceleran, el movimiento periódico del electrón alrededor del átomo deberá generar una OEM de frecuencia idéntica a la del movimiento circular del electrón. La presencia de cuatro frecuencias en el espectro visible nos obliga a admitir que el electrón de cada átomo de hidrógeno vibra en una de cuatro posibles órbitas, cada una de ellas responsable de la emisión de una frecuencia electromagnética, como se muestra en la figura 2. Las líneas espectrales de mayor intensidad se corresponden con ondas de mayor amplitud y energía, lo que puede ser debido a la existencia de un mayor número de átomos que vibran (y emiten) con dicha frecuencia.



**FIGURA 2.** El electrón emite una OEM cuya frecuencia es igual a la frecuencia del movimiento orbital. Como en el espectro se detectan 4 frecuencias el electrón de cada átomo debe vibrar con una de las 4 posibles frecuencias (aquí representamos solo 2). La línea roja del espectro, de mayor intensidad, se debe a que hay más electrones vibrando con esa frecuencia.

Al analizar estas primeras ideas energéticamente advertimos que este modelo tiene un problema: mientras el electrón orbite emitirá radiación y perderá energía. Esto le llevará a acercarse al núcleo, orbitar con mayor frecuencia y variar la frecuencia de la luz emitida (figura 3), y esto no se detecta en el espectro del hidrógeno.



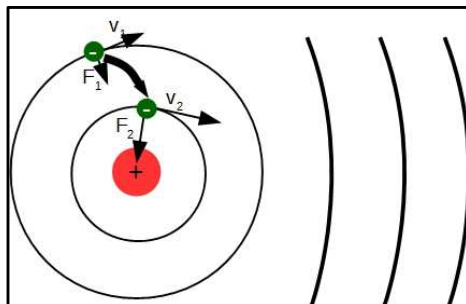
**FIGURA 3.** El electrón ha de perder energía a medida que irradia radiación. Esto hará que orbite cada vez más cerca del núcleo, a mayor velocidad y por tanto con mayor frecuencia. El espectro emitido debería contener todas las frecuencias, y no es esto lo que se observa.

Llegados a este punto, decimos a los alumnos que haciendo uso de lo que establece la física clásica para la emisión de OEM, el problema no tiene solución. De hecho, la comunidad científica se enfrentó a una crisis profunda al abordar el problema de la emisión y absorción de radiación por los átomos, y es fundamental que los estudiantes experimenten esta situación de bloqueo para darse cuenta de que nos enfrentamos a la construcción de un nuevo modelo que rompe con la física aceptada, a un cambio ontológico profundo (Kalkanis, Hadzidaki y Stravrou, 2003; Hadzidaki, 2008).

Esta crisis obligó a explorar hipótesis que no tenían cabida en la física aceptada hasta el momento, y así es como proponemos a los alumnos que deben avanzar. Algunos alumnos sugieren que el electrón no

debería emitir energía cuando orbita, salvando el problema de la estabilidad del átomo (muchos de ellos lo dicen con ligereza; ¡como si no supusiera una confrontación total con la teoría electromagnética!). En cambio, no encuentran un mecanismo que explique la formación del espectro. Se les anima, entonces, a considerar las hipótesis de Bohr y representar el proceso de emisión de radiación al que hacen referencia (figura 4):

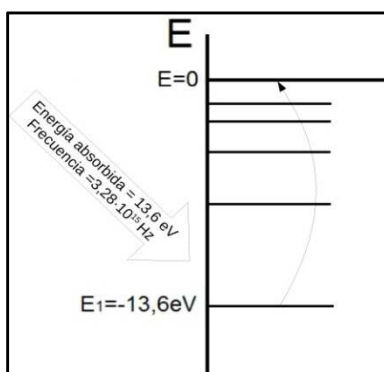
- Los electrones de los átomos solo pueden orbitar en unos pocos estados estacionarios, caracterizados por una energía fija. En ellos orbitan alrededor del núcleo de acuerdo con las leyes de la mecánica pero sin emitir energía.
- Cualquier cambio en el átomo implica el paso del electrón de una órbita estacionaria a otra.
- La frecuencia de la radiación emitida o absorbida en una transición depende de las energías iniciales y finales, de acuerdo con la expresión  $|E_f - E_i| = h\nu$ , donde  $E_f$  y  $E_i$  son la energía del átomo en el estado final e inicial,  $\nu$  es la frecuencia y  $h$  es una constante.



**FIGURA 4.** Proceso de emisión de radiación de acuerdo con las hipótesis de Bohr. El electrón, al hacer una transición entre órbitas, emite radiación cuya frecuencia es proporcional a la diferencia de energía de las órbitas entre las que tiene lugar la transición.

De acuerdo con este modelo, el electrón del átomo de hidrógeno puede orbitar alrededor del protón sin emitir energía, pero no en cualquier órbita sino únicamente en aquellas que tienen una energía determinada. Introducimos así la IC1, que es imprescindible para la estabilidad atómica. La existencia de 4 transiciones entre órbitas daría lugar a las cuatro líneas espectrales observadas en su espectro. Sin embargo, para aceptar el modelo no es suficiente con esta explicación cualitativa, además deberíamos ser capaces de interpretar, deducir y predecir valores cuantitativos empíricos, incluyendo los de las frecuencias de las líneas espectrales. En particular, abordamos las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo interpretar con el modelo que para ionizar los átomos de hidrógeno sea necesario iluminarlos con luz de una frecuencia mínima de  $3,28 \cdot 10^{15}$  Hz (ultravioleta)? De acuerdo con la IC3.1, un cambio de energía en el átomo requiere la absorción o emisión de radiación de una determinada frecuencia ( $|E_f - E_i| = h\nu$ ). Por tanto, para que el electrón pase de estar ligado ( $E < 0$ ) a estar libre ( $E \geq 0$ ) se requerirá radiación de una frecuencia mínima (figura 5). Esto nos permite, además, determinar la energía que tienen los átomos de hidrógeno cuando no están excitados, que resulta ser de  $-13,6$  eV.



**FIGURA 5.** La radiación de  $3,28 \cdot 10^{15}$  Hz produce en el hidrógeno una transición electrónica de  $13,6$  eV, suficiente para ionizar el átomo según los resultados experimentales. La radiación de menor frecuencia o no es absorbida o produciría una transición menor, insuficiente para conseguir la ionización. Esto nos permite identificar el estado fundamental del átomo como aquel que tiene una energía de  $-13,6$  eV.



•¿Podemos deducir las frecuencias de las líneas del espectro? Para ello, introducimos la expresión propuesta por Bohr para determinar la energía de los estados estacionarios del hidrógeno a partir del estado fundamental (n=1)  $E_n = \frac{-13,6(eV)}{n^2}$ , calculamos la energía de los cinco primeros estados estacionarios, analizamos cuáles son las posibles transiciones y determinamos la frecuencia que emitirá el hidrógeno al realizar cada una de ellas. Advertimos que solo tres de ellas se corresponden con frecuencias presentes en el espectro visible: la transición del tercer estado al segundo es la responsable de la frecuencia de la línea roja del espectro, la del cuarto al segundo estado – representada en la figura 6 - es responsable de la frecuencia de la línea azul y la transición del quinto al segundo es responsable de la frecuencia de la línea morada. La intensidad de las líneas espectrales se puede atribuir a la cantidad de procesos individuales por unidad de tiempo que las originan, como establece la IC3.3. Así, la transición del tercer al segundo estado se dará con mayor frecuencia (será más probable) que la transición del cuarto al segundo estado, y esta última será más probable que la transición del quinto al segundo estado.

•¿Por qué no hay más líneas de diferente color en el espectro? Las frecuencias de las líneas visibles corresponden a transiciones desde el tercer, cuarto, quinto y sexto estados al segundo (la línea correspondiente a la transición del sexto al segundo estado no se observa porque su intensidad es muy baja), pero también son posibles muchas más. Predecimos con esto que deben existir más líneas en el espectro del hidrógeno, que no vemos porque nuestros ojos no son sensibles a sus frecuencias. Buscamos información sobre si el hidrógeno emite más frecuencias que las correspondientes al espectro visible y encontramos que sí lo hace y que, además, dichas frecuencias coinciden con las propuestas por nuestro modelo. Evidenciamos así que, desde un determinado estado estacionario, un electrón puede hacer transiciones a cualquiera de los estados de menor energía, y que cada transición puede tener lugar con una probabilidad diferente, como recoge la IC3.2.

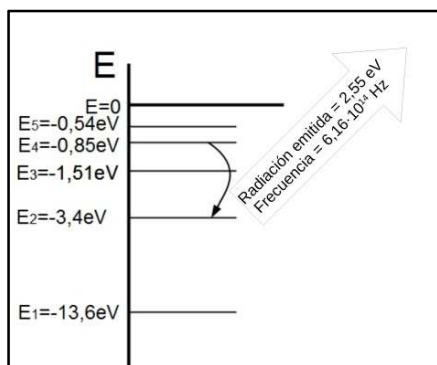


FIGURA 6. La transición del electrón del cuarto estado estacionario al segundo da lugar a radiación de  $6,16 \cdot 10^{14}$  Hz, que corresponde con la línea azul del espectro.

