Enfoque vectorial en la resolución de problemas de electromagnetismo en el ámbito de la Ingeniería

REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Vector approach in the resolution of problems of electromagnetism in the field of Engineering Careers

Aaron J. Soutadet, Daniel J. A. Abud

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611. Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

E-mail: aaron.soutadet@gmail.com

Resumen

Este trabajo muestra las ventajas que presenta encarar un problema de Física mediante el empleo del algebra vectorial, teniendo como principal objetivo mostrar las virtudes de este enfoque en comparación con la metodología tradicional. Se presenta un problema tipo de la guía actual de problemas de Física II (Ingeniería) resuelto de la manera estándar (de acuerdo a la práctica habitual de los alumnos) y en contraste se resuelve el mismo problema en base a la metodología propuesta en este documento. Los resultados fueron evaluados en base a dos años de experiencia implementando estas herramientas en los cursos de electromagnetismo, obteniéndose respuestas muy favorables que evidencian las ventajas del empleo de esta propuesta. Se concluye que la enseñanza del electromagnetismo empleando las herramientas que ofrece el cálculo vectorial fue llevada a cabo con éxito y bien recibida por parte de los alumnos.

Palabras clave: Enfoque vectorial; Electromagnetismo; Álgebra.

Abstract

This work shows the advantages it presents a problem of physics by using the vector algebra. Presents a problem type of the current guide of Physic II problems (Engineering) solved in a traditional way (according to the usual practice of students) and in contrast to resolve the same problem on the basis of the methodology proposed in this document.

Keywords: Vector approach; Electromagnetism; Algebra.

I. INTRODUCCIÓN

Encarar un problema de Física de acuerdo a un enfoque vectorial suele ser algo temido por la mayoría de los alumnos de las carreras de Ingeniería. No se pretende aquí abordar el análisis de las razones que dan origen a este fenómeno. Lo que sí, efectivamente, se pretende es mostrar, mediante un ejemplo real de los cursos de Física II para Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFyN) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), que emplear correctamente las herramientas del cálculo vectorial permite al alumno condensar y optimizar el cálculo para poder concentrarse únicamente en aquellos principios físicos conceptuales que constituyen la esencia de aprender esta disciplina. (Ausubel et al, 1976)

En lo que sigue nos ocuparemos en presentar un problema y abordarlo por dos metodologías distintas. La primera es la forma típica que escogen la gran mayoría de los alumnos para encarar cualquier problema de las disciplinas denominadas “duras” como la Matemática o la Física.(Polya, 1954) La segunda es una metodología propuesta para organizar el planteo y sistematizar el cálculo. Acto seguido estableceremos comparaciones dejando a la luz las ventajas de invertir algunas clases en ejercitación matemática para la Física. (Litwin, 2005)

II. OBJETIVOS

La evaluación del presente artículo estuvo a cargo de la organización del XIII Simposio de Investigación en Educación en Física

Los objetivos de aprendizaje que se pretende alcanzar al implementar las metodologías propuestas se resumen en:

Aportar al alumno una herramienta valiosa que le permitirá encarar problemas de un nivel de sofisticación elevado.

Ayudar al alumno a ordenar y enlazar todos los conceptos que le fueron brindados en las clases de algebra y análisis para emplearlos con éxito en la resolución de problemas.

Expandir la capacidad de lectura de los alumnos, ya que aprender nuevas formas de escribir un modelo le permitirá interpretar con mayor facilidad la información proveniente de textos científicos.

Disminuir la distancia temporal entre las materias básicas y las materias que tienen fuerte uso de estas herramientas vectoriales. Muchos alumnos llegan a cursos de Mecánica Analítica, Mecánica de Medios Continuos, Calculo Estructural, habiendo ya olvidado los conceptos vistos en los cursos de Algebra.

Brindarle al alumno la formalidad requerida para poder desempeñarse en un ámbito cada vez más competitivo y requerido como lo es el desarrollo de software; disciplina que requiere condensar y formalizar los modelos para poder ser implementados con seguridad y disminuir la probabilidad de error.

III. PRESENTACION. UN PROBLEMA CLÁSICO DE ELECTROSTÁTICA.

El siguiente problema fue extraído de la Guía Oficial de la Cátedra de Física II para las carreras de Ingeniería. Se trata de un ejercicio que suele ser dejado de lado en la mayoría de las comisiones por presentar una resolución difícil y engorrosa, además, constituye un "*dolor de cabeza*" para varios alumnos que desean abordarlo.(Benegas y Villegas, 2006) He aquí el problema:

"Tres bolitas, cada una con masa igual a 10 g se cuelgan separadamente de un mismo punto mediante hilos de seda, cada uno de 1,00 m de largo. Las bolitas tienen exactamente la misma carga, y quedan suspendidas en los vértices de un triángulo equilátero de 0,10 m de largo cada lado. ¿Cuál es la carga que tiene cada bola?"

