

# El cono doble ascendente como experimento discrepante para la enseñanza de la física

The ascending double cone as a dissenting experiment for physics education

REVISTA  
DE  
ENSEÑANZA  
DE LA  
FÍSICA

Edgar David Guarín<sup>1</sup>, Harold Moreno<sup>2</sup>, María Helena Ramírez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade de Brasília, Asa Norte – CEP 70919-970, Brasília, DF, Brasil

<sup>2</sup>Universitat Autònoma de Barcelona, 08193, ALBA Synchrotron, BP 1413, km 3.3, 08290, Barcelona, España

E-mail: edavidsg89@gmail.com

(Recibido el 12 de febrero de 2016; aceptado el 13 de mayo de 2016)

## Resumen

Uno de los problemas en la enseñanza de la física está relacionado con la escasa comprensión de los conceptos entre los estudiantes. La principal razón es el alto grado de formalismo en algunas explicaciones. En este trabajo proponemos introducir los experimentos discrepantes (ExD) en el salón de clases, ya que ellos generan en los estudiantes la necesidad de construir explicaciones, potenciando diferentes habilidades de aprendizaje. Así, describimos una experiencia de aula con estudiantes de noveno semestre de licenciatura en física, en torno del estudio del cono doble ascendente, dando una aproximación alterna a esta situación. De acuerdo con la metodología del aprendizaje activo, buscamos favorecer la comprensión de la dinámica rotacional de los cuerpos rígidos, a través de la generación de un análisis físico y un modelo explicativo por parte de los estudiantes, que les permitiera apreciar mejor el carácter físico y matemático del fenómeno.

**Palabras clave:** Enseñanza de la mecánica clásica; Experimentos discrepantes; Aprendizaje activo; Modelación; Cono doble ascendente.

## Abstract

One of the problems in Physics education is related to the limited understanding of concepts among students. The main reason is the high degree of formalism in some explanations. In this paper we propose to introduce discrepant experiments in the classroom since this kind of experiments generates the need to build explanations, enhancing different learning skills. Thus, we describe a classroom experience with students from ninth semester in a physics career, around the analysis of the ascending double cone, giving an alternative approach to this situation. According to the active learning methodology, we seek to promote understanding of the rotational dynamics of rigid bodies through the generation of a physical analysis and an explanatory model made by students, which allows them to better appreciate the mathematical and physical character of the phenomenon.

**Keywords:** Teaching of classical mechanics; Discrepant experiments; Active learning; Modeling; Ascending double cone.

## I. INTRODUCCIÓN

El abordaje y comprensión de un fenómeno físico es un proceso intelectual laborioso, que propende por la descripción y representación satisfactoria del mismo, a partir del análisis de las causas y variables que entran en juego. Al respecto resultan importantes ciertas herramientas de pensamiento tales como los conceptos y los modelos, en tanto que son ellos los que permiten construir conocimiento en torno al fenómeno de estudio, un conocimiento que puede ser aplicable posteriormente a nuevas situaciones e inclusive enseñado a otras personas.

De este modo, los *conceptos* se establecen como instrumentos de conocimiento que no solo permiten nombrar los fenómenos y sus características, sino que además ayudan a su abstracción y racionalización,

así como a la creación de significados coherentes dentro del contexto científico (Díez y Moulines, 1999). Por su parte, los modelos se pueden definir como construcciones abstractas que buscan dar cuenta de la naturaleza de los fenómenos físicos con el fin de describirlos, explicarlos y predecir lo que ocurrirá con ellos bajo ciertas condiciones, de modo que sea posible profundizar y desarrollar un entendimiento adecuado sobre el evento físico (Raviolo, 2009; Veit y Teodoro, 2002).

No obstante, en muchas ocasiones el alto grado de formalización de algunos conceptos y modelos en física resulta de difícil comprensión para los estudiantes, lo que genera dificultades en su proceso de aprendizaje y de formación como profesores de física, como es nuestro caso, obligándolos a memorizar ecuaciones o definiciones preestablecidas, que no les permiten aplicar su conocimiento en la construcción de explicaciones adecuadas a lo observado.