•¿Cómo explicar el espectro de absorción, es decir, la ausencia de determinadas frecuencias en la luz que ha atravesado una atmósfera de hidrógeno? De acuerdo con el modelo propuesto, solo son posibles las transiciones entre estados estacionarios, esto implica que el átomo solo puede absorber unas cantidades fijas de energía y, por tanto, radiación de unas pocas frecuencias, como se muestra en la figura 7.

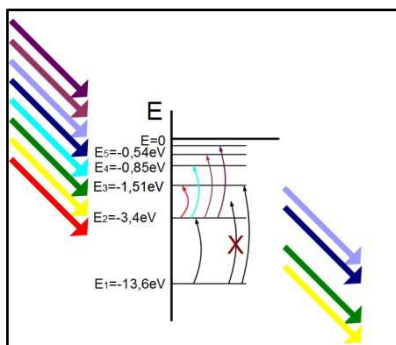


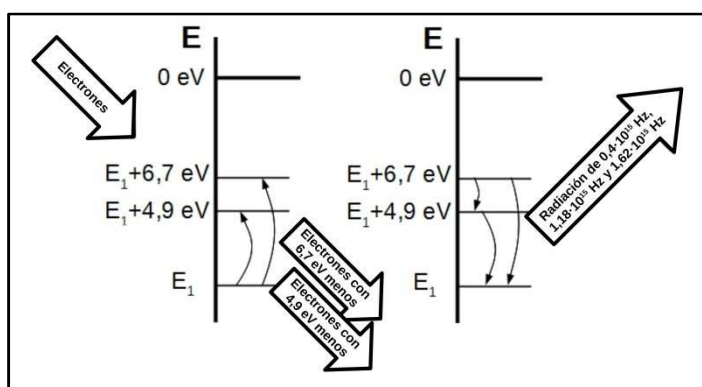
FIGURA 7: Al iluminar el hidrógeno con luz de diversas frecuencias solo serán absorbidas aquellas que llevan a los electrones a un estado estacionario de mayor energía, las frecuencias restantes no pueden ser absorbidas.

Este problema también nos permite descartar la posibilidad de transiciones múltiples por absorciones sucesivas (IC3.4). Si este tipo de procesos fuera habitual, los átomos se ionizarían fácilmente. Por ejemplo, los átomos de hidrógeno se podrían ionizar con un haz de radiación con frecuencias menores que  $3,28 \times 10^{15}$  Hz, pero dicho fenómeno no se observa experimentalmente. El átomo solo puede hacer una única transición a un estado de mayor energía al absorber radiación, y posteriormente emitirá energía hasta regresar al estado fundamental. Las absorciones sucesivas son altamente improbables o imposibles. Solo si la temperatura del gas es suficientemente alta habrá una cantidad suficiente de átomos cuyos electrones estén en el segundo estado energético y se podrán producir las transiciones correspondientes a la absorción de las frecuencias visibles del espectro del hidrógeno.

El modelo establecido contempla todas las ideas clave referentes a la cuantización de la energía en los átomos (IC1) y a la interacción entre electrones y radiación (IC3), si bien el concepto de fotón todavía no ha sido introducido. Disponemos así de un modelo que explica el espectro del hidrógeno, y por extensión puede explicar a nivel cualitativo el espectro de otros gases. Sin embargo, la comunidad científica no puede aceptar modelos contrarios a la física aceptada que cuenten con un apoyo experimental tan escaso, lo que exige seguir poniéndolo a prueba. Para ello, proponemos a los alumnos que analicen los resultados obtenidos por Franck y Hertz en el experimento que lleva su nombre.

¿La cuantización de la energía en los átomos es una característica intrínseca de los mismos o cambia según cómo se interaccione con ellos? Franck y Hertz bombardearon átomos de mercurio (mercurio gaseoso a muy baja presión) con electrones acelerados y encontraron que si los electrones tenían una energía inferior a 4,9 eV no se producía ningún efecto sobre los átomos del gas. Cuando los electrones que colisionaban alcanzaban o superaban dicha energía, transferían 4,9 eV a los átomos de mercurio, disminuyendo en dicha cantidad su energía tras la colisión. Cuando esto ocurría, el gas emitía luz de  $1,61 \times 10^{15}$  Hz. Aumentando la velocidad de los electrones, encontraron que también se producía transferencia de energía de un valor de 6,7 eV, además del valor de 4,9 eV. En ese caso, se observaba la emisión de radiación de tres frecuencias,  $0,4 \times 10^{15}$  Hz,  $1,18 \times 10^{15}$  Hz y  $1,61 \times 10^{15}$  Hz, todas ellas idénticas a las obtenidas por otros procedimientos de excitación de los átomos de mercurio.

La física clásica no puede explicar este comportamiento, ya que en un choque inelástico entre partículas como átomos de mercurio y electrones se puede transferir cualquier cantidad de energía siempre que se satisfagan los principios de conservación correspondientes. El modelo cuántico introducido para los átomos sí da cuenta de esta absorción discontinua de energía, siempre que admitamos que los electrones del mercurio se encuentran en un estado estacionario y que las únicas transiciones posibles que se pueden producir corresponden con diferencias de energía de 4,9 eV y 6,7 eV. Tras absorber dicha energía, los átomos de mercurio pueden emitir radiación hasta regresar al estado fundamental, bien a través de una transición directa o bien realizando dos transiciones. Como se muestra en la figura 8, las radiaciones detectadas se corresponden justo con las que emitiría el mercurio si tuviese al menos tres estados estacionarios separados por 4,9 eV y 6,7 eV. Este resultado confirma que la energía del átomo está cuantizada y que la cuantización es una característica intrínseca al átomo, no depende de si interacciona con radiación o con otras partículas.



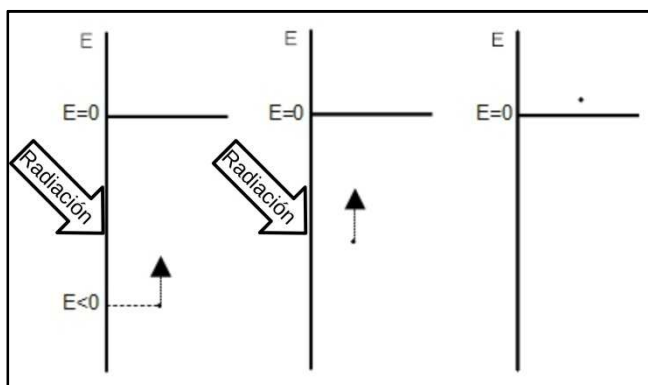
**FIGURA 8.** De acuerdo con el modelo cuántico introducido para el átomo, los átomos de mercurio solo podrán absorber de los electrones aquella energía que produzca transiciones entre estados estacionarios. A la luz de los resultados experimentales, el mercurio debe tener al menos tres estados estacionarios separados por energía de 4,9 eV y 6,7 eV. Las transiciones posteriores que devuelven al átomo al estado fundamental son las responsables de las radiaciones que emite el mercurio.

Los resultados experimentales obtenidos al analizar los espectros y el experimento de Franck y Hertz muestran que la luz de frecuencia  $\nu$  produce sobre los átomos el mismo efecto que las partículas (electrones en este caso) con energías  $h\nu$ . Cuando una partícula transfiere dicha cantidad de energía al átomo, su energía disminuye en esa misma cantidad. Sin embargo, cuando llega una radiación al átomo de una frecuencia mayor o menor a la que correspondería a una transición, simplemente no es absorbida. ¿Es posible que la energía de una radiación esté cuantizada (como ocurre en los átomos), formada por “paquetes indivisibles de energía” (proporcional a la frecuencia) y que, por tanto, sólo se absorban los “paquetes” cuya energía sea igual a la de alguna de las transiciones electrónicas dentro del átomo? Este es el siguiente de nuestros problemas, y para abordarlo aprovechamos el fenómeno del efecto fotoeléctrico.

**B. ¿Está cuantizada la energía en la radiación?**

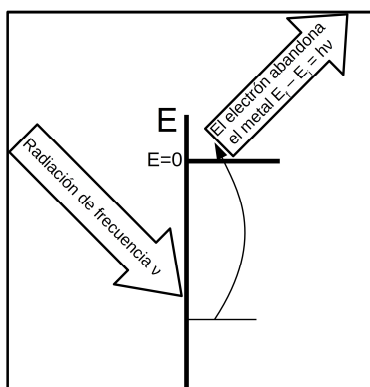
Tras familiarizar a los alumnos con este fenómeno, concretamos nuestro problema en encontrar un modelo que permita explicar la emisión de electrones por parte de un metal: ¿Qué acción lleva a cabo la radiación sobre los electrones del metal que acaba por extraerlos? Abordamos el problema desde una perspectiva clásica y también haciendo uso del modelo cuántico propuesto:

- De acuerdo con el modelo clásico, los electrones del interior del metal absorberán progresivamente la energía de la radiación e irán aumentando su energía hasta alcanzar la energía necesaria para abandonar el metal, como se muestra en la figura 9.



**FIGURA 9.** De acuerdo con el modelo clásico de emisión y absorción de radiación, los electrones del metal absorberán energía de la radiación hasta alcanzar la energía necesaria para abandonar el metal ( $E > 0$  J). La flecha no representa el movimiento del electrón, solo indica que su energía aumenta.