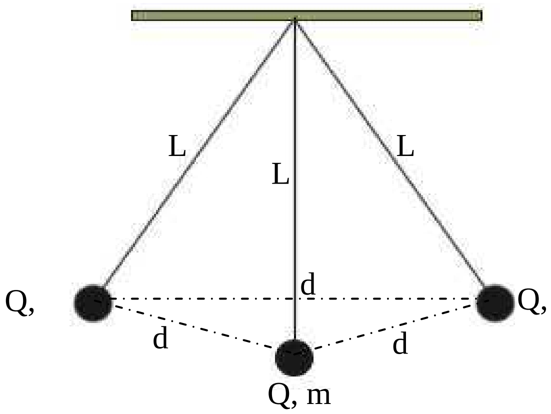

FIGURA1*:* Problema propuesto. Tres partículas con carga "Q" y masa "m" que penden de un mismo punto mediante hilos de longitud "L" conformando los vértices de un triángulo equilátero de lado "d".

IV. RESOLUCION. FORMA CLÁSICA DE ENCARAR EL PROBLEMA EN EL AULA.

De acuerdo a lo observado en el aula, los alumnos enfrentan el ejercicio intentando luchar contra la topología y dejando de lado (casi por completo) el análisis físico. El problema de determinar direcciones en el espacio tridimensional resulta un "muro" difícil de atravesar para aquellos alumnos que aún no han madurado en los conceptos del Algebra; lamentablemente, este grupo de alumnos constituye la gran mayoría en las comisiones analizadas (Binia y Abud, 1999).

Los alumnos empiezan la resolución intentando encontrar los ángulos comprendidos entre las cuerdas y la vertical; y los ángulos internos del triángulo (por más que parezca algo trivial pocos se percatan de que los ángulos internos han de ser todos iguales). Suele ser una falencia de los cursos de Física el no enfatizar ni ejercitar un tema tan importante como lo es, la elección de las coordenadas a emplear para el correcto modelizado de un problema, y así escoger un sistema coordenado apropiado.(Bravo y Pesa, 2007) Esto trae como consecuencia que, todos los problemas serán abordados de la misma manera y con las mismas coordenadas a las que el alumno ya está medianamente acostumbrado de cursos anteriores, lo cual conlleva a cálculos innecesarios que hacen perder la esencia del problema.(Polya, 1954, 1966).

Sean:

Ψ: Angulo comprendido entre cualquiera de las cuerdas y la vertical.
θ: Angulo interno del triángulo equilátero.
L: Largo de la cuerda.
d: Lado del triángulo equilátero
m: Masa de cada partícula
Q: Carga de cada partícula
h: Distancia entre cualquier carga y el centroide del triángulo equilátero
Ω: Plano en el que se encuentran las fuerzas actuantes sobre la partícula.

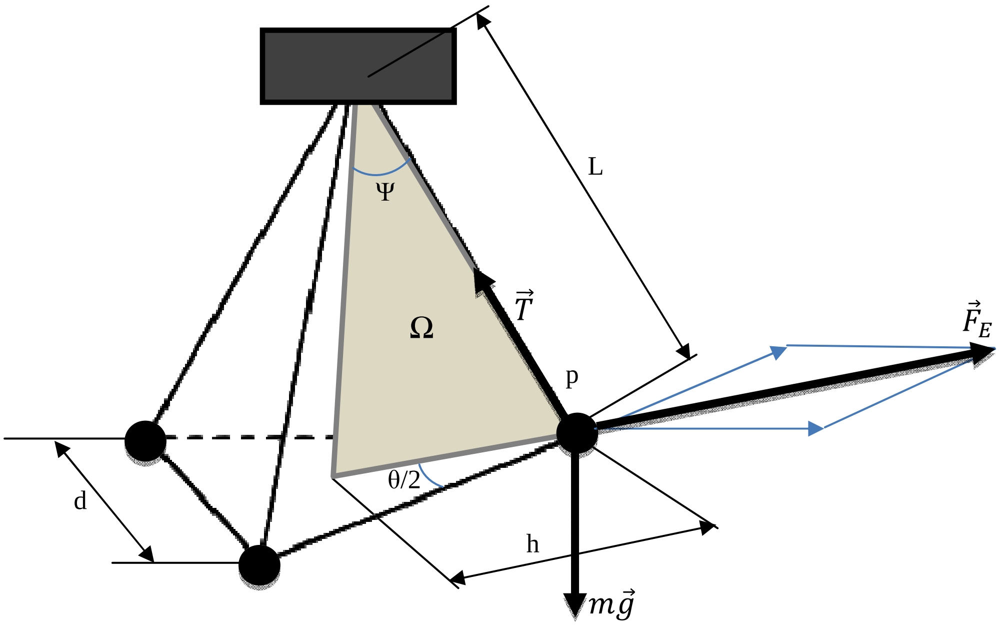

FIGURA 2: Se muestran las fuerzas actuantes sobre la partícula p, las cuales se encuentran contenidas en el plano Ω