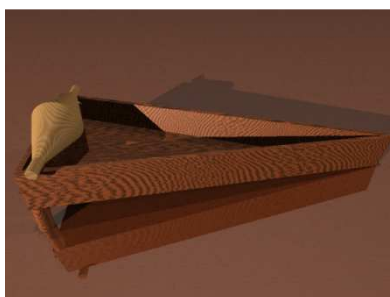
Así por ejemplo, desde nuestra experiencia como docentes de física, ha sido posible evidenciar que incluso en problemas referentes a la rotación de cuerpos rígidos desde el punto de vista clásico, muchos educandos de licenciatura manifiestan dificultades en la comprensión y aplicación de conceptos tales como el de inercia rotacional, energía rotacional, etc., así como en su formulación matemática para la resolución de situaciones prácticas propuestas al interior del aula.

Lo anterior conlleva a concebir la física como una ciencia difícil y dogmática, en donde el lenguaje matemático usado termina careciendo de sentido para el estudiante, induciendo así a muchos docentes a pensar en la formulación de los conceptos y/o modelos prescindiendo de la formalización matemática. Esta idea entra en conflicto con el carácter riguroso de la física, puesto que “desmatematizar” las Ciencias significa quitarles su estructura de razonamiento lógico, desligándolas de todo el engranaje metodológico de las ciencias formales (Ayala, Malagón y Romero, 2008).

Esta problemática exige a los maestros proponer acciones que procuren el mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje de los educandos, lo que implica a su vez introducir nuevas metodologías que permitan afianzar y poner en juego habilidades básicas como la interpretación, la argumentación y la proposición, de modo que los estudiantes consigan resolver los desafíos disciplinares emergentes en el aula (Guarin y Moreno, 2010).

Por ende, en el presente trabajo exponemos una forma de conectar la visión cualitativa con la cuantitativa, a la hora de analizar fenómenos como la rotación de los cuerpos rígidos en torno a ejes móviles, con estudiantes de licenciatura en física. Para ello se tomó el caso particular de un experimento discrepante (ExD) (Barbosa, 2008): el cono doble ascendente. Aquí el ExD es entendido como un montaje que al accionarlo manifiesta un fenómeno contra-intuitivo para el estudiante, ya que pone de manifiesto una fenomenología sorpresiva, inesperada y paradójica (Barbosa, 2009).

El montaje consta de una rampa en forma de "V", construida a partir de dos rieles unidos por uno de sus extremos y de un aditamento, con el cual se logra obtener un determinado grado de inclinación en el lado más ancho de dichos rieles (Figura 1). Sobre el montaje experimental así dispuesto se coloca un cono doble (o dos conos unidos por sus bases) en la zona más angosta que corresponde al punto de unión entre los rieles; posteriormente éste se libera para observar su movimiento (Ghandiy Efthimiou, 2005; Vásquez, 2007).



**FIGURA 1.** Montaje del Cono Doble Ascendente.

La discrepancia surge debido a que el movimiento del cono en apariencia contradice las leyes más elementales de la física. La gran mayoría de los estudiantes suponían que el cono doble debía quedarse en la zona más angosta de la canal, debido a que ésta se encuentra a menor altura que la zona ancha, sin embargo, cuando el cono se suelta desde esta posición, se observa su "ascenso" por la rampa hacia la zona más ancha, lo que resulta ser contra-intuitivo de acuerdo a las experiencias de los individuos en relación con los planos inclinados. No obstante, con un poco de observación detallada, se descubre que la clave de este imprevisto suceso se encuentra en que el centro de gravedad del cono doble en realidad descende.

Este montaje crea en el estudiante la necesidad de dar una respuesta a aquello que observa. Cuando no es posible hacerlo porque sus conocimientos y por tanto sus explicaciones no se ajustan a lo evidenciado,

el educando se ve forzado a plantear una nueva explicación hasta que ésta logre ser lo suficientemente coherente para él, llevándolo a adquirir nuevos conocimientos o a consolidar los que ya posee.

Con base en lo expuesto, presentamos a continuación la metodología de trabajo que apoyó la creación del modelo físico y matemático planteado por los estudiantes en torno al montaje experimental. Se presentan así los resultados más importantes de la actividad experimental, así como la contrastación de los mismos por medio de un código numérico creado por los estudiantes en lenguaje C++, el cual permite un análisis gráfico de la situación. Luego, se hace mención a los aportes y ventajas que actividades de este tipo introducen en el ámbito de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la física y se culmina con las principales conclusiones, donde se sintetiza el trabajo desarrollado.