- De acuerdo con el modelo cuántico, la radiación producirá el cambio energético en el electrón previsto por la ecuación  $\Delta E_{\text{electrón}} = h\nu$ . Si esta energía es suficiente, el electrón abandonará el metal, si no es suficiente seguirá ligado a él, como muestra la figura 10. Si la energía de la radiación está cuantizada y se absorbe en cantidades fijas el cambio energético debería ser instantáneo, en cambio, si la energía de la radiación no está cuantizada cabría esperar una transición progresiva, que requiriese un determinado intervalo de tiempo.



**FIGURA 10.** La radiación de frecuencia  $\nu$ , al ser absorbida por el electrón, produce un cambio energético  $h\nu$ . Si es suficiente, el electrón abandonará el metal. Si la radiación está cuantizada el cambio energético será instantáneo, en caso contrario requerirá un cierto intervalo de tiempo.

Para poner a prueba los modelos propuestos a título de hipótesis analizamos sus consecuencias experimentales y constatamos que solo el modelo cuántico puede dar cuenta de ellos, tanto en el aspecto cualitativo como en el cuantitativo. Incorporamos de este modo la IC2 a nuestro modelo. En este punto queremos destacar que, habitualmente, las propuestas sobre la enseñanza del efecto fotoeléctrico aprovechan este fenómeno para introducir el modelo cuántico de radiación (véase, por ejemplo, Fernández, González y Solbes, 2005; Solbes y Sinarcas, 2010). En nuestra propuesta lo tratamos para poner a prueba el modelo completo de emisión y absorción de radiación que hemos construido para explicar los espectros y el experimento de Franck y Hertz.

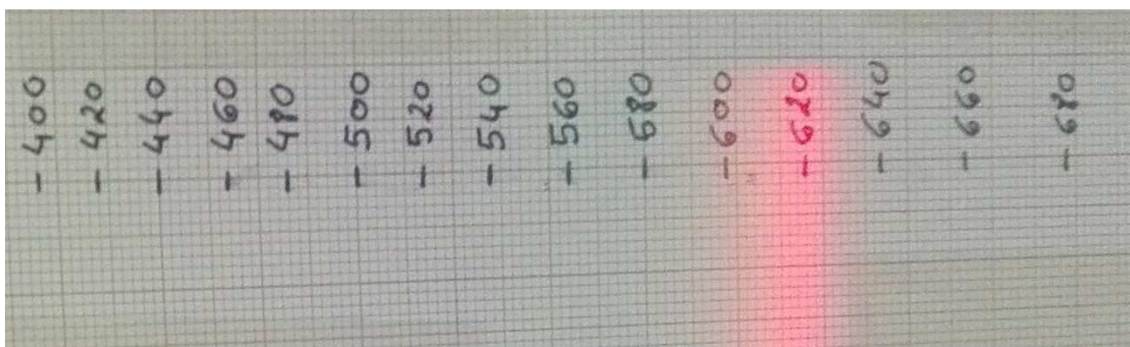
Consolidamos el modelo construido revisando y completando la explicación de los espectros (lo que nos permite revisar la IC3 en referencia a la interacción entre electrones y fotones) y constatamos que es válido. Seguidamente, analizamos en profundidad los motivos que tenía la comunidad científica para no aceptar la hipótesis del fotón luminoso propuesta por Einstein y abordamos el estudio del efecto Compton, presentándolo como una nueva oportunidad de poner a prueba el modelo cuántico y el modelo clásico de radiación.

Con este paso, que nos lleva a la conclusión de que los fotones existen y se comportan como partículas (no solo tienen energía, sino también momento lineal), finalizamos la construcción del modelo cuántico de emisión y absorción de radiación, recordando a los alumnos que su construcción ha exigido negar aspectos fundamentales de la física aceptada hasta el momento. Este avance deja, por tanto, diversos problemas por resolver para recuperar la coherencia en la física. Nos referimos, entre otros, al establecimiento de un modelo para la luz que permita superar la contradicción que supone tener que considerarla como onda para explicar algunos hechos experimentales y como partícula para explicar otros, y al problema de predecir la existencia de estados energéticos discretos y estacionarios en los átomos sin recurrir a introducciones *ad hoc* ante datos experimentales. Sin embargo, antes de abordar estos problemas, debemos aportar más pruebas a favor del modelo cuántico ya elaborado, utilizándolo para explicar el comportamiento de algunos materiales (fosforescencia) y el funcionamiento de algunos objetos y aplicaciones cuya existencia *se debe* al modelo. Se trata de mostrar que la física cuántica no es algo meramente “libresco”, sino que sus aplicaciones ya, y cada vez más, forman parte de nuestras vidas; aspecto demasiadas veces olvidado (Savall, Domènech y Martínez Torregrosa, 2013b).

### C. Posibles aplicaciones del modelo elaborado

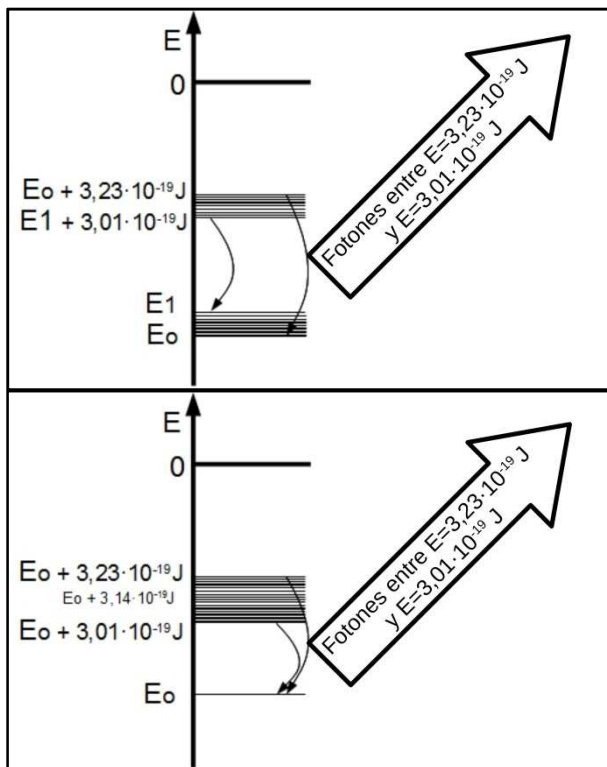
En la secuencia completa (Savall, Domènech y Martínez Torregrosa, 2015) se proponen una serie de actividades en las que alumnos y profesor deben analizar cualitativa y cuantitativamente el espectro de diversas fuentes luminosas (láser, bombilla de bajo consumo, led, sustancias fosforescentes) y, aplicando el modelo cuántico de emisión y absorción de radiación, dar cuenta de su funcionamiento. Aquí solo mostramos un ejemplo.

*Actividad. Observad el espectro de un LED rojo (figura 11) y explicad su funcionamiento.*



**FIGURA 11.** Espectro emitido por un led que emite luz roja. La escala indica la longitud de onda en nanómetros.

De acuerdo con el espectro de emisión y usando la ecuación  $E_{\text{fotón}} = h\nu$  obtenemos que el led emite fotones cuyas energías se encuentran entre  $3,23 \times 10^{-19} \text{ J}$  y  $3,01 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Debemos, por tanto, contemplar todo un conjunto de transiciones posibles. Los diagramas de la figura 12 dan cuenta de ello.

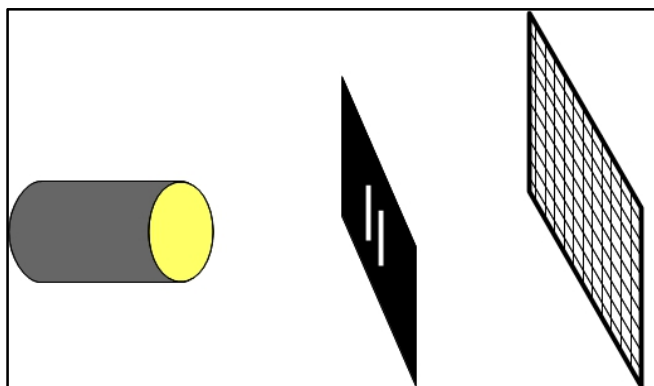


**FIGURA 12.** Los dos diagramas de energía permiten dar cuenta de la radiación emitida. En el primero tenemos una banda de energía, mientras que en el segundo hay dos bandas. Hay más hipótesis posibles, como el caso en que el estado de mayor energía sea una línea y el de menor energía una banda.