Observando la figura **2** se pueden determinar el ángulo Ψ que forma la tensión $\vec{T}$ con la dirección vertical:

$$\sin\Psi = \frac{h}{L} \tag{1}$$

Además, para *h* se tiene:

$$h = \frac{2}{3}d.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2}$$

Al ser los tres ángulos internos iguales se tiene que $\theta = \pi/3$, luego:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3}d \tag{3}$$

Por lo cual, reemplazando la expresión (3) en la (1) se obtiene:

$$\sin\Psi = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{d}{L} \tag{4}$$

Además,

$$\cos\Psi = \sqrt{1-\sin^2\Psi} = \frac{\sqrt{9L^2-3d^2}}{3L} \tag{5}$$

Son pocos los Alumnos que llegan hasta este punto del análisis. Algunos gastan muchísimo tiempo intentando entender la geometría del problema y abandonan el ejercicio llegando a las clases de consulta con dudas que poco tienen que ver con la física del problema. (Polya, 1957)

El planteo del equilibrio en general no suele ser un problema para los alumnos, los cuales aplican el procedimiento clásico de trabajar con dos ecuaciones escalares correspondientes a direcciones perpendiculares:

$$\sum F_x : F_E - T\sin\psi = 0 \tag{6}$$

$$\sum F_y : T\cos\psi - mg = 0 \tag{7}$$

Resolviendo el sistema conformado por las ecuaciones (5) y (6) y advirtiendo que la fuerza eléctrica resultante que obra sobre la partícula en consideración es:

$$F_E = 2\frac{kq^2}{d^2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3}\frac{kq^2}{d^2} \tag{8}$$

Resulta para la carga q:

$$q = \sqrt{\frac{mgd^3}{k\sqrt{9L^2-3d^2}}} \tag{9}$$

V. RESOLUCION. Propuesta de plantear el problema. Forma UNO

Mostraremos, a continuación que, invirtiendo un mínimo en conceptos claves del análisis vectorial, se puede automatizar el problema matemático permitiendo el enfoque en los conceptos físicos que es, verdaderamente, lo relevante (Polya, 1954).

Adoptaremos coordenadas rectangulares asociadas al sistema de ejes que se muestra en la figura 3:

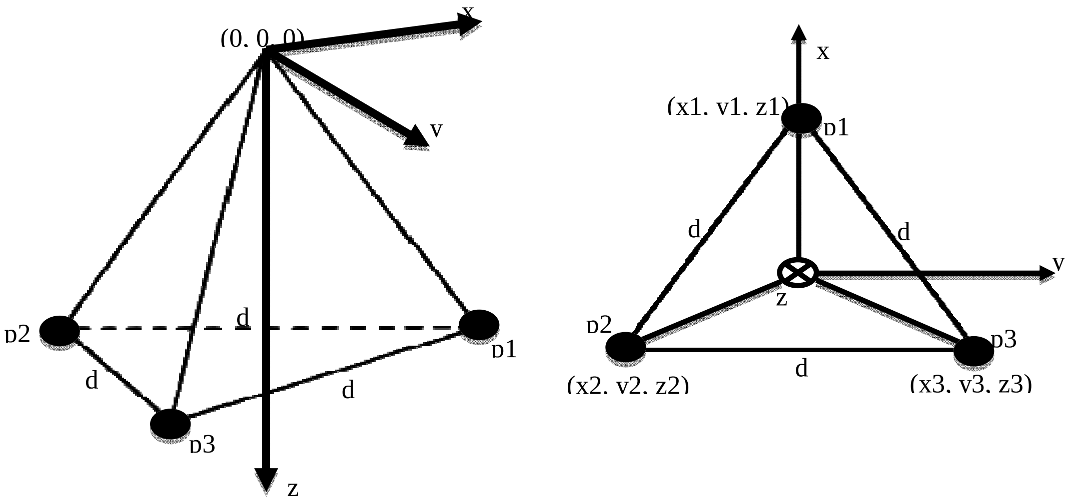

FIGURA3*:* Topología del problema. A la izquierda se muestra el sistema coordenado adoptado en el espacio y a la derecha se observan las posiciones de las partículas en planta.

$$\sum_{p1} \vec{F} = \vec{0} \tag{10}$$

Dividiremos la sumatoria en clases de fuerzas: Fuerzas másicas, fuerzas de vínculo y fuerzas eléctricas:

TABLA I. Fuerzas que actúan sobre la partícula p1, diferenciadas por clases.

