

Modelización del efecto Coriolis sobre el movimiento de proyectiles de largo alcance

Modeling Coriolis Effect on long-range projectiles' motion

Edgar David Guarín¹, Néstor Méndez-Hincapié²

¹Instituto de Física, Universidade de Brasília, Asa Norte – CEP 70919-970, Brasília, DF, Brasil

²Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Cll. 72 N° 11-86, Bogotá, Colombia

E-mail: edavidsg89@gmail.com

(Recibido el 5 de febrero de 2016; aceptado el 13 de mayo de 2016)

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

Resumen

Las pseudo-fuerzas, originadas por la rotación de la Tierra, afectan el movimiento parabólico de los proyectiles que se mueven al interior del planeta. Estas fuerzas desvían los obuses de su plano de lanzamiento y evitan su llegada a la posición deseada. Este efecto es llamado efecto Coriolis y depende de diferentes factores como la posición del proyectil, la velocidad, la dirección de lanzamiento, etc. Para contribuir a la comprensión de este tipo de situaciones, se desarrolló un modelo computacional sobre el movimiento de un proyectil visto desde un marco de referencia no inercial (la Tierra), usando para ello el lenguaje de programación C++ y algunos métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones. Así, el modelo básico usado para la creación del código numérico, permite obtener gráficas bajo cualquier condición, las cuales muestran el comportamiento dinámico del proyectil. Con esto queremos resaltar la importancia de la modelación computarizada de sistemas dinámicos en la enseñanza de la Física, ya que ésta ayuda a los estudiantes a aproximarse a fenómenos físicos complejos.

Palabras clave: Modelación; Pseudo-fuerzas; Efecto Coriolis; Física computacional; Enseñanza de la mecánica clásica.

Abstract

Pseudo-forces originated by Earth's rotation affect the parabolic motion of projectiles moving at the planet's surface. These forces deviate the howitzers of their launching plane, preventing their arrival to the targeted location. This effect is called the Coriolis Effect and depends on different variables such as shell's position, velocity, shooting direction, etc. In order to better understand the projectile's trajectory taking this effect into account, a computational model was developed considering the movement of a shell from a non-inertial reference frame (the Earth) point of view, using the C++ programming language and some numerical methods for the resolution of the equations. Thus, the basic model used for the creation of numerical code allows graphic representation of any conditions showing the dynamic behavior of the projectile. This work further reinforces the importance of computer modeling of dynamic systems on physics education, since it helps students to approach complex physical phenomena with an understandable visual tool.

Keywords: Modeling; Pseudo-forces; Coriolis Effect; Computational physics; Teaching of classical mechanics.

I. INTRODUCCIÓN

De los cuatro planetas internos del sistema solar, la Tierra es el planeta que posee la rotación más rápida, al girar sobre su eje a una velocidad angular promedio de $7,29 \times 10^{-5}$ rads/s, además orbita en torno al Sol a una velocidad media de 29,7 km/s (Resnick y Halliday, 1971). Estos movimientos cíclicos influyen enormemente en el comportamiento de sistemas dinámicos y en la realización de experimentos en Física, aunque muchas veces se pueden despreciar sus efectos si se considera al planeta como un marco de referencia inercial, para períodos de tiempo relativamente cortos (Resnick y Halliday, 1971; Goldstein, Pooley Saffko, 1959). Sin embargo, esta consideración ya no tiene validez cuando se estudia, por ejemplo,

el movimiento de un proyectil de gran alcance (Goldstein, Poole y Safko, 1959; Beatty, 2006; Thompson, 1972; Wang, Li, Zhai y Zhang, 2010), pues las consecuencias ocasionadas por la rotación terrestre, son muy evidentes y afectan en gran medida su trayectoria.

Teniendo en cuenta la dificultad de reproducir un fenómeno de este tipo en el laboratorio y sobretodo en el salón de clases, pero teniendo presente también las facilidades que ofrecen las TIC (Guarín y Moreno, 2012), se decidió crear un modelo computacional basado en software libre y software educativo, que muestra cómo el efecto Coriolis y la fuerza centrífuga afectan el movimiento de un proyectil, contribuyendo de este modo al estudio de esta situación y a su enseñanza. Este es un fenómeno que aunque ya ha sido trabajado por otros autores (Beatty, 2006; Thompson, 1972; Wang, Li, Zhai y Zhang, 2010), ciertamente ha sido poco tratado y mucho menos discutido desde el punto de vista de la enseñanza de la Física, donde este evento puede ser usado para abordar conceptos físicos fundamentales de la mecánica del movimiento.

Con esto, se quiere dar la oportunidad a los docentes de llevar a cabo nuevas experiencias científicas a fin de propiciar en los estudiantes la observación, la descripción, la comprensión y la predicción de fenómenos físicos complejos (Guarín y Moreno, 2012), por lo que se hace necesario la implementación de lenguajes de programación como C++ y de herramientas de visualización como Gnuplot, en tanto que éstas permiten el análisis de diferentes situaciones, ayudando a los estudiantes a adentrarse en el fenómeno (Guarín y Moreno, 2012).