**D. Necesidad de enfrentarse a las contradicciones: ¿Qué son los fotones? ¿Qué son los electrones?**

**D.1. ¿Cuál es la naturaleza de los fotones?**

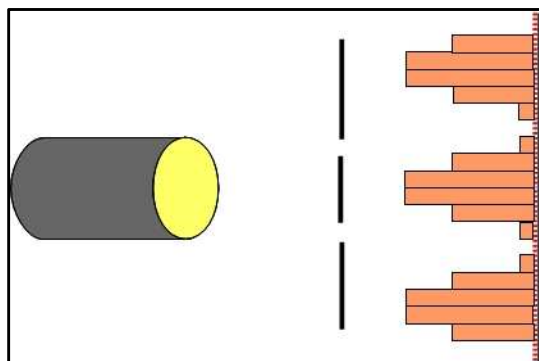
Para avanzar en este problema proponemos a los estudiantes que analicen los resultados (reales) que se obtienen en el siguiente experimento: una fuente luminosa emite radiación monocromática hacia una doble rendija tras la que se ha situado una pantalla formada por una matriz de células fotoeléctricas, como se puede observar esquemáticamente en la figura 13.



**FIGURA 13.** Una fuente emite un haz luminoso monocromático hacia una doble rendija. Detrás de ella hemos situado una pantalla que contiene una matriz de células fotoeléctricas (cada cuadrado de la pantalla representa una célula fotoeléctrica).

Al conectar la fuente de luz y contar la cantidad de fotones que se detectan en cada una de las placas fotoeléctricas obtenemos los diagramas de barras que se muestran en la figura 14 (cada barra representa la cantidad de fotones que se ha detectado en cada placa fotoeléctrica). Así mismo, observamos que:

- Cada placa registra un número entero de fotones.
- Un mismo fotón no se registra nunca en dos placas.
- Hay detectores que registran una gran cantidad de fotones y otros que no detectan ninguno.
- Se obtienen los mismos resultados tanto si lanzamos muchos fotones a la vez como si esperamos a que un fotón sea detectado para lanzar el siguiente<sup>1</sup>.

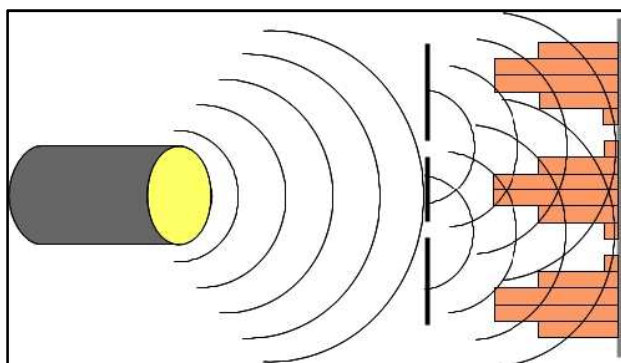


**FIGURA 14.** Diagrama de barras que se obtiene al contar los fotones que se detectan en cada placa fotoeléctrica. Hay placas que registran un gran número de fotones y otras que no detectan ningún fotón.

Para dar cuenta de los resultados debemos admitir:

- Que los fotones se detectan como partículas, cada uno en una única placa.
- Que los fotones se distribuyen en la pantalla de la misma forma que la intensidad de una onda que sufre interferencias al atravesar la doble rendija.

Cuando profundizamos y analizamos lo que le ocurre a cada fotón vemos que hay lugares en los que la probabilidad de impacto es nula y lugares en que dicha probabilidad es elevada. Es más, los puntos de alta probabilidad de impacto corresponden a los lugares donde una onda con una frecuencia igual a la de la radiación sufre una interferencia constructiva, mientras que los lugares de probabilidad nula son aquellos que se corresponden con la interferencia destructiva. Podemos proponer, por tanto, que los fotones se detectan como partículas, pero mientras se propagan lo hacen como ondas. Cuando llevamos a cabo una medida de posición, la amplitud de la onda en cada punto está relacionada con la probabilidad de detectar el fotón en dicho punto. Esta debe ser una onda de probabilidad y no una onda que pueda ser detectada simultáneamente en una amplia región del espacio, puesto que no ocurre así sobre la pantalla. De este modo hemos introducido las ideas clave IC4.1, IC4.2 e IC4.3. La figura 15 muestra, de manera pictórica, como se propaga y detecta cada fotón.



**FIGURA 15.** Mientras el fotón se propaga hemos de aceptar que lo hace como una onda de probabilidad. Al llegar a la pantalla es detectado como una partícula, con una mayor probabilidad allí donde la onda tiene mayor amplitud (donde la interferencia es constructiva).

<sup>1</sup>Existen células fotoeléctricas que detectan un único fotón. De 3 a 4 fotones son suficientes para excitar las células de la retina humana.

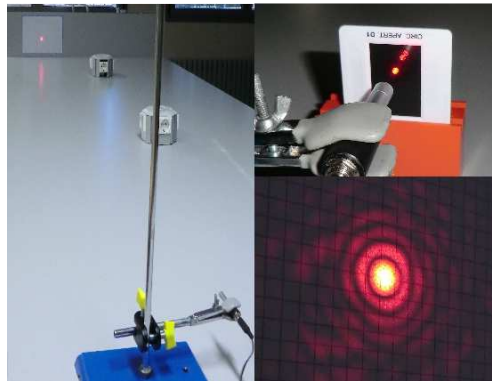


No hay nada en nuestra realidad cotidiana que se comporte como lo hacen los fotones, y es por ello que debemos recurrir a analogías con el comportamiento de las partículas y de las ondas para entender cómo se comportan. Ahora bien, ¿Hemos de renunciar a cualquier conocimiento sobre la posición del fotón antes de llevar a cabo la detección? ¿Hemos de aceptar que su propagación es meramente probabilística?

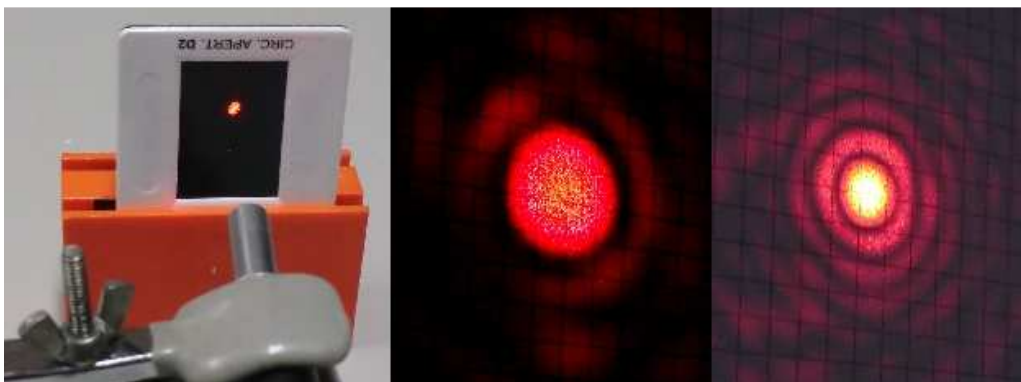
## D.2. ¿Qué podemos saber de la trayectoria de los fotones?

En la escuela elemental nos decían que la luz se propaga en línea recta y para demostrarlo alineábamos varias cartulinas agujereadas y sólo si los agujeros y nuestro ojo estaban formando una línea recta podíamos ver la fuente luminosa. Quizás utilizando agujeros muy pequeños y/o pantallas con detectores podríamos conocer dónde está un fotón y cuál es su velocidad (y por tanto saber la trayectoria que seguirá). Proponemos a los alumnos que lleven a cabo experiencias similares a esta usando un láser y agujeros muy pequeños.

Cuando realizamos el experimento observamos que al apuntar a una pantalla alejada con un láser se ilumina una región circular pequeña. Si interponemos una barrera con un pequeño agujero observamos que la zona iluminada sobre la pantalla se amplía (figura 16). Si disminuimos el diámetro del agujero la zona iluminada de la pantalla se hace aún más extensa (figura 17). ¿Qué podemos decir de la trayectoria seguida por los fotones? Pedimos a los estudiantes que analicen qué sabemos de la posición y del vector momento lineal de los fotones que atraviesan el agujero.



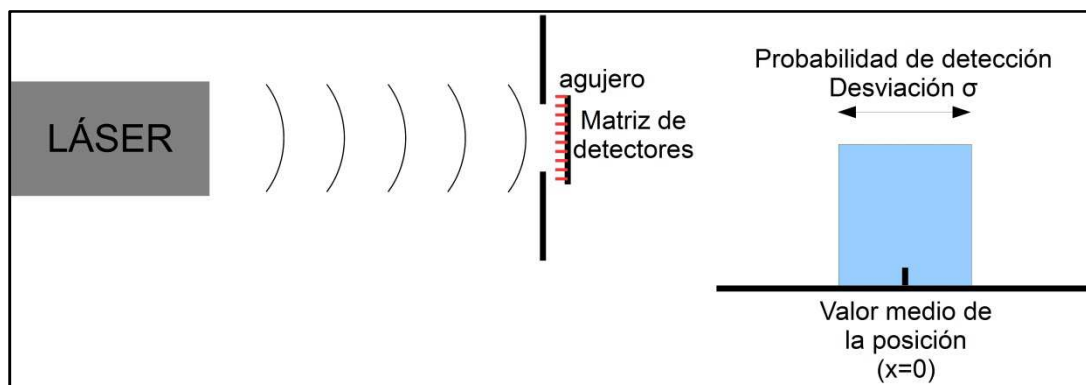
**FIGURA 16.** Con un láser apuntamos a una pantalla (una hoja de papel cuadriculado) que se encuentra a varios metros de distancia. Observamos un pequeño círculo de luz sobre el papel. Al poner delante del láser una lámina opaca con un agujero pequeño no se forma el círculo que se ha observado antes sino que se ilumina una región más extensa, como se puede ver en la parte inferior de la imagen. Si hacemos uso de un orificio más pequeño la figura de interferencia cambia, los anillos luminosos de la figura están más separados, como se observa en la imagen de la figura 17.