Cabe resaltar que este fenómeno ya ha sido tratado con un gran detalle físico y matemático por Ghandi y Efthimiou(2005), pero su análisis es tan exhaustivo que la complejidad de los cálculos impide su estudio con alumnos de primeros semestres, por ejemplo. En este sentido, el modelo propuesto aquí busca dar a los estudiantes y maestros una comprensión del fenómeno a través de recursos geométricos sencillos, con los que logren obtener resultados consistentes con lo observado. Este modelo también puede convertirse en un puente que facilite la aproximación de estudiantes de pregrado a análisis más elaborados como el propuesto por Ghandi y Efthimiou(2005).

## **II. DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA**

El trabajo lo desarrollamos en el marco del Seminario de Física y Matemáticas del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), bajo la dirección de los profesores Néstor Méndez Hincapié y José Orlando Organista, con 33 estudiantes de noveno semestre de Licenciatura en Física.

El objetivo consistía en generar espacios de interacción en donde estudiantes y docentes discutieran sus ideas y posibles explicaciones en relación con el ExD, de modo que fuera posible mejorar la comprensión de conceptos de la dinámica clásica de rotación, tales como el de inercia rotacional, por medio de actividades de exploración que ayudaran a los estudiantes a desarrollar modos de pensar cada vez más abstractos, a través de la formulación de nuevas preguntas y modelos en donde el uso del lenguaje matemático cobraba gran importancia, sobretodo en el proceso de validación de ideas dentro del contexto del aula.

Por lo anterior, el ExD fue esencial en la estructura de la estrategia, ya que permitió captar la atención de los estudiantes, generándoles un conflicto entre sus saberes y lo observado (Barbosa, 2008), a fin de que plantearan hipótesis y explicaciones coherentes del evento hasta que estas se convirtieran en modelos conceptuales y matemáticos, por medio de los cuales iniciaron un proceso de formalización, con cadenas de razonamiento que posibilitaron la creación de descripciones detalladas.

## **III. METODOLOGÍA**

La implementación de la propuesta la realizamos siguiendo los planteamientos del aprendizaje activo y el enfoque de investigación dirigida para la enseñanza de las ciencias (Pozo y Gómez Crespo, 1997). El proceso de modelación del fenómeno llevado a cabo por los estudiantes, se fundamentó en un estudio descriptivo realizado a lo largo de las fases que se describen a continuación.

### **A. Fase de indagación**

En ella los estudiantes observaron por primera vez el montaje experimental antes de ponerlo en funcionamiento y realizaron una descripción de todas sus características. Posteriormente, llevamos a cabo un conversatorio que permitió indagar sobre las ideas de los estudiantes en relación a lo que ocurriría al accionar el ExD. Aquí fue indispensable pensar y plantear preguntas pertinentes que aportaran a las discusiones entre educandos y maestros, de modo que emergieran poco a poco las herramientas conceptuales y matemáticas de las que disponían los estudiantes, en relación con la dinámica rotacional de cuerpos rígidos como el cono doble. Finalmente se accionó el ExD para contrastar las primeras predicciones de los estudiantes con lo observado y de esta forma generar la discrepancia en ellos, retroalimentando la discusión con nuevas preguntas que ayudaron a mantener el interés y la necesidad de explicación de los educandos.

De esta manera, el docente tiene el papel de orientador durante todo el proceso y se convierte en un agente activo en la dinámica del aula, pues debe promover el debate de las ideas entre estudiantes, reconocer las herramientas conceptuales y matemáticas de las que disponen los educandos, y ofrecer

nuevos puntos de vista para el tratamiento de la situación. Cabe resaltar además que el contexto del aula es fundamental, ya que este permite redireccionar las preguntas para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Así, el proceso de construcción de los modelos explicativos se planteó como un trabajo grupal, ya que la interacción entre individuos favorece la búsqueda y creación de ideas mejor estructuradas. Para ello y como complemento a estas actividades, los estudiantes iniciaron una indagación en fuentes de información confiables, que les permitieran establecer las bases de sus modelos explicativos. A partir de dicha búsqueda se suscitaban nuevos conversatorios en donde surgieron más ideas sobre el funcionamiento del ExD.