Para la elaboración del código numérico, se hizo uso de los métodos numéricos de Euler (Buzzo, 2007), y Medio punto (Gould, Tobochnik y Christian, 2007), y de las ecuaciones para el movimiento parabólico, la fuerza de Coriolis y la centrífuga que se presentan a continuación. De esta forma y con ayuda del lenguaje de programación C++, se solucionaron las ecuaciones de movimiento numéricamente, a pesar de que el método analítico provee una solución exacta al problema. Sin embargo, este método puede llegar a ser muy complicado para estudiantes que no disponen de las herramientas de cálculo necesarias para abordar dicha solución, por lo que los métodos numéricos resultan ser más ventajosos, sobre todo cuando se quiere mostrar este tipo de fenómenos a estudiantes de los primeros semestres de cursos de pregrado (Guarín y Moreno, 2012).

La buena aproximación que ofrecen los métodos numéricos, con respecto al método analítico, permitió obtener las gráficas donde se visualiza mejor cómo se movería el misil en la Tierra, a diferentes latitudes y con distintos ángulos y direcciones de lanzamiento, encontrar trayectorias inesperadas para ciertas condiciones y asimismo concluir que el modelo da un excelente acercamiento al fenómeno observado. Esto le brinda al usuario del código un panorama amplio del fenómeno y le permite explorar nuevas situaciones, ya que puede ubicar el misil en la latitud que desee y cambiar las condiciones iniciales fácilmente.

II. MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES Y NO INERCIALES

En Mecánica Clásica, los marcos de referencia inerciales o galileanos son idealizaciones de lugares de referencia que se encuentran en reposo o que llevan un movimiento rectilíneo a velocidad constante y en donde las leyes de Newton son válidas para cualquier situación física a nivel macroscópico (Goldstein, Poole y Safko, 1959), de modo que se pueden hacer mediciones aplicando, con toda confianza, la ley de inercia como sigue:

todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme y en línea recta, a no ser de que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado (Newton, 1686).

Es decir, si un observador se encontrase dentro de un marco de referencia inercial, vería que los cuerpos que se encuentran dentro de dicho sistema, no serán acelerados por fuerzas que no correspondan a la acción de otros cuerpos en sus cercanías (Resnick y Halliday, 1971). Para efectos prácticos, en casos en los que los desplazamientos y los intervalos de tiempo de medición son cortos, los laboratorios fijos a la Tierra se pueden considerar como inerciales, porque la distancia recorrida por el planeta en este caso es muy pequeña en comparación con la distancia total recorrida durante su traslación, siendo así su movimiento aproximadamente rectilíneo y su rotación despreciable. Pero cuando se trata de un problema a nivel astronómico, es más conveniente construir el marco de referencia con respecto a las galaxias distantes o a las estrellas fijas.

Por otro lado, existen marcos de referencia no inerciales, en los cuales no se pueden aplicar las ecuaciones de movimiento de la mecánica newtoniana de la forma usual, debido a que estos sistemas poseen un movimiento acelerado ocasionado, por ejemplo, por la rotación de dicho sistema, lo que no permite explicar correctamente los fenómenos que tienen lugar dentro y fuera de ellos. Esto sólo se logra

hacer si se admite la existencia de fuerzas especiales llamadas *pseudo-fuerzas* (Resnick y Halliday, 1971), las cuales no cumplen con la tercera ley de Newton y no se pueden asociar a ningún cuerpo en particular, sino que se deben simplemente a la rotación del espacio, pues si se observaran los fenómenos desde un marco de referencia inercial, estas fuerzas desaparecerían. En problemas como el lanzamiento de un proyectil de largo alcance, que es la situación planteada en este trabajo, la Tierra ya no puede ser considerada como un marco de referencia inercial, porque los intervalos de tiempo y las distancias recorridas son más largas y el desplazamiento de la Tierra en el espacio también lo es, acentuándose así su movimiento giratorio. Por lo tanto resulta indispensable considerar la acción de la fuerza de Coriolis y la centrífuga, responsables de la desviación del obús de su trayectoria original.

III. EFECTO CORIOLIS

El efecto Coriolis debe su nombre al matemático francés Gaspar Gustav de Coriolis (1792-1843), quien lo estudió detalladamente y por primera vez en 1835 (McDonald, 1952). Este efecto es el responsable de la desviación de vientos (produciendo así los vientos alisios y del oeste), corrientes oceánicas, trayectorias de aviones y proyectiles, etc., ya que es consecuencia de una pseudo-fuerza que experimentan los cuerpos en movimiento sobre la superficie terrestre y cuya dirección depende del hemisferio en el cual se mueva el cuerpo y de la trayectoria que éste describa. Así, si el cuerpo se mueve en el hemisferio norte, tiende a desviarse hacia la derecha de su trayecto, independientemente de su dirección de avance, pero si se mueve en el hemisferio sur, el cuerpo tiende a desviarse a la izquierda de su recorrido (McDonald, 1952).