**FIGURA 17:** Al cambiar el agujero por una más pequeño (parte izquierda) se observa un círculo central muy luminoso que ocupa una superficie aproximada de 9 cuadritos y unos anillos poco intensos más alejados (imagen central). En la figura de la derecha se reproduce, de nuevo, el resultado de la experiencia con el orificio grande: el círculo central ocupa menos de 4 cuadros y hay una mayor dispersión de luz en anillos.

Si ponemos una matriz de detectores detrás del orificio para medir la posición de cada fotón que llega al agujero obtendremos una distribución de probabilidades de detección en una posición determinada,  $x$ , como la que se muestra en la figura 18. Esta distribución tiene un valor medio, que coincide con el centro

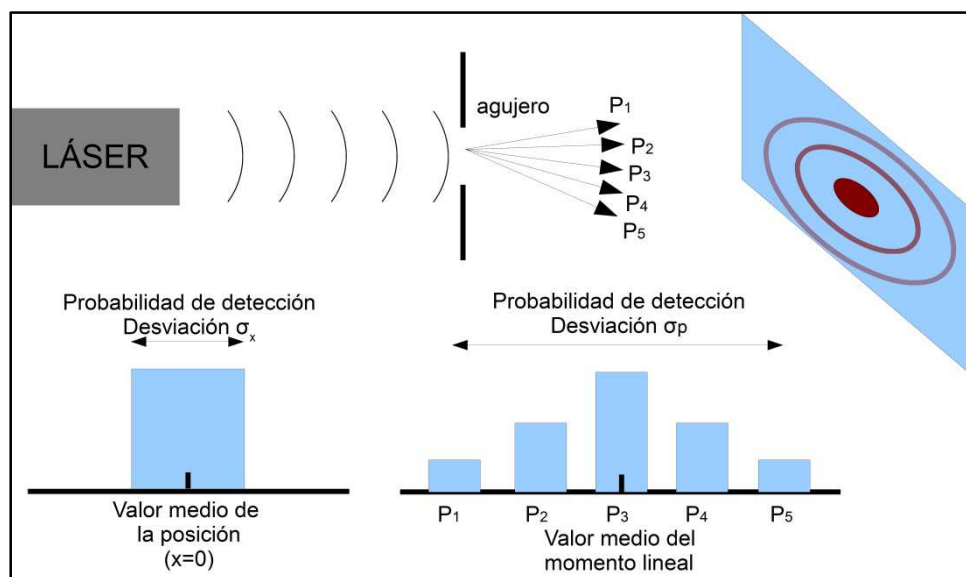
del agujero ( $x=0$ ), y una desviación respecto a dicho valor medio, que representa la dispersión de las medidas. Hablamos así de una indeterminación estadística en el valor de la posición de un fotón antes de ser medida.



**FIGURA 18.** Al representar la probabilidad de detectar un fotón en cada una de las posiciones posibles (en cada detector) obtenemos una distribución de probabilidades, caracterizada por un valor medio (el centro del agujero) y una desviación a su alrededor (relacionada con el radio del agujero).

La incertidumbre no se puede reducir utilizando instrumentos de medición más precisos. Con detectores más sensibles (más pequeños, por ejemplo) podríamos distinguir con mayor precisión la posición de un fotón en el agujero, pero siempre tenemos la misma dispersión respecto al valor medio antes de llevar a cabo la medida, ya que el fotón se puede detectar en cualquier punto al que llega la onda.

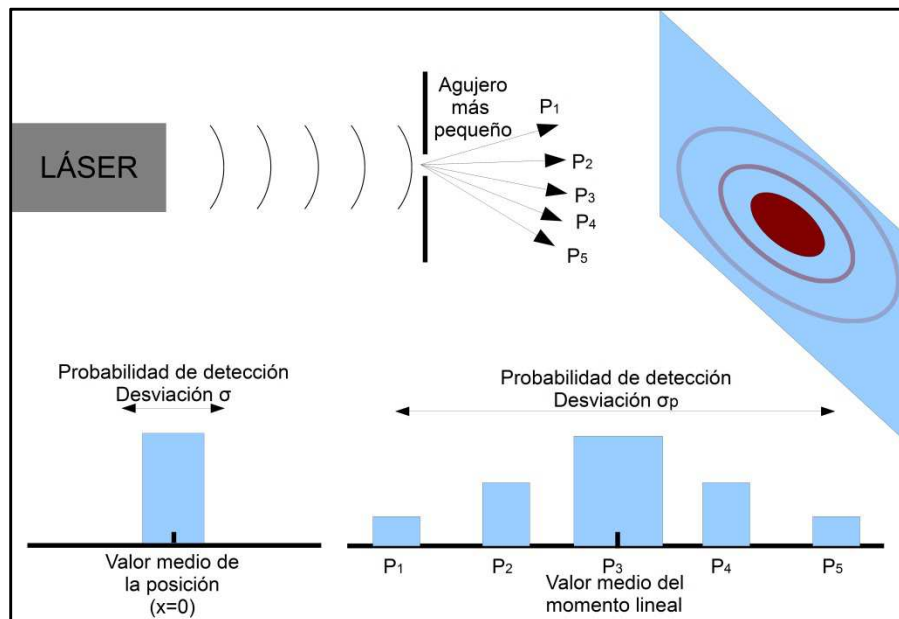
Una vez alcanzado el agujero cada fotón se mueve hacia una de las zonas iluminadas de la pantalla. Los fotones tienen una mayor probabilidad de incidir en el centro de la pantalla (punto más brillante) pero también tienen cierta probabilidad de incidir en otros puntos, menos luminosos, y ninguna en otros. Por tanto, la medida del momento lineal de un fotón que atraviesa el agujero puede tener un valor entre diferentes posibles, cada uno de ellos con una determinada probabilidad de ser medido (como muestra la figura 19). Tenemos, nuevamente, un conjunto de posibles medidas que se distribuye alrededor de un valor medio y presenta una determinada incertidumbre estadística.



**FIGURA 19.** En la parte superior se representan (de forma esquemática) los posibles vectores momento lineal que puede tener un fotón que se encuentra en el agujero. Los valores más probables del momento lineal son los que llevan al fotón al centro de la pantalla, puesto que es la zona en la que se detecta una mayor intensidad luminosa. De manera similar a lo ocurrido con las posibles posiciones de los fotones (gráfica izquierda), las posibles medidas del vector momento lineal se distribuyen alrededor de un valor medio, con una determinada incertidumbre.

Si usamos un agujero más pequeño, los posibles valores de la posición se separan menos del valor medio (que se corresponde con el centro del agujero) y la incertidumbre en la medida de la posición de

cada fotón es menor. Sin embargo, observamos que la zona luminosa sobre la pantalla es más extensa, lo que indica que los puntos de impacto de los fotones sobre la pantalla están más separados. Esto significa que el momento lineal de cada fotón tiene un mayor rango de valores posibles, una mayor dispersión respecto al valor medio y por tanto una mayor incertidumbre, como se muestra en la figura 20.



**FIGURA 20.** Al usar un agujero más pequeño la incertidumbre en la posición disminuye porque los fotones se distribuyen más próximos al valor medio (el centro del agujero). Sin embargo, la incertidumbre en el momento lineal aumenta: al estar los puntos de impacto en la pantalla más alejados del centro, los vectores momento lineal pueden estar más alejados del valor medio.

Podríamos imponer más obstáculos o restricciones destinadas a conocer, con el mayor detalle posible, la posición y el momento lineal de los fotones y obtendríamos como resultado que esta conclusión es general: siempre que reducimos la incertidumbre en el conocimiento de la posición aumentamos la incertidumbre en el conocimiento del momento lineal, y viceversa (IC4.4). Esta relación entre ambas magnitudes fue introducida por primera vez por el físico alemán Werner Heisenberg y se conoce con el nombre de principio de incertidumbre. Matemáticamente se expresa de la forma:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1)$$

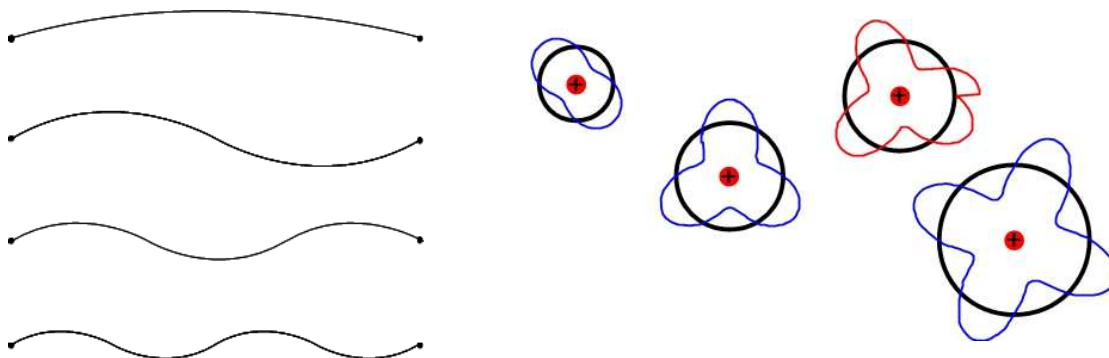
Donde  $\sigma_x$  representa la incertidumbre en la posición y  $\sigma_p$  representa la incertidumbre en el momento lineal.