## **B. Fase de experimentación**

Una de las ventajas de este tipo de ExD es que son reproducibles fácilmente con materiales de bajo costo o con instrumentación disponible en cualquier laboratorio. Así por ejemplo, los estudiantes repitieron el ExD en sus grupos de trabajo, usando piezas en madera, plástico, cartón o con materiales de laboratorio tales como varillas, soportes universales, etc. Esto les permitió interactuar y acercarse al fenómeno de diferentes formas, apreciar situaciones que en las primeras demostraciones no fueron mostradas, cambiar a voluntad parámetros como tamaño y masa del cono doble, longitud de los rieles, inclinación y ángulo de apertura de los mismos, entre otros.

Luego, los estudiantes elaboraron informes de laboratorio en donde plasmaron de forma escrita sus hallazgos, ideas y conclusiones sobre el ExD, proponiendo también posturas y explicaciones cada vez más justificadas en el análisis físico, matemático y geométrico de la situación, al tiempo que se formulaban más preguntas al respecto, siempre con la mediación del docente a cargo.

El trabajo experimental enriqueció de este modo la visión de los estudiantes, al ofrecerles nuevas experiencias que fortalecieron modos de pensar pragmáticos, conceptuales y reflexivos, además de permitirles interrelacionar variables e indagar directamente sobre las causas del inesperado fenómeno. En este punto también fueron importantes las discusiones de aula, ya que en ellas los estudiantes presentaron sus resultados y debatieron sobre ellos en procura de construir un conocimiento más amplio del fenómeno.

## **C. Fase de modelación**

A partir del trabajo realizado en las fases anteriores, les pedimos a los grupos de trabajo reunir toda la información recolectada en sus indagaciones teóricas y experimentales, para formular un modelo explicativo más concreto sobre el movimiento del cono doble ascendente. Aquí debían emplear el formalismo físico y matemático que ofrece la mecánica clásica en relación con la rotación de cuerpos rígidos y aplicarlo en la confección de sus representaciones.

El modelo debía ser sustentado con la traducción del proceso algorítmico a un determinado lenguaje de programación. Para ello decidimos utilizar el lenguaje de programación C++, pues este tipo de herramienta trae importantes ventajas, en tanto permite la clasificación y la abstracción de los elementos susceptibles de ser programados (Anzualdo, 2010), así como su visualización a través de gráficos donde se relacionan más fácilmente las variables físicas que describen el fenómeno.

En este sentido, la modelación en los procesos de comprensión que iniciaron los educandos ante la fenomenología contra-intuitiva experimentada con el cono doble ascendente, se instaura como una de las herramientas de pensamiento más eficaces a la hora de estudiar el complejo mundo que se conoce, ya que ayuda a racionalizar los fenómenos observados teniendo en cuenta sus causas y efectos (Chamizo, 2003).

## **D. Fase de implementación y visualización**

Durante esta fase, los estudiantes con la guía de los profesores, construyeron representaciones visuales del modelo haciendo uso de gráficas computarizadas, utilizando el programa *gnuplot*, vinculado a un código numérico elaborado en el lenguaje de programación C++.

Dichas visualizaciones fueron validadas en los grupos de trabajo, con las situaciones que los estudiantes esperaban que ocurrieran, con los datos experimentales recolectados con anterioridad y con el análisis físico-matemático hecho para el ExD. Con ello los estudiantes consiguieron analizar e interpretar mejor los datos, para luego exponer ante los demás educandos y de forma más coherente, su entendimiento actual acerca del fenómeno (Edelson y Reiser, 2006).

## **E. Fase de socialización**

A modo de conclusión del trabajo, en la fase final los estudiantes establecieron y presentaron a los demás sus interpretaciones y conclusiones sobre el modelo elaborado, dando explicación a las situaciones obtenidas, comparando puntos de vista con el profesor y los demás compañeros, para así obtener una mejor comprensión del fenómeno y de los conceptos físicos involucrados.