Este fenómeno se da porque la Tierra gira de Oeste a Este, haciendo que las velocidades tangenciales en cada latitud sean diferentes: mayores en el Ecuador y menores en los polos. En consecuencia, un cuerpo que se encuentra en una determinada latitud λ_1 se mueve con la Tierra a una velocidad tangencial \vec{v}_1 , por lo que al trasladarse a una latitud λ_2 más cercana a uno de los polos, donde la velocidad tangencial es \vec{v}_2 , el cuerpo tiende a mantener por inercia la velocidad tangencial \vec{v}_1 aunque en λ_2 la Tierra se esté moviendo con una velocidad tangencial menor ($|\vec{v}_2| < |\vec{v}_1|$). Esto ocasiona lo que se conoce como efecto Coriolis, ya que el cuerpo se desvía hacia la derecha o hacia la izquierda según el hemisferio (Beatty, 2006; McDonald, 1952).

Debido a este efecto surge la fuerza de Coriolis, una pseudo-fuerza que siempre es perpendicular a la dirección del eje de rotación del sistema (en este caso, la Tierra) y a la dirección del movimiento del objeto vista desde el sistema no inercial. Sin embargo, cabe aclarar que el término *efecto* se utiliza más comúnmente que el término *fuerza*, debido a que este efecto sólo aparece cuando se utilizan marcos no inerciales, de lo contrario no existiría (Beatty, 2006; Goldstein, Poole y Safko, 1959). La expresión que da cuenta de la fuerza de Coriolis es (Beatty, 2006; Franco, 2006):

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \tag{1}$$

donde m es la masa del cuerpo, \vec{v} la velocidad con la que se mueve y $\vec{\omega}$ la velocidad angular con la que rota la Tierra. Para poder modelar el movimiento del misil, se ubicó el sistema de referencia tomando el origen como el punto de lanzamiento y situando el plano XY sobre la superficie terrestre, con X apuntando hacia el Este, Y hacia el Norte y Z apuntando hacia arriba, es decir, hacia fuera del planeta (figura 1).

En este sentido, debe tenerse en cuenta que, desde un punto de vista riguroso, solo el origen del sistema de referencia (0 m, 0 m, 0m) corresponde a una posición sobre la superficie de la Tierra, mientras que cualquier otro punto en el plano XY con $z=0$ m, ubica al misil no en la superficie terrestre sino en dicho plano, ya que éste es tangente a la superficie de la Tierra en el punto (0 m, 0 m, 0m). Esto también hace que, salvo sobre el eje Z, la dirección de la aceleración gravitatoria no sea paralela a dicho eje.

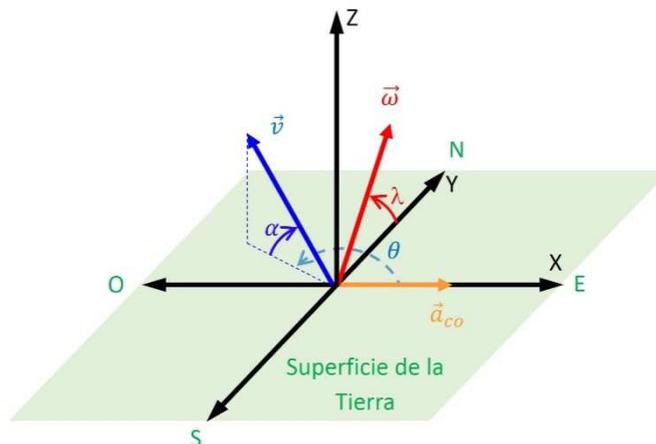


FIGURA 1. Esquema del Sistema de referencia usado para el modelo. Dependiendo de la posición sobre la cual esté volando el proyectil, la latitud (λ) y la aceleración de Coriolis (\vec{a}_{co}) serán diferentes.

No obstante, es posible despreciar estos efectos, siempre y cuando el alcance horizontal del proyectil sea inferior a 50 km, pues por encima de este valor deberán hacerse las respectivas correcciones de posición y dirección de \vec{g} para el misil, no incluidas en el presente trabajo.

Por otro lado, en este sistema de referencia no inercial, la velocidad angular de la Tierra forma un ángulo λ (latitud) con la dirección Norte-Sur, el cual varía dependiendo de la posición del misil. El ángulo θ indica la dirección del lanzamiento con respecto al eje X (Franco, 2006), mientras que el ángulo α entre \vec{v} y el plano XY representa el ángulo de elevación del lanzamiento.

Descomponiendo la velocidad angular de la Tierra y la velocidad de desplazamiento del proyectil en las componentes cartesianas ($\omega_x, \omega_y, \omega_z; v_x, v_y, v_z$), se puede hacer el producto $\vec{\omega} \times \vec{v}$ para hallar la fuerza de Coriolis y la aceleración que ésta genera (\vec{a}_{co}) en sus tres componentes:

$$F_x = -2m(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \tag{2}$$

$$F_y = -2m(\omega_z v_x - \omega_x v_z) \tag{3}$$

$$F_z = -2m(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \tag{4}$$

Con estas ecuaciones es posible usar un método numérico para solucionarlas y luego implementar los resultados en C++.