Llegamos así a un modelo para los fotones de radiación que permite dar cuenta de los procesos de emisión y absorción (al considerar que los fotones se emiten y absorben como partículas, en unidades completas) y de los fenómenos ondulatorios (al considerar que cada fotón se propaga como una onda de probabilidad). Una vez resuelto el problema de la naturaleza de la radiación, abordamos el segundo de los grandes problemas que se habían planteado al introducir el modelo de emisión y absorción de radiación: ¿Por qué hay estados estacionarios en el átomo?

### D.3. ¿Por qué hay estados estacionarios en los átomos?

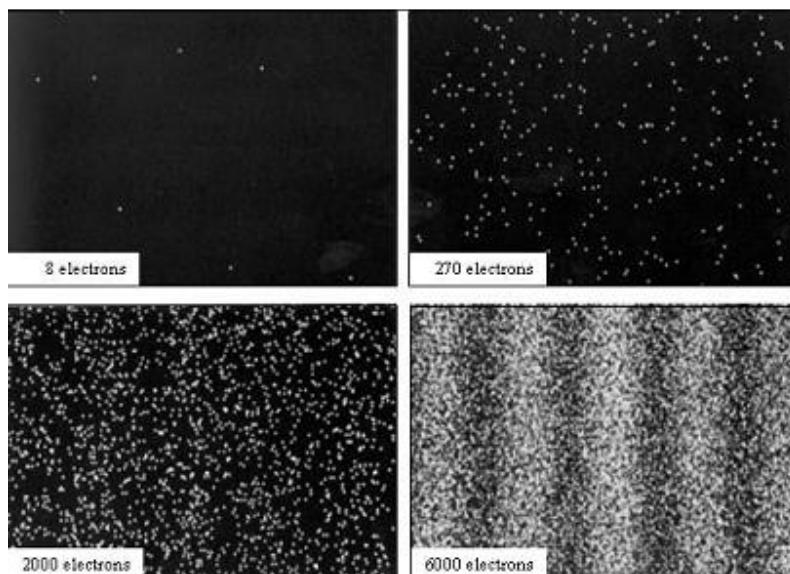
Para avanzar en la solución de este problema introducimos la hipótesis de de Broglie, de acuerdo con la cual los electrones, y en general cualquier partícula, se comportan como una onda cuya longitud de onda viene dada por la ecuación  $\lambda = \frac{h}{mv}$ . De Broglie llegó a esta hipótesis después de trazar una analogía entre el movimiento del electrón en el átomo y la vibración de las ondas estacionarias en una cuerda. Si tenemos una cuerda fija por ambos extremos solo podrá vibrar con unas pocas longitudes de onda (figura 21), conocidas como armónicos, cada uno de los cuales tiene una determinada energía (si mantenemos la amplitud al cambiar de armónico). De manera similar, el electrón en el átomo de hidrógeno solo puede orbitar en unas órbitas estacionarias, caracterizadas por el valor de la energía. Si considerásemos al electrón como una onda, en lugar de considerarlo una partícula, podríamos identificar los estados

estacionarios con los armónicos de vibración propios de las ondas estacionarias, como se muestra en la figura 21, lo que evita tener que postularlos.



**FIGURA 21.** En una cuerda que está fija por los extremos no se puede formar cualquier onda estacionaria sino sólo aquellas que tienen una longitud de onda determinada (imagen izquierda), y por tanto una energía determinadas. Si consideramos el electrón como una onda (derecha), de acuerdo con la hipótesis establecida, sólo serían estables aquellas “órbitas” en que se puede formar una onda estacionaria (representadas en azul); si la onda no es estacionaria porque no cabe un número entero de ciclos, la órbita no puede existir (en rojo).

Para poner a prueba esta hipótesis debemos diseñar algún experimento que pruebe el carácter ondulatorio de los electrones. Una posibilidad es hacerlos interactuar con obstáculos o agujeros que tengan un tamaño similar a su hipotética longitud de onda y analizar si se producen los fenómenos de interferencia propios de las ondas. Al llevar a cabo la experiencia se obtienen los resultados que se muestran en la figura 22. Constatamos que cada electrón deja un punto sobre la pantalla, lo que evidencia que en el momento de su detección se comporta como una partícula. Pero los puntos de impacto se distribuyen sobre la pantalla mostrando un patrón de interferencia, que coincide con el esperado para una onda que tiene la longitud de onda que predice la ecuación de de-Broglie.

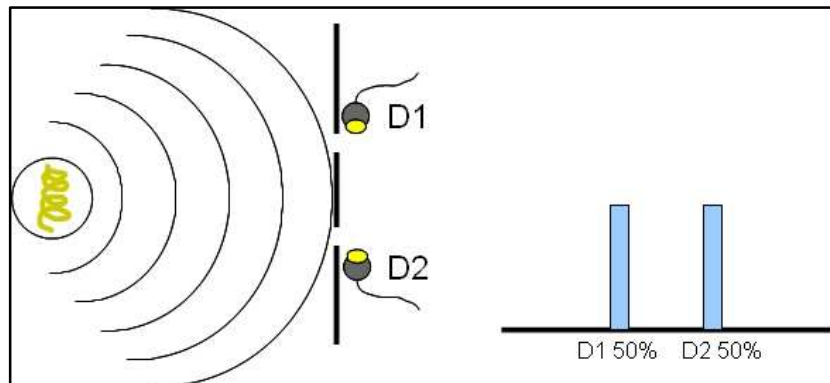


**FIGURA 22.** Resultados obtenidos al lanzar electrones a través de una doble rendija. Los electrones han sido recogidos sobre una pantalla en la que dejan una marca puntual. En cada caso ha sido lanzada la cantidad de electrones indicada en la parte inferior izquierda.

Como pasaba con los fotones, la posición de impacto con la pantalla está determinada por la amplitud de una onda de probabilidad. Esta onda no se detecta en ningún lugar del espacio (puesto que el electrón siempre se detecta en un único punto, como partícula), pero determina en qué posiciones hay mayor probabilidad de detectar cada electrón. Al llevar a cabo esta misma experiencia con protones, neutrones, iones o incluso moléculas grandes como los fullerenos ( $C_{60}$ ) se obtienen siempre resultados similares: los impactos sobre la pantalla siguen el patrón de interferencia esperado para una onda que tiene la longitud

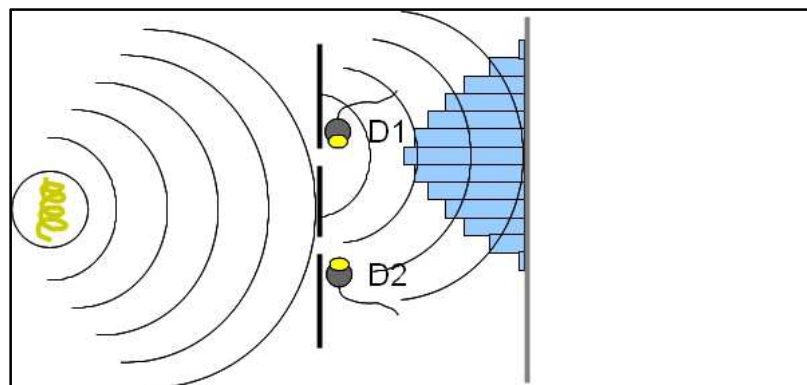
de onda predicha por de Broglie. Debemos concluir, por tanto, que las partículas se comportan como los fotones. Nos referiremos a estos entes (fotones y electrones, y por extensión todas las “partículas”) con el término *quántums*. Consideramos así que su comportamiento no se ajusta al de las partículas clásicas y que exigen el uso del modelo que acabamos de construir para interpretar los fenómenos en los que se ven implicados. Completamos de este modo la construcción del modelo de cuántum de Copenhague para las partículas y unificamos su naturaleza y la de los fotones (IC4).

Analizamos de nuevo qué podemos saber de la trayectoria de los electrones. ¿Cuál es la trayectoria que sigue cada electrón? Para responder añadimos dos detectores, uno detrás de cada agujero (figura 23). De acuerdo con nuestro modelo de cuántum, cada electrón se propaga como una onda de probabilidad. Al llegar a los agujeros, la amplitud de la onda en ambos agujeros es la misma, por tanto tendremos un 50% de probabilidad de detectar a cada electrón en cada agujero. Si se lleva a cabo la experiencia, esto es justo lo que se obtiene.



**FIGURA 23.** Los electrones se propagan como ondas. Al alcanzar la pantalla, la amplitud de la onda en cada rendija es la misma. Tenemos, por tanto, un 50% de probabilidad de detectar al electrón en cada rendija.