Fuerza Eléctrica	*Fuerza Másica*	*Fuerza de Vinculo*
$\vec{F}_E = \begin{pmatrix} F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $F_E = \sqrt{3}\dfrac{kq^2}{d^2}$	$\vec{F}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$	$ev{:}\, x_1^2 + z_1^2 - L^2 = 0$ $\nabla(h) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$ $\vec{F}_v = \lambda \nabla(h) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

En la tabla I *ev* es la ecuación de ligadura materializada por la cuerda que sujeta la partícula. Esta expresión vincula las coordenadas *x1*y *z1* y su gradiente expresa un vector perpendicular (no necesariamente unitario) al plano tangente relacionado a los posibles movimientos de la partícula vinculada. (Resnick y Ford, 1981)

Dado que las incógnitas del problema son la carga *Q1*y el multiplicador ë (incluido para dar modulo, unidad y sentido a la fuerza de vínculo), se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\dfrac{k}{d^2} & x_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ mg \end{Bmatrix} \tag{11}$$

La expresión (11) surge solo del planteo estático del problema. Para armarla, no es necesario sumergirse en cálculos engorrosos, los cuales pasan a formar parte de un planteo secundario que solo tiene que ver con la parte numérica del problema.

De esta manera se tiene el problema modelizado de una manera muy práctica y que además permite visualizar con mayor claridad las variables del problema. Así, el modelizado y la simulación constituyen dos etapas bien diferenciadas. Esto permite que las expresiones obtenidas sean reutilizables y modificables con facilidad; por ejemplo, se puede advertir que es posible incluir en el modelo nuevas fuerzas conocidas simplemente sumándolas al miembro derecho de la expresión (11).

V. RESOLUCION. PROPUESTA DE PLANTEAR EL PROBLEMA. FORMA DOS.

Todavía es posible dar una segunda visión del problema advirtiendo el carácter conservativo de las fuerzas puestas en juego, por lo cual, es factible determinar el potencial $U(x1, y1, z1)$asociado a dichas fuerzas, lo que nos permite escribir:

$$\sum_{p1} \vec{F} = -\nabla U(x1, y1, z1) - \lambda \nabla(h) = \vec{0} \tag{12}$$

Donde se ha definido la fuerza de vínculo como $\vec{F_v} = -\lambda \nabla(h)$

Aún es posible compactar la expresión (13) inventando un funcional que contenga al potencial y a la ecuación de vínculo *h*:

$$\Phi(x1, y1, z1) = U(x1, y1, z1) + \lambda h(x1, y1, z1) \tag{13}$$

Luego,

$$\nabla \Phi = \vec{0} \tag{14}$$

Para el problema considerado la expresión (14) arrojara un sistema de ecuaciones equivalente al (11). En efecto:

$$\Phi = \frac{kq^2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}} + \frac{kq^2}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + y_3^2}} + \lambda(x_1^2 + z_1^2 - L^2) - mgz_1$$

Resultando finalmente:

$$\nabla \Phi = \begin{Bmatrix} -\dfrac{kq^2(x_1 - x_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + y_2^2]^{3/2}} - \dfrac{kq^2(x_1 - x_3)}{[(x_1 - x_3)^2 + y_3^2]^{3/2}} + 2\lambda x_1 \\ 2\lambda z_1 - mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Luego, si se quiere, es posible compactar la expresión (15). Haciendo un poco de geometría obtenemos:

$$\nabla \Phi = \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}\dfrac{kq^2}{d^2} + 2\lambda x_1 \\ 2\lambda z_1 - mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Esta segunda forma de encarar el problema es aún más compacta y solo se requiere, dada una cierta topología, armar el funcionalΦ. Sin embargo, se debe tener un cierto cuidado de no perder de vista la base del problema, ya que Φ dejo de tener el significado físico de un potencial (Yanitelli et al, 2004). De igual manera, a pesar de la sistematización del cálculo no debe dejar de ser práctica corriente realizar el diagrama de cuerpo libre para tener una interpretación acabada del fenómeno (Resnick y Ford, 1981).