IV. FUERZA CENTRÍFUGA Y FUERZA DE FRICCIÓN

La fuerza centrífuga es otra pseudo-fuerza originada por la rotación del espacio. En el caso de la Tierra los efectos de esta pseudo-fuerza son despreciables, pero aquí se consideraron para hacer el modelo más completo. Esta fuerza actúa en dos direcciones diferentes dependiendo del hemisferio en el que se encuentre el objeto. Supóngase que se tiene una plomada en el hemisferio norte y se deja colgar evitando vibraciones, corrientes de aire u otros factores que la desvíen de su posición de equilibrio, entonces la plomada sin causa aparente se desvía hacia el Sur; si se realiza el mismo experimento en el hemisferio sur, la plomada se desvía hacia el Norte. Sin embargo estas desviaciones son imperceptibles porque la componente de la fuerza centrífuga es muy pequeña (Beatty, 2006; Franco, 2006).

Ahora considérese un cuerpo en el hemisferio Norte. Éste describe una circunferencia de radio r alrededor del eje de rotación debido al movimiento de la Tierra, siendo $r = R \cos \lambda$ donde R es el radio medio de la Tierra y λ la latitud (figura 2).

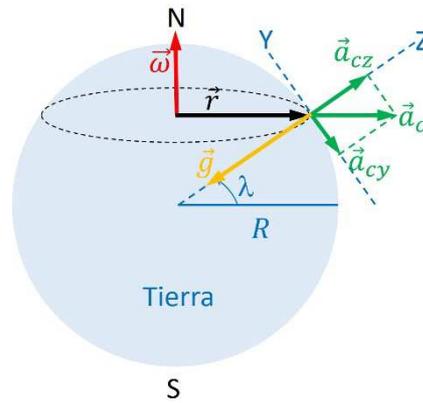


FIGURA 2. La fuerza centrífuga actúa sobre el movimiento del objeto en el hemisferio norte de la Tierra, generando una aceleración \vec{a}_c que apunta hacia afuera del planeta en dirección del vector \vec{r} (Franco, 2006).

La fuerza centrífuga es radial y dirigida hacia fuera y está dada por la expresión (Beatty, 2006; Franco, 2006):

$$\vec{F}_c = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \quad (5)$$

Para el sistema de referencia propuesto, la fuerza centrífuga se puede descomponer en una componente hacia arriba, sobre el eje Z dada por $F_{cz} = m\omega^2(R+z)\cos^2\lambda$ y una componente en la dirección Norte-Sur (eje Y) dada por $F_{cy} = -m\omega^2(R+z)\cos\lambda\sin\lambda$, responsable de desviar los cuerpos hacia el Sur si éstos se encuentran en el hemisferio norte. De este modo, esta fuerza genera una aceleración \vec{a}_c , con una componente tangencial a la superficie de la Tierra, apuntando hacia el Sur (\vec{a}_{cy}), y una componente apuntando hacia afuera del planeta (\vec{a}_{cz}), contrarrestando la gravedad \vec{g} (figura 2).

Descomponiendo $\vec{\omega}$ y \vec{r} en sus componentes cartesianas y desarrollando la ecuación (5) para la fuerza centrífuga, se obtienen las componentes cartesianas de esta fuerza:

$$F_x = m(\omega_y\omega_x r_y - \omega_y\omega_y r_x - \omega_z\omega_z r_x + \omega_z\omega_x r_z) \quad (6)$$

$$F_y = -m(\omega_x\omega_x r_y - \omega_x\omega_y r_x - \omega_z\omega_y r_z + \omega_z\omega_z r_y) \quad (7)$$

$$F_z = m(\omega_z\omega_x r_x - \omega_x\omega_x r_z - \omega_y\omega_y r_z + \omega_z\omega_y r_y) \quad (8)$$

donde $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = R + z$. Por otro lado, se consideró en el modelo una fuerza de fricción proporcional al cuadrado de la velocidad con componentes cartesianas:

$$F_x = -cv_x v \quad (9)$$

$$F_y = -cv_y v \quad (10)$$

$$F_z = -cv_z v \quad (11)$$

Aquí c es una constante de fricción con el aire igual a $0,1 \text{ kg/m}$ y v la rapidez del proyectil. La constante de fricción c depende del área de la sección transversal frontal del obús expuesta al aire A , de la densidad del aire ρ , y de un coeficiente δ adimensional, que depende de la forma de la bala, en consecuencia dicha constante de fricción tiene la forma: $c = \rho A \delta / 2$ (González, 2008).

De esta manera, se consideró el valor de la densidad del aire a nivel del mar ($1,29 \text{ kg/m}^3$), el valor del coeficiente δ se tomó como $0,2$ y se calculó el área de la sección transversal frontal del obús asumiendo que ésta correspondía a la de un cono de altura 50 cm con un radio de 40 cm , ya que el calibre de la bala es de 80 mm , entonces:

$$A = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi(0,4 \text{ m}) \sqrt{(0,5 \text{ m})^2 + (0,4 \text{ m})^2} = 0,8 \text{ m}^2$$

Estos parámetros se ajustaron según los datos encontrados en la web para las ojivas usadas por el cañón *Schwerer Gustav*, desarrollado por los alemanes en la Segunda Guerra Mundial (Smith, 2014). Puesto que se ha considerado el roce con el aire de la forma $-c v^2$ (González, 2008), la solución analítica de las ecuaciones de movimiento resulta muy compleja, razón por la cual se hace necesario resolverlas por métodos numéricos como el de Euler y medio punto (Buzzo, 2007).