Esto se propició a través de la realización de exposiciones, en donde se retomaron las discusiones pasadas, los trabajos escritos y los aspectos más importantes no sólo de los modelos planteados, sino también de la labor de modelación llevada a cabo por los estudiantes, reflexionando sobre los inconvenientes presentados durante las actividades y la forma en que cada grupo los solucionó, con el fin de que el punto de vista de cada estudiante pudiera enriquecer el de los demás.

#### IV. RESULTADOS DEL TRABAJO EN EL AULA

Al apreciar las elaboraciones escritas y orales de los estudiantes con respecto al estudio del cono doble ascendente, logramos evidenciar que luego del proceso de modelación, los educandos eran más conscientes de que el problema de analizar el movimiento de traslación y de rotación de un cuerpo sólido dentro de un campo gravitatorio, se puede simplificar considerando solo el movimiento desu centro de gravedad (CG) o centro de masa, si el observador se encuentra en la superficie terrestre (Resnick y Halliday, 1971).

Por lo tanto, la fuerza gravitacional era clave para la formulación de sus modelos, ya que es una de las fuerzas externas que más influyen en el movimiento de los cuerpos rígidos, siendo la resultante de todas las fuerzas gravitacionales que obran sobre cada una de las partículas que conforman el cuerpo sólido, y que se supone se aplica en el centro de gravedad del mismo. Así los estudiantes asumieron un campo gravitacional aproximadamente uniforme, de modo que la fuerza de gravedad resultante fuera conservativa, con el fin de poder asociarle una energía potencial gravitacional y con ello facilitar el análisis del ExD.

Con base en lo anterior, rescatamos a continuación uno de los modelos más interesantes, resultante luego de la implementación de la estrategia. En este modelo los estudiantes tuvieron en cuenta dos casos: el primero trata la situación del cono doble cuando los rieles no presentan inclinación alguna en relación con la superficie horizontal, y el segundo caso toma en cuenta los cambios que ocurren en el sistema, cuando los rieles están inclinados un cierto ángulo respecto a la horizontal. De esta forma se muestra cómo los educandos partían del caso simple para ir avanzando poco a poco hacia el más complejo.

##### A. Rieles en posición horizontal

Cuando los rieles están dispuestos horizontalmente y el cono doble se ubica en la zona más angosta del carril, los educandos observaron que en esta posición el cono se encuentra en equilibrio inestable, ya que su centro de gravedad está elevado con respecto a la horizontal y su área de apoyo es relativamente pequeña (figura 2, a).

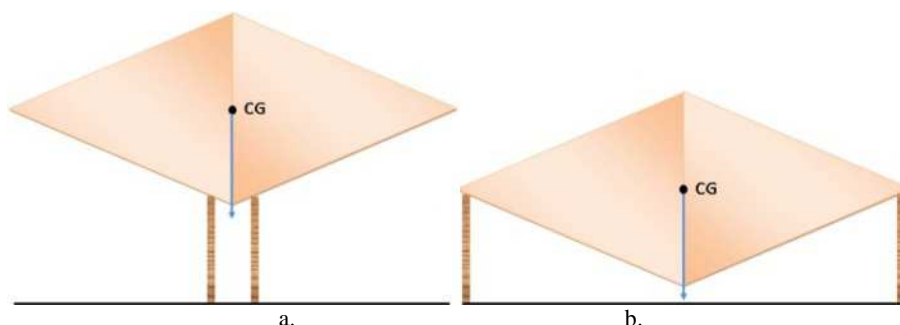
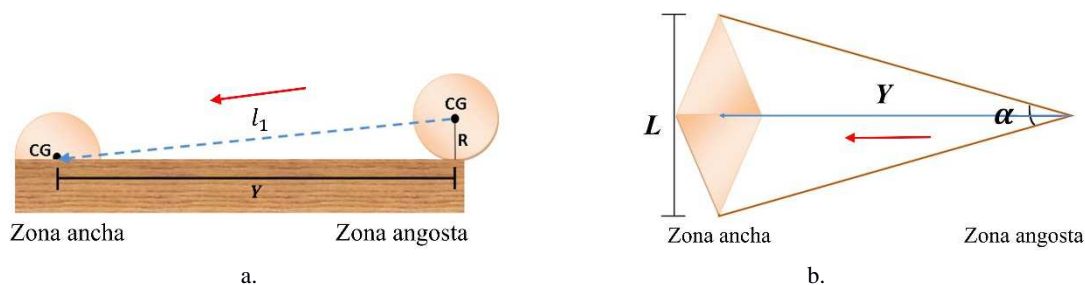


FIGURA 2. Vista frontal del montaje. a. En la zona angosta de los rieles, el cono se encuentra en equilibrio inestable; b. En la zona ancha de los rieles, el cono doble está en equilibrio estable.