VI. RESULTADOS

Las metodologías propuestas se han venido implementando de manera continua desde el año 2014 en los cursos de Electromagnetismo para las carreras de Ingeniería de la FCEFyN (UNC) y dada la experiencia de estos últimos años y la correspondiente retroalimentación por parte de los alumnos, puntualizamos los siguientes resultados de aprendizaje:

- Las metodologías propuestas despertaron curiosidad en los alumnos al darse cuenta que un ejercicio que les insumió una gran cantidad de trabajo, podía ser resuelto en pocas líneas empleando estas herramientas.
- En las evaluaciones semanales de diagnóstico llevadas a cabo en el aula se observó la paulatina mejoría en el manejo vectorial, empezando con evaluaciones no satisfactorias hasta llegar a observar, antes del primer parcial, un muy buen manejo algebraico.
- Se pudo observar una disminución significativa del porcentaje de aplazados en comparación con los años anteriores a la implementación. Esto parece ser resultado de la concientización que se logró acerca de las marcadas diferencias entre trabajar con cantidades escalares y vectoriales. Muchos de los errores que antes se observaban, como por ejemplo, sumar dos vectores como si fueran escalares, prácticamente desaparecieron.
- En comparación con años anteriores a la implementación se puede observar una mejor recepción por parte de los alumnos a la hora de introducir los conceptos de magnetismo (tema correspondiente a la segunda etapa del curso).
- Los alumnos que han cursado y aprobado el curso de electromagnetismo llegan a nuestros cursos de mecánica mejor preparados que hace años atrás.
- Por último, y no menos importante, obtuvimos la máxima satisfacción al recibir los agradecimientos espontáneos (tanto de manera personal, como por correo electrónico) de muchos de nuestros alumnos, específicamente, por haberles enseñado estas valiosas herramientas.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una experiencia didáctica de aula que hace uso combinado de las técnicas de Resolución de Problemas con un tema que a los alumnos no les resulta fácil de aprender (Polya, 1957). Las formas UNO y DOS propuestas tienen claras ventajas respecto al método “a pulmón” que se acostumbra a llevar a cabo en el aula:

1. Poseen claridad. Expresan un fenómeno físico mediante expresiones compactas que permiten visualizar las interpretaciones físicas.
2. Permiten encarar un problema mediante una secuencia ordenada de pasos optimizando el cálculo.
3. La forma de trabajo presentada en estas notas posee validez general y puede emplearse como metodología para abordar problemas complejos.
4. No requiere una gran inversión para el Profesor en explicar conceptos matemáticos. Solo los conceptos de gradiente y potencial son necesarios.
5. Son factibles de ser sometidas a métodos computacionales.

De la experiencia en el Aula, es interesante destacar que el empleo de una clara metodología novedosa de Resolución de Problemas le permite al estudiante contrastar, de forma casi instantánea, el resultado del problema de manera cualitativa y cuantitativa, método clásico que se acostumbra a llevar a cabo en el aula. (Schoenfeld, 1985)

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por los espacios brindados para trabajar; a la toma de información de la Cátedra de Física II por parte del principal autor de este trabajo; y por último, a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNC por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo como parte del Proyecto de Investigación 30720150100117CB, cuya Dirección está a cargo del coautor.

REFERENCIAS

Ausubel, D.; Novak, J. y Hasenian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista Cognoscitivo.* México: Trillas.

Benegas J. y Villegas M. (2006). La Enseñanza Activa de la Física: la Experiencia de la UNSL, *IX Conferencia Inter-Americana sobre Educación en la Física*, San José de Costa Rica, Costa Rica.

Binia, M. y Abud, D. (1999). La importancia de la Mecánica Teórica o Racional en carreras de Ingeniería, *REF XI*, Memorias Congreso.

Bravo, S. y Pesa, M. (2007). El aprendizaje del concepto de error experimental en la medición de magnitudes Físicas. *Memorias de REF XV*.

Litwin, E. (2005). *Tecnologías educativas en tiempos de Internet*. Buenos Aires: Amorrortu editores.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ. Princeton University Press. (Trad. castellana: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, Tecnos: 1966)

Polya, G. (1966). *Mathematical Discovery*. 2 vols. New York. John Wiley and Sons. (Trad. francesa: La découverte des mathématiques. 2 vols. Paris, Dunod. 1967)

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. 2á ed. Princeton, NJ. Princeton University Press. (Trad. castellana: Cómo plantear y resolver problemas. México, Trillas. 1965).

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates. (Trad. castellana, La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Madrid. Paidós/ MEC)

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL. Academic Press.

Yanitelli, M., Rosolio, A. y Massa, M. (2004). La práctica experimental como generadora de ideas para la asimilación de nueva información, *Memorias del VII SIEF*.