V. PARÁMETROS Y CONDICIONES INICIALES

Para el modelo se tomaron como referencia los proyectiles utilizados por los alemanes en la Segunda Guerra Mundial, diseñados especialmente para destruir las murallas de hormigón de 7 metros de ancho, reforzadas con placas de acero de 1 metro de ancho de la línea Maginot francesa. Para ello, los alemanes crearon la pieza de artillería más grande de la historia, el *Schwerer Gustav*, que se traduce como Gustav el Pesado (Smith, 2014). Este cañón disparó las ojivas más pesadas que cualquier pieza de artillería podía disparar. Fue diseñado para atacar blancos grandes, tenía un peso de 1350 toneladas, una longitud de 47,3 metros, un calibre de 800 mm, una elevación máxima de 48° y una cadencia de tiro de 4 disparos por hora, por lo cual tenía que ser transportado en 245 vagones por vía férrea (Smith, 2014). Su emplazamiento requería el uso de dos grúas, dos batallones de artillería antiaérea, un equipo de inteligencia para estudiar los blancos y algunas tropas para vigilar la zona (Smith, 2014). Sin embargo, el rápido avance de las tropas nazis obligó a la rendición de la línea Maginot antes que el cañón pudiera ser empleado contra sus fortificaciones, por lo que solo fue usado posteriormente en la batalla de Sevastopol (Crimea soviética) en 1942.

Los proyectiles del *Schwerer Gustav* también eran descomunales: tenían un peso de 4,8 toneladas, eran disparados a una velocidad de 820 m/s y tenían un alcance de hasta 48 kilómetros, por lo que era necesario calcular la desviación que sufrían por el efecto Coriolis, la cual podía llegar a ser de más de 100 metros. Este efecto fue un gran dolor de cabeza para la armada inglesa, en la Primera Guerra Mundial, durante su batalla en las Islas Malvinas (1914) en el hemisferio sur (latitud: -51,45°), ya que sus proyectiles se desviaban más de 100 metros del blanco, debido a que la corrección de desvío estaba calculada para el hemisferio norte y no para el Sur (Beatty, 2006).

Con base en estos datos, se le dieron las condiciones iniciales al modelo, suponiendo que el misil partía del origen del sistema de coordenadas y considerando primero el caso en que el proyectil es lanzado en el hemisferio norte hacia el Norte. De este modo, se usó una masa de 4800 kg se tomó la posición inicial como $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m, $z_0 = 2$ m. Entonces las componentes de la velocidad para un ángulo de tiro $\alpha = 45^\circ$ fueron:

$$v_{0y} = 820 \cos(45^\circ) \text{ m/s}, v_{0x} = 0 \text{ m/s}, v_{0z} = 820 \sin(45^\circ) \text{ m/s}$$

Dichas componentes son calculadas por el programa. No obstante, el usuario puede ubicar el obús en cualquier latitud introduciendo el ángulo λ sobre el cual desea posicionar el proyectil, teniendo en cuenta que una latitud positiva lo ubica en el hemisferio norte y una latitud negativa en el hemisferio sur. El programa también le permite al usuario modificar el ángulo de elevación del disparo (α) y el ángulo de orientación azimutal (θ): 0° hacia el Este, 90° hacia el Norte y así sucesivamente¹.

Asimismo, se tomó la gravedad como $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, el radio medio de la Tierra como $R = 6,370 \times 10^6$ m y la velocidad angular media para la Tierra como $\omega = 7,272205 \times 10^{-5} \text{ 1/s}$. Para calcular las fuerzas que actúan sobre la ojiva fue necesario darle valores a las componentes de la velocidad angular y del vector posición r :

$$\omega_y = 7,272205 \times 10^{-5} \cos(L); \omega_x = 0; \omega_z = 7,272205 \times 10^{-5} \sin(L)$$

$$r_x = x; r_y = y; r_z = R + z$$

De esta forma, el computador hace los cálculos de las fuerzas a partir de los resultados obtenidos anteriormente para las componentes cartesianas de la fuerza de Coriolis, la fuerza centrífuga y la fuerza de fricción. El programa calcula además los cambios de posición y de velocidad del proyectil, por medio de los algoritmos que proveen los métodos numéricos de Euler y medio punto (Tabla I) (Gould, Tobochnik y Christian, 2007).

TABLA I. Métodos numéricos usados en el modelo.

¹El programa elaborado en C++ y que permitió la obtención de los resultados presentados aquí, se encuentra a disposición para cualquier persona que lo precise, sólo es necesario contactar a los autores de este trabajo vía correo electrónico.

Método Numérico	Posición	Velocidad
Método de Euler	$x_{k+1} = x_k + dt v_k$	$v_{k+1} = v_k + dt a_k$
Método de medio punto	$x_{k+1} = x_k + dt v_k + \frac{1}{2} a_k dt^2$	$v_{k+1} = v_k + dt a_k$

En estos casos, los algoritmos comienzan los cálculos usando los valores iniciales para la posición y la velocidad del proyectil (x_k, v_k con $k = 0$), obtenidos con la información suministrada por el usuario. Luego, el código calcula los demás puntos k de la trayectoria del proyectil usando las iteraciones de los métodos numéricos. Asimismo, el código trabaja con un paso temporal $dt = 0,001$ s el cual puede ser reducido para obtener mayor precisión, aunque esto implica un incremento en el tiempo de procesamiento.