Debido a esto, cualquier vibración, impulso o corriente de aire por pequeña que sea, saca al centro de gravedad del cono doble de esta posición, haciéndolo rodar por los rieles, ocasionando una disminución de su energía potencial y por ende un aumento de su energía cinética. Por lo anterior el cono alcanza la zona más ancha del riel donde su centro de gravedad reduce la altura y el área de apoyo del mismo se hace considerablemente mayor (figura 2, b).

En este momento los educandos percibieron que el cono entra en equilibrio estable, ya que cualquier movimiento hace que su centro de gravedad suba, aumentando su energía potencial. Si se aprecia la

situación desde una perspectiva lateral, se puede observar mejor cómo es el movimiento de caída del centro de gravedad del cuerpo (figura 3, a).



**FIGURA 3.**a. Vista lateral; y b. vista superior del montaje cuando no tiene inclinación. La flecha roja indica la dirección del movimiento del cono doble.

En este caso, los estudiantes mostraron que la altura a la que se encuentra el centro de gravedad del cono doble corresponde al radio del mismo, es decir,  $aR$ , con una distancia total recorrida denotada por  $l_1$ . Por otro lado la distancia recorrida por el cono doble en conjunto, denotada por  $Y$ , depende del ángulo de abertura de los rieles ( $\alpha$ ) y de la longitud del cono doble ( $L$ ). Observando el montaje desde arriba, se logra ver mejor esta dependencia (figura 3, b), la cual está dada por:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L/2}{Y}$$

$$Y = \frac{L}{2} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

Por consiguiente, la distancia  $l_1$  que recorre el centro de gravedad fue calculada por los educandos usando el teorema de Pitágoras:

$$l_1^2 = Y^2 + R^2$$

$$l_1^2 = \frac{L^2}{4} \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + R^2 \quad (2)$$

El cono utilizado en la experiencia tenía un radio de  $R = 1,4 \text{ cm}$ , una longitud de  $L = 7,7 \text{ cm}$ , y un ángulo de abertura entre los rieles equivalente a  $\alpha = 26^\circ$ . De acuerdo a lo anterior y según el modelo propuesto, las distancias  $Y$  y  $l_1$ , vienen dadas por los siguientes valores:

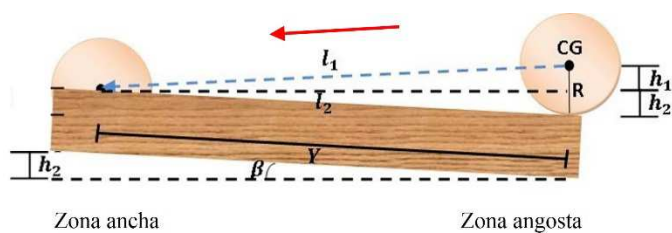
$$Y = \frac{7,7 \text{ cm}}{2} \cot(13^\circ) \approx 16,7 \text{ cm}$$

$$l_1 = \sqrt{Y^2 + R^2} \approx \sqrt{(16,7 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2} \approx 16,8 \text{ cm}$$

No obstante, se puede generalizar esta relación para cuando los rieles se encuentran inclinados con respecto a la horizontal.

### B. Rieles inclinados un ángulo $\beta$

Al inclinar los rieles un pequeño ángulo  $\beta$  con respecto a la horizontal, los educandos establecieron que el centro de gravedad (CG) se eleva inicialmente una altura  $h_1$  cuando está en la zona angosta de los rieles. A dicha altura la tomaron en relación con la posición del CG cuando alcanza la zona más ancha de los rieles al finalizar su movimiento. Por su parte los rieles estarán a una altura  $h_2$  en su zona más ancha, con respecto al suelo, debido al ángulo de inclinación  $\beta$  (figura 4).