Ahora bien, cuando no están los detectores, los electrones que llegan a la pantalla colocada tras los agujeros se distribuyen formando el típico patrón de interferencia. Pero al añadir ambos detectores lo que se observa es que la figura de interferencia desaparece. Según el modelo de cuántum esto se debe a que el electrón detectado sigue propagándose como onda, pero solo a partir del punto en el que ha sido detectado, como muestra la figura 24. Como hay un único frente de ondas, no se produce interferencia sobre la pantalla. Así, será más probable detectar cada electrón en el centro de una región circular alineada con el agujero en el que ha sido detectado. Esto es lo que ocurre experimentalmente.



**FIGURA 24.** Supongamos que el electrón ha sido detectado por D1, en el orificio de arriba, por lo tanto continúa propagándose a partir de ese agujero. Al llegar a la pantalla ya no hay interferencia puesto que no hay onda procedente del agujero de abajo. Añadir los detectores detrás de los agujeros ha cambiado el resultado final.

Debemos concluir, entonces, que el electrón no tiene una posición hasta que no es medida, no está en un agujero o en otro hasta que medimos en qué agujero se encuentra, y si dicha medida no se lleva a cabo la onda de probabilidad “atraviesa” ambos agujeros. Si el electrón pasase por un agujero en concreto no habría figura de interferencia. Los resultados experimentales confirman que antes de la medida de posición sólo podemos hablar de una onda de probabilidades, de los posibles resultados de la medida y de



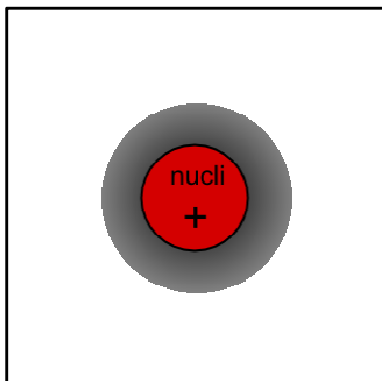
la probabilidad de obtener cada resultado. Nuevamente, y como ocurría con los fotones, nos damos cuenta que no podemos hablar de trayectorias al considerar el movimiento de los cuántums.

Antes de finalizar, debemos reconciliar el modelo introducido para los cuántums con nuestra experiencia cotidiana. Para ello, proponemos a los estudiantes que analicen qué le pasará a una bola de billar que se mueve a velocidades ordinarias y que atraviesa un agujero. Al calcular su longitud de onda, observamos que es muchos órdenes de magnitud inferior al tamaño del posible agujero, y esta diferencia de tamaños impide que se produzcan fenómenos de interferencia. Solo para partículas muy pequeñas (como electrones, átomos o moléculas) se dan longitudes de onda que pueden sufrir interferencias, por eso no observamos el comportamiento cuántico de los objetos cotidianos.

#### E. Limitaciones de los nuevos conocimientos y problemas abiertos

Hemos de destacar que el modelo construido para explicar el comportamiento de los cuántums es meramente cualitativo. Para adentrarnos en un estudio cuantitativo debemos encontrar la ecuación de la onda de probabilidad propia de cada cuántum en una situación física determinada. Esta ecuación, que recibe el nombre de función de onda, nos aporta toda la información del objeto (o sistema físico) que estamos estudiando y permite determinar los posibles valores de las medidas de posición o momento lineal y su correspondiente probabilidad. Desgraciadamente, las matemáticas implicadas son muy complicadas y superan con creces los objetivos de un curso introductorio y los conocimientos de los alumnos a los que va dirigido este tema.

Otro problema que ha quedado sin resolver es el que hace referencia a la estructura del átomo. La física actual no habla de átomos con electrones que describen trayectorias, sino de orbitales: regiones del espacio en las cuales hay una determinada probabilidad de encontrar un electrón al hacer una medida de posición. Para conocer la forma de los orbitales es necesario resolver la ecuación de onda del electrón en el entorno del núcleo atómico. Los orbitales se pueden representar como regiones sombreadas en las cuales la intensidad de la sombra está relacionada con la probabilidad de detectar el electrón, tal y como se observa en la figura 25 (a una región más oscura le corresponde una mayor probabilidad de detectar el electrón al hacer una medida de posición).



**FIGURA 25.** Representación del átomo de hidrógeno en el estado estacionario de menor energía de acuerdo con la física cuántica. La zona sombreada representa la región del espacio en que es más probable encontrar el electrón cuando se hace una medida de posición. La probabilidad es mayor allí donde la sombra es más oscura.

El modelo de cuántum introducido, a pesar de ser exclusivamente cualitativo, puede ser usado para explicar el funcionamiento de aparatos tecnológicos actuales, como el microscopio electrónico, y otros fenómenos cuánticos, como la emisión de partículas alfa (consecuencia del efecto túnel) o el carácter probabilístico de la desintegración radioactiva.

#### IV. RECAPITULACIÓN

La presentación del tema de física cuántica que hemos hecho en este trabajo constituye un resumen que muestra los grandes pasos que se deben dar para construir un modelo cuántico de emisión y absorción de radiación con la suficiente capacidad explicativa y predictiva para que valga la pena ser enseñado. Hemos de destacar que, aunque hemos usado como base el modelo atómico de Bohr para introducir la cuantización de la energía en el átomo, el modelo construido usando diagramas de energía va más allá y puede ser usado con cualquier otro modelo atómico que contemple la cuantización de la energía.



Consideramos que, de este modo, se consigue evitar que el modelo atómico adquirido dificulte el aprendizaje de modelos atómicos más actuales. Así mismo, evitamos que su validez quede limitada por el modelo atómico empleado. De hecho, durante el desarrollo de la secuencia usamos diagramas de energía para representar su cuantización no solo en el átomo de hidrógeno sino también en átomos polielectrónicos (como el helio o el mercurio) e incluso en sólidos como metales, semiconductores (leds) y materiales fluorescentes y fosforescentes.

En la sección dedicada a las aplicaciones del modelo de emisión y absorción de radiación hemos presentado únicamente el ejemplo del led que emite luz roja. En la secuencia problematizada completa se propone un abanico más amplio que incluye, entre otras, la detección de sustancias en el Sol a partir del análisis de su espectro, la explicación del funcionamiento de las sustancias fluorescentes y fosforescentes y el análisis de las diferencias entre ambas, el análisis de los efectos biológicos de las radiaciones de alta frecuencia o la interpretación cuántica del color de las piedras preciosas. Aunque no está contemplado en el tema que se adjunta, en un primer curso universitario se pueden introducir actividades que extiendan el uso del modelo para explicar la conductividad eléctrica, el funcionamiento de los materiales semiconductores y otros aspectos relacionados con la electrónica cuántica, al menos a nivel cualitativo.

La segunda parte de la unidad nos ha llevado a construir un modelo cualitativo de cuántum, basado en la interpretación de Copenhague, que permite dar cabida al modelo de emisión y absorción de radiación y recuperar la coherencia que se había perdido al establecerlo. Respecto a esta segunda parte, debemos indicar que hemos optado por una interpretación del modelo de cuántum coherente con el principio de complementariedad (“entes que viajan como ondas y se detectan como partículas”) que, de acuerdo con investigaciones anteriores, es adecuada para el nivel de conocimientos de física y matemáticas de los alumnos y no obstaculiza la adquisición posterior de modelos o interpretaciones más avanzadas, incluyendo el aspecto cuantitativo (Cheong y Song, 2014).

La puesta en práctica de la unidad con alumnos de 2º de Bachillerato y profesores en formación y en activo ha permitido obtener resultados positivos. En los alumnos hemos constatado una mejora en el aprendizaje y en las actitudes, mientras que en los profesores destaca una mejora en la comprensión de la física cuántica y un aumento del interés en el tema y en su didáctica. Esperamos dar cuenta de estos resultados con detalle en futuros trabajos.

## REFERENCIAS

- Bohr, N. (1913a). On the constitution of atoms and molecules. *Philosophical Magazine*, 26, 1-25.
- Bohr, N. (1913b). On the constitution of atoms and molecules. Part II. Systems containing only a single nucleus. *Philosophical Magazine*, 26, 476-502.
- Bohr, N. (1964). *Física atómica y conocimiento humano*. Madrid: Aguilar.
- Budde, M., Niedderer, H., Scott, P. y Leach, J. (2002a). 'Electronium': a quantum atomic teaching model. *Physics Education*, 37 (3), 197-203.
- Budde, M., Niedderer, H., Scott, P. y Leach, J. (2002b). The quantum atomic model 'Electronium': a successful teaching tool. *Physics Education*, 37 (3), 204-210.
- Cheong, Y. W. y Song, J. (2014). Different levels of the meaning of wave-particle duality and a suspensive perspective on the interpretation of quantum theory. *Science and Education*, 23 (5), 1011-1030.
- Compton, A. H. (1927). X-rays as a branch of optics. Nobel lecture. [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1927/compton-lecture.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1927/compton-lecture.pdf)
- De Broglie, L. (1929). The wave nature of the electron. Nobel lecture. [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1929/broglie-lecture.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1929/broglie-lecture.html)
- De Ronde, C. (2015). Colonialidad del saber/poder en la educación y el conocimiento científico-tecnológico en América Latina. El caso de la mecánica cuántica en la investigación y la formación universitaria. *Revista de Enseñanza de la Física*, 26 (número extra), 355-363.
- Einstein, A. (1917). Sobre a teoria quântica da radiação. En *Revista Brasileira de Ensino de Física*. (2005). 27 (1), 93-100.