Por último, el código grafica la trayectoria del proyectil, a través de la herramienta Gnuplot, como se mostrará a continuación. El programa además muestra al usuario algunos datos importantes sobre el movimiento del proyectil, a fin de obtener una información mucho más completa sobre el fenómeno.

VI. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se graficó el movimiento parabólico del misil con rozamiento pero sin la acción de la fuerza de Coriolis y la centrífuga, para así tener un parámetro con el cual comparar las demás gráficas en donde sí se consideró el efecto Coriolis. La gráfica resultante mostró una trayectoria parabólica asimétrica debido a la fricción con el aire, con una altura máxima de 11 kilómetros y un alcance horizontal de 34 kilómetros aproximadamente (figura 3a), independientemente de la latitud, ya que no se tuvo en cuenta el efecto Coriolis.

Luego, se ubicó el proyectil a una latitud de 45° y se le dio un ángulo acimutal $\theta = -90^\circ$, de modo que viajara hacia el Sur. Al graficar simplemente las posiciones Z vs. Y, es decir, altura vs. alcance horizontal, y considerando que el eje positivo de Y crece en dirección Norte según el sistema de referencia escogido, se ve que efectivamente el proyectil describe una trayectoria casi parabólica debido a la fricción con el aire, igual a la que se obtiene sin aplicar la fuerza de Coriolis, con una altura máxima de 11 kilómetros aproximadamente y un alcance horizontal de unos 34,33 km (figura 3a).

Por otro lado, al graficar X vs. Y, o sea, desviación vs. alcance horizontal, con el fin de apreciar el movimiento visto desde arriba, se observa que el misil no solo lleva un movimiento en el plano YZ, sino que además es desviado 209 m hacia el Oeste en dirección de las X negativas, como era de esperarse debido al efecto Coriolis (figura 3b). También se puede graficar la trayectoria en un espacio 3D (figura 3c), siendo cuidadosos con la escala de los ejes, los cuales no son iguales por lo que el efecto parece ser más pronunciado de lo que en realidad es.

Los valores numéricos del alcance horizontal, desviación y altura del misil, fueron calculados por medio del método de medio punto, a fin de obtener una buena precisión en los datos. Los resultados de los dos métodos fueron graficados en el mismo plano coordenado, con el objetivo de comparar las gráficas generadas por cada uno de ellos. Así, se aprecia que con los dos métodos se obtienen gráficas prácticamente iguales (figura 3), pues no se ve que una gráfica sobresalga más que las otras, todas cubren los mismos puntos aproximadamente, aunque en realidad las gráficas difieren un poco debido a los errores globales de cada método (Gould, Tobochnik y Christian, 2007).