**FIGURA 4.** Vista lateral del montaje cuando está inclinado ligeramente. Las líneas negras punteadas son paralelas a la horizontal y la flecha roja indica la dirección de desplazamiento del cono.

Observando el montaje lateralmente, se ve que  $h_1 = R - h_2$ , donde la altura de los rieles estará determinada por:

$$h_2 = Y \sin \beta$$

$$h_2 = \frac{L}{2} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \beta \quad (3)$$

En este sentido, los educandos encontraron que la longitud  $l_2$  será:

$$l_2 = Y \cos \beta$$

$$l_2 = \frac{L}{2} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \beta \quad (4)$$

Y la distancia recorrida por el centro de gravedad será:

$$l_1^2 = l_2^2 + (R - h_2)^2 \quad (5)$$

Los estudiantes percibieron que a medida que el ángulo de inclinación aumenta, la longitud que recorre el centro de gravedad del cono va disminuyendo hasta que no le es posible moverse hacia la zona de mayor abertura de los rieles, quedándose en la zona angosta, por consiguiente, si la altura  $h_2$  es mayor que el radio  $R$ , el cono doble ya no “asciende”. En este sentido, los educandos hallaron que el ángulo crítico para el cual el cono doble ya no se desplaza hasta la parte más ancha, se presenta cuando la altura  $h_1$  se hace igual a cero, es decir, cuando  $h_2 = R$ , por consiguiente:

$$\frac{L}{2} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \beta = R$$

$$\sin \beta = \frac{2 R \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{L}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left[ 2 R \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) L^{-1} \right] \quad (6)$$

Si se toma el ángulo de abertura de los rieles como  $\alpha = 26^\circ$ , el radio del cono doble como  $R = 1,4 \text{ cm}$  y la longitud del mismo como  $L = 7,7 \text{ cm}$ , se obtiene el ángulo crítico para el cual ya no hay “ascenso”, este viene dado por:

$$\beta = \sin^{-1} \left[ \frac{2(1,4 \text{ cm}) \tan(13^\circ)}{7,7 \text{ cm}} \right] \approx 4,8^\circ$$

Por encima de este valor, el cono ya no puede desplazarse hacia la zona ancha de los rieles. Por otro lado, la longitud que recorre el centro de gravedad del cono doble, en estas condiciones es:

$$l_1 = \sqrt{l_2^2 + (R - h_2)^2} = \sqrt{(16,6 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm} - 1,4 \text{ cm})^2} \approx 16,6 \text{ cm}$$

Los resultados obtenidos aquí fueron consistentes con los encontrados durante la experiencia.

**C. Variación de la energía mecánica del cono doble**

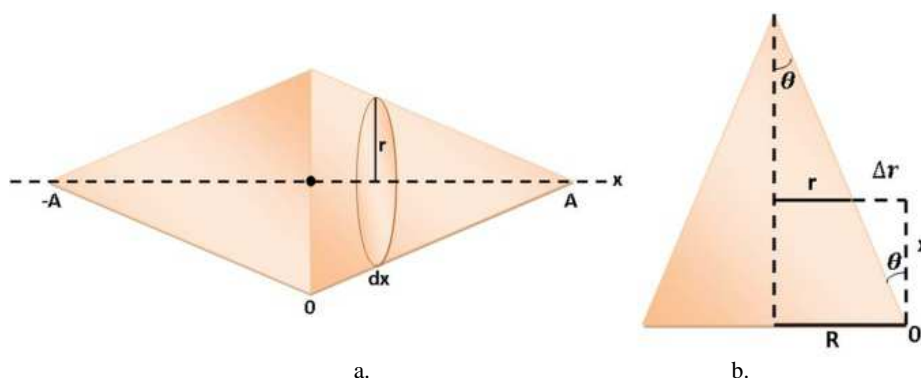
Cuando los estudiantes analizaron cómo es la variación de la energía mecánica del cono doble, a medida que se va trasladando por los rieles, percibieron que el movimiento del cono doble debe tratarse como una combinación de un movimiento de traslación del centro de gravedad y uno de rotación en torno al eje que pasa por dicho centro, ya que el cono doble rueda mas no resbala durante su traslación.