Einstein, A. e Infeld, L. (1986). *La evolución de la Física*. Barcelona: Biblioteca Científica Salvat.

Escalada, L. T., Rebello, N. S. y Zollman, D. A. (2004). Student explorations of quantum effects in LEDs and luminescent devices. *The physics teacher*, 42 (3), 173-179.

Feynman, R. P. (2000). *El carácter de la ley física*. Barcelona: Tusquets.

Fernández, P., González, E. y Solbes, J. (2005). De los corpúsculos de luz al efecto fotoeléctrico. Una propuesta didáctica con base en la discusión de modelos. *Revista de Enseñanza de la Física*, 18 (1), 69-80.

Fischler, H. y Lichfeld, M. (1992). Modern Physics and students' conceptions. *International Journal of Science Education*, 14 (2), 181-190.

Fischler, H. (1999). Introduction to quantum physics-development and evaluation of a new course. Papers presented at the annual meeting National Association for Research and Science Teaching. [http://perg.phys.ksu.edu/papers/narst/QM\\_papers.pdf](http://perg.phys.ksu.edu/papers/narst/QM_papers.pdf)

Fletcher, P. y Johnston, I. (1999). Quantum mechanics: exploring conceptual change. Papers presented at the annual meeting National Association for Research Science Teaching. [http://www.physics.umd.edu/perg/qm/qmcourse/NewModel/research/qm\\_narst\\_full.pdf](http://www.physics.umd.edu/perg/qm/qmcourse/NewModel/research/qm_narst_full.pdf)

Gribbin, J. (1986). *En busca del gato de Schrodinger*. Barcelona: Salvat Editores.

Hadzidaki, P. (2008). The Heisenberg microscope: a powerful instructional tool for promoting meta-cognitive and meta-scientific thinking on quantum mechanics and the "nature of science", *Science and education*, 17 (6), 613-639.

Heilbron, J. L. (2010). *Niels Bohr. L'estructura i la filosofia dels àtoms*. Vic: Eumo.

Heisenberg, W. (1933) The development of quantum mechanics. Nobel lecture. [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1932/heisenberglecture.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1932/heisenberglecture.html)

Heisenberg, W. (1972). *Diálogos sobre la Física Atómica*. Madrid: La Editorial Católica.

Holton, G. (1982). *Ensayos sobre el pensamiento científico en la época de Einstein*. Madrid: Alianza Universidad.

Holton, G. y Brush, S. (1987). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Mollet del Valles, Barcelona: Reverte.

Ivanjek, L., Shaffer, P. S., McDermott, L. C., Planinic, M., y Veza, D. (2015a). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory spectroscopy. I. Identifying student difficulties with atomic emission spectra. *American Journal of Physics*, 83 (1), 85-90.

Ivanjek, L., Shaffer, P. S., McDermott, L. C., Planinic, M., y Veza, D. (2015b). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory spectroscopy. II. Addressing students difficulties with atomic emission spectra. *American Journal of Physics*, 83 (2), 171-178.

Jammer, M. (1966). *The conceptual development of quantum mechanics*. New York: McGraw Hill.

Johnston, I. D., Crawford, K. y Fletcher, P. (1998). Students difficulties in learning quantum mechanics. *International Journal of Science Education*, 20 (4), 427-446.

Kalkanis, G., Hadzidaki, P. y Stavrou, D. (2003). An instructional model for a radical conceptual change towards quantum mechanics concepts. *Science education*, 87 (2), 257-280.

Kompaneyetz, A. S. (1971). *Qué es la mecánica cuántica*. Barcelona: Vicens Vives.

Kumar, M. (2011). *Quantum*. Barcelona: Kairos.

- Lindley, D. (2008). *Incertidumbre*. Barcelona: Ariel.
- Martínez Sancho, V. (1992). *Fonaments de Física II*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana.
- Mckagan, S. B., Perkins, K. K., Dubson, M., Malley, C., Reid, S., Lemaster, R. y Wieman, C. E. (2008). Developing and researching PhET simulations for teaching quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 76 (4 y 5), 406-417.
- Michelini, M., Ragazzon, R., Santi, L. y Stefanel, A. (2000). Proposal for quantum physics in secondary school. *Physics Education*, 35 (6), 405-410.
- Niaz, M. y Marcano, C. (2012). Reconstruction of wave-particle duality and its implications for general chemistry textbooks. Reseña en Berger, K. C. (2013). *Science and Education*, 22 (8), 2031-2033.
- Olsen, V. (2002). Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in Norway. *International Journal of Science Education*, 24 (6), 565-574.
- Osuna, L., Martínez Torregrosa, J., Carrascosa, J. y Verdú, R. (2007). Planificando la enseñanza problematizada: el ejemplo de la óptica en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (2), 277-294.
- Pais, A. (1984). *'El señor es sutil...' La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Barcelona: Ariel.
- Petri, J. y Niedderer, H. (1998). A learning pathway in high-school level quantum atomic physics. *International Journal of Science Education*, 20 (9), 1075-1088.
- Pospiech, G. (1999). Teaching the EPR paradox at high school? *Physics Education*, 34 (5), 301-316.
- Pospiech, G. (2000). Uncertainty and complementarity: the heart of quantum physics. *Physics Education*, 35 (6), 393-399.
- Rebello, N. S. y Zollman, D. (1999). Conceptual understanding of quantum mechanics after using hands-on and visualization instructional materials. *Papers presented at the annual meeting National Association for Research in Science Teaching*. March, 1999.
- Rutherford, F. J., Holton, G. y Watson, F. G. (1970). *Project Physics*. California: Holt, Rinehart and Winston.
- Sanchez Ron, J. M. (2001). *Historia de la física cuántica. I. El periodo fundacional (1860-1926)*. Barcelona: Critica.
- Savall, F., Domènech, J. L. y Martínez Torregrosa, J. (2013a). La introducción del concepto de fotón en bachillerato. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35 (2), 2404.
- Savall, F., Domènch, J. L. y Martínez Torregrosa, J. (2013b). ¿Los profesores de Física y Química disponen de un modelo que explique la formación de los espectros atómicos? *IX Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias*. 3237-3242.
- Savall, F., Domènech, J. L. y Martínez Torregrosa, J. (2014). El espectroscopio cuantitativo como instrumento para la construcción y uso de modelos de emisión y absorción de radiación en física cuántica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36 (4), 4302.
- Savall, F., Domènech, J. L. y Martínez Torregrosa, J. (2015). ¿Cómo se emite y absorbe radiación? Unidad para la enseñanza de la física cuántica extraída de Savall, F. (2015). *L'ensenyamentproblematitzat de la física quàntica en batxilleratcom a instrument de millora de l'aprenentatge*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante.

Savall, F., Domènech, J. L., Guisasola, J. y Martínez Torregrosa, J. (2016). Identifying student and teacher difficulties in interpreting atomic spectra using a quantum model of emission and absorption of radiation. *Physical Review Physics Education Research*, 12, 010132.

Solbes, J. y Sinarcas, V. (2010). Una propuesta para la enseñanza de la física cuántica basada en la investigación en didáctica de las ciencias. *Revista de Enseñanza de la Física*, 23 (1), 57-84.

Steinberg, R. N., Oberem, G. E. y McDermott, L. C. (1996). Development of a computer-based tutorial on the photoelectric effect. *American Journal of Physics*, 64 (11), 1370-1379.

Steinberg, R., Wittmann, M. C. Bao, L. y Redish, E. F. (1999). The influence of student understanding of classical physics when learning quantum mechanics. Papers presented at the annual meeting National Association for Research in Science Teaching. March, 1999.

Taber, K. S. (2001). When the analogy breaks down: modelling the atom on the solar system. *Physics Education*, 36 (3), 222-226.

Tarrach, R. (1987). Mecànica quàntica: discussió d'algunes idees-clau. En Bernabeu, J., Tarrach, R., Bramon, A., Galindo, A. y Oliva, A. (1987). *La revolució quàntica*. Barcelona: Fundacio Caixa de Pensions.

Thacker, B. A. (2003). A study of the nature of students' models of microscopic processes in the context of modern physics experiments. *American Journal of Physics*, 71 (6), 599-606.

Verdú, R y Martínez Torregrosa, J. (2004). *La estructura problematizada de los temas y cursos de Física y Química como instrumento de mejora de su enseñanza y aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universitat de València. En <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/2782>

Vokos, S., Shaffer, P. S., Ambrose, B. S. y McDermott, L. (2000). Student understanding of the wave nature of matter: diffraction and interference of particles. *American Journal of Physics*, 68 (S42).

Wutiprom, S., Sharma, M. D., Johnston, I. D., Chitaree, R. y Soankwan, C. (2007). Development and use of a conceptual survey in introductory quantum physics. *International Journal of Science Education*, 31 (5), 631-654.

Zollman, D. A., Rebello, N. S. y Hogg, K. (2002). Quantum mechanics for everyone: Hands-on activities integrated with technology. *American Journal of Physics*, 70 (3), 252-259.