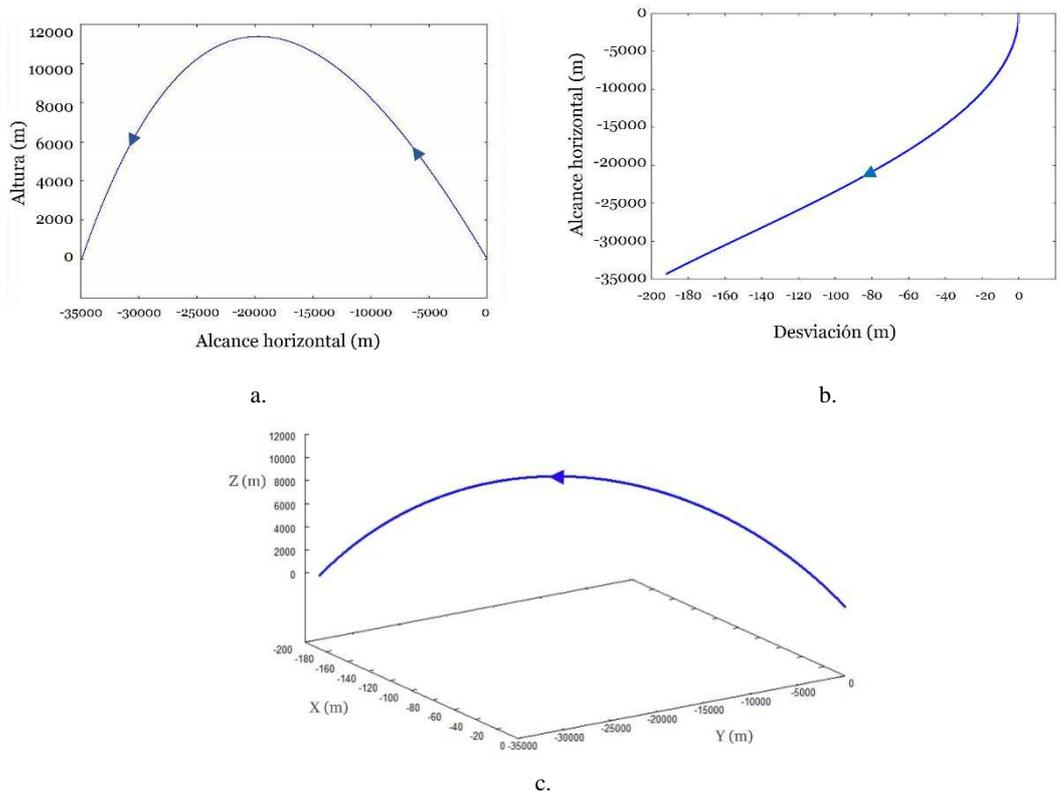


FIGURA 3. a. Alcance horizontal vs. Altura, aquí el misil viaja desde el norte (derecha) hacia el sur (izquierda); b. desviación vs. Alcance horizontal, aquí el movimiento es visto desde arriba y el misil viaja desde el norte (arriba) hacia el sur (abajo); c. gráfica del movimiento en 3D. Debe tenerse cuidado con las escalas de los ejes.

También se generaron las gráficas que muestran la trayectoria del misil cuando éste se ubica en las Islas Malvinas (figura 4, a), a una latitud de $-51,45^\circ$ (hemisferio sur), disparándolo hacia el Sur, y efectivamente se encontró que se desvía del blanco alrededor de 121 metros en dirección Este.

Después de comparar el modelo con las mediciones encontradas en los referentes para este fenómeno (Beatty, 2006; Smith, 2014) y luego de comprobar que se acercaba bastante a lo observado, se encontró también que para latitudes pequeñas, el misil describe trayectorias extrañas, siendo éstas más acentuadas en las latitudes menores a 40° . Por ejemplo, si el misil es lanzado a una latitud de 15° Norte, su movimiento visto desde arriba describe un camino en el cual el proyectil primero se desvía hacia el Oeste y luego hacia el Este antes de alcanzar el objetivo (figura 4b). Al final, la desviación horizontal resulta ser de 11,73 m al Oeste con respecto al blanco.

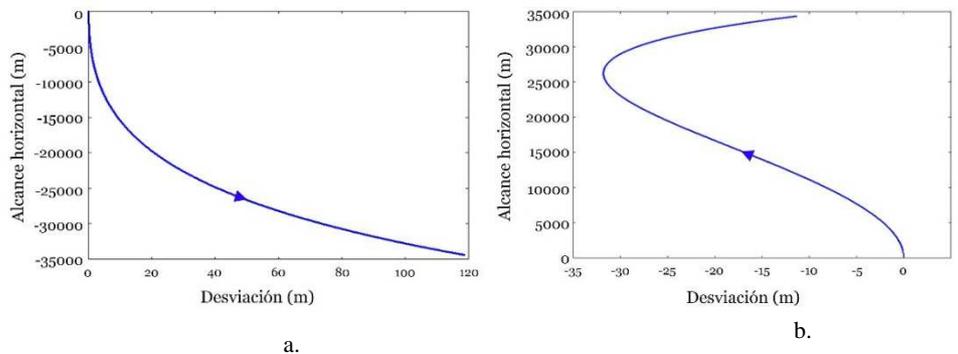


FIGURA 4. a. Desviación del misil cuando es lanzado en las Islas Malvinas ($-51,45^\circ$ de latitud), en dirección norte-sur; b. desviación del misil cuando es lanzado a una latitud de 15° en la dirección sur-norte. Ambos movimientos son vistos desde arriba.

Esto es debido a que en el punto A, cuando el misil aún está cerca de la superficie terrestre, en el inicio de su movimiento (figura 5), la fuerza de Coriolis se encuentra dirigida hacia el Oeste (saliendo de la hoja). Este resultado es una consecuencia de la regla de la mano derecha para el producto vectorial entre la velocidad angular del planeta ($\vec{\omega}$) y la velocidad del proyectil (\vec{v}), como se indicó en la ecuación (1).

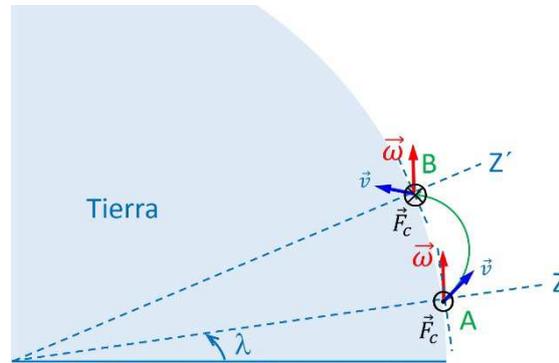


FIGURA 5. Representación esquemática del movimiento del misil cuando viaja hacia el Norte, desde una latitud entre 0° y 40° . Aquí es desviado primero hacia el Oeste (punto A) y luego hacia el Este (punto B), debido a la fuerza de Coriolis.

De este modo se produce una desviación en la trayectoria del misil hacia la izquierda. No obstante, cuando el misil alcanza el punto B durante su vuelo en la misma trayectoria, la fuerza de Coriolis cambia de dirección, apuntando ahora hacia el Este (entrando en la hoja) y cambiando la dirección de la desviación. El mismo análisis se puede hacer para la situación análoga en el hemisferio sur (latitudes negativas), obteniéndose resultados semejantes, sin embargo, para latitudes mayores a 40° este hecho es despreciable.

El programa muestra también los datos más importantes sobre el movimiento del misil para cualquier caso, como el alcance horizontal, su desviación y el tiempo de vuelo, lo cual permite apreciar los efectos de la Fuerza de Coriolis con mayor exactitud.

VII. CONCLUSIONES

Como se puede ver, este modelo es una buena aproximación al fenómeno registrado en las fuentes históricas, si se tienen en cuenta los datos de las mediciones hechas para los misiles del cañón *Schwerer Gustav* y los efectos observados durante la batalla de las Islas Malvinas. Gracias a este modelo se lograron visualizar desviaciones del proyectil, aparentemente extrañas e inesperadas (figura 4b), en donde el misil se desvía hacia el Oeste y luego hacia el Este. Con un poco de análisis, el modelo puede explicar la razón para esta situación, mostrando que la fuerza de Coriolis cambia su dirección durante el movimiento, debido a la contribución de la componente en Z de la velocidad del misil. No obstante, cuando la latitud es mayor a 40° este hecho ya es despreciable. Se comprobó también que cuanto mayor es el ángulo de latitud, más evidente es el efecto Coriolis, pues la desviación que sufre el misil hacia el Este o hacia el Oeste es mucho mayor.

El modelo le permite al usuario obtener muchas más gráficas en donde se logra observar la desviación del proyectil en distintas situaciones, como por ejemplo cuando el proyectil se lanza en el hemisferio sur en dirección Sur-Norte, para lo cual sólo es necesario cambiar simplemente el ángulo azimutal. También se puede usar para obtener la trayectoria del misil cuando es disparado con distintos ángulos de inclinación o cuando es disparado en dirección Oeste-Este y viceversa.

En este último caso, la fuerza de Coriolis actuaría hacia arriba, en la dirección Z positiva, lo cual haría que el misil obtuviera una altura máxima y un alcance horizontal mayores; sin embargo, se puede verificar con el modelo que el efecto es despreciable debido al gran peso del proyectil.

Además, la simulación se construyó con base en la implementación de métodos numéricos sencillos como el método de Euler, para obtener soluciones de las ecuaciones de movimiento con buena aproximación, puesto que su solución analítica puede llegar a ser complicada para los estudiantes. Esto permite que cualquier persona interesada en el fenómeno pueda entender y manipular mejor el programa de acuerdo a sus necesidades, por lo que su código es abierto para que sea mejorado o adaptado a nuevas

situaciones. Además puede servir como base para la elaboración de otros modelos referidos a las consecuencias del efecto Coriolis sobre cuerpos que se mueven en la Tierra o incluso en otros planetas.

Por último, se remarca el hecho de que este tipo de fenómenos, analizados a través de modelos físicos apoyados con códigos numéricos y computacionales, permite tanto a estudiantes como a docentes estudiar situaciones inesperadas que contribuyan a una mejor comprensión de estos eventos y de los conceptos de la mecánica clásica que entran en juego, al buscar explicaciones de lo sucedido. Lo anterior permite generar discusiones donde los docentes pueden promover el desarrollo de habilidades de pensamiento cada vez más estructuradas entre los estudiantes, al tiempo que se construye conocimiento usando situaciones más reales e interesantes, que pueden ser solucionadas con algoritmos sencillos.

REFERENCIAS

- Beatty, M. F. (2006). *Principles of engineering mechanics: Volume 2 Dynamics - The analysis of motion*. Nueva York: Springer.
- Buzzo, R. (2007). Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física. *Latin-American Journal of Physics Education*, 1(1), pp. 19-23.
- Franco, A. (2006). *Aceleración centrífuga*. Recuperado el 5 de mayo de 2014, de Física con ordenador: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica.htm>
- Goldstein, H., Poole, C. y Safko, J. (1959). *Classical Mechanics*. Nueva York: Addison Wesley.
- González, A. (2008). Comparación de métodos analíticos y numéricos para la solución del lanzamiento vertical de una bola en el aire. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(2), pp. 170-179.
- Gould, H., Tobochnik, J. y Christian, W. (2007). *An introduction to computer simulation methods: Application to physical systems*. Nueva York: Pearson, Addison Wesley.
- Guarín, E. D. y Moreno, H. (2012). La modelación y las visualizaciones computarizadas en la Enseñanza de la Física. *Revista Nodos y Nudos*, 4(33), pp. 49-61.
- McDonald, J. E. (1952). The Coriolis Effect. *Scientific American Magazine*, (186), pp. 72-76.
- Newton, I. (1686). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world*. Cambridge: Trinity College.
- Resnick, R. y Halliday, D. (1971). *Física parte I*. Barcelona: CECSA.
- Smith, D. C. (2014). *Super guns - Part 1*. Obtenido de RDECOM, Estados Unidos: U.S. army.
- Thompson, E. (1972). Coriolis Deflection of a Ballistic Projectile. *American Journal of Physics*, 40, pp. 1477-1483.
- Wang, A., Li, J., Zhai, X. y Zhang, X. (2010). Study on the effect of Coriolis force on projectile motion based on Matlab. *Journal of Shaanxi University of Science & Technology (Natural Science Edition)*, 6, pp. 106-110.