De este modo encontraron que una característica importante de los cuerpos que ruedan sin deslizar por un plano inclinado, es que los puntos de contacto entre el plano y la superficie del cuerpo, definen una línea que se encuentra instantáneamente en reposo llamada eje instantáneo (Resnick y Halliday, 1971). Dado que la fuerza de roce entre el plano y el cuerpo, actúa en dichos puntos de contacto, el rozamiento no realiza trabajo. Por lo tanto, cuando el cono doble rueda sin deslizar sobre los rieles, se puede considerar que la energía mecánica se conserva. En este sentido, por el principio de conservación de la energía mecánica los estudiantes llegaron a que:

$$Mgh_1 = \frac{1}{2} Mv_{CG}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (7)$$

En donde  $M$  es la masa del cono doble,  $I$  es su inercia rotacional,  $v_{CG}$  es la velocidad del centro de gravedad del cono doble y  $\omega$  es el módulo de la velocidad angular con la que éste rueda. Para calcular la inercia rotacional de forma más fácil, los estudiantes calcularon en primera instancia la inercia rotacional de medio cono doble, es decir, la inercia de un cono convencional de altura  $A = L/2$ .

Para ello, los educandos dividieron el cono doble en dos e integraron desde  $-A$  hasta cero y de cero hasta  $A$ , considerando un diferencial de volumen en forma de disco, cuyo radio era  $r$  y cuyo espesor era  $dx$  (figura 5, a). Luego integraron todos los diferenciales de volumen a lo largo del cono para encontrar su inercia rotacional.



**FIGURA 5.** a. Para determinar la inercia rotacional del cono doble, se encontró la inercia rotacional de cada cono que lo integra; b. Mitad del cono doble usada para determinar el valor de  $r$ .

De esta forma, tomando  $\theta$  como el ángulo de abertura del cono, los estudiantes observaron que de acuerdo a la geometría del sistema, surge un  $\Delta r$  en la parte exterior del mismo (figura 5, b), con el cual es posible determinar cómo varía el radio  $r$  del diferencial de volumen. Así los estudiantes encontraron que  $\Delta r = R - r = x \tan \theta$  y de esta relación dedujeron que para cuando  $x = A$  entonces  $r = 0$ , obteniéndose que:

$$R = A \tan \theta \quad (8)$$

Del mismo modo, si  $x = -A$  entonces  $R = -A \tan \theta$ . Por ende, para el caso en el que consideraron sólo medio cono encontraron que:

$$r = R - x \tan \theta = A \tan \theta - x \tan \theta = (A - x) \tan \theta$$

En este sentido, los estudiantes asociaron a cada disco un diferencial de masa dado por  $dm = \rho dV$ , siendo  $dV$  su diferencial de volumen equivalente a  $dV = \pi r^2 dx$  y  $\rho$  su densidad volumétrica tomada como constante. Debido a que la inercia rotacional se define matemáticamente como  $I = \int r^2 dm$  y considerando un cono macizo, no hueco, los educandos tuvieron en cuenta además la inercia rotacional de



cada disco, la cual corresponde a un diferencial de la inercia rotacional del cono ( $dI_c$ ) el cual equivale a  $dI_c = r^2 dm/2$ . En este sentido los educandos llegaron a la siguiente expresión:

$$I_c = \frac{1}{2} \int r^2 \rho dV = \frac{\rho\pi}{2} \int r^4 dx$$

$$I_c = \frac{\rho\pi}{2} \int_0^A [(A-x) \tan \theta]^4 dx$$

$$I_c = \frac{\rho\pi}{2} \tan^4 \theta \int_0^A (A-x)^4 dx$$

$$I_c = \frac{1}{10} \rho\pi A^5 \tan^4 \theta \quad (9)$$

Aplicando el mismo procedimiento matemático para la otra mitad del cono doble y sumando las dos integrales, los estudiantes encontraron que la inercia rotacional de todo el cono doble está dada por:

$$I = \frac{1}{5} \rho\pi A^5 \tan^4 \theta \quad (10)$$

Los estudiantes también establecieron que el volumen total del cuerpo  $V$ , equivaldrá al doble del volumen de un solo cono:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 A$$

Luego, la masa total del cono doble,  $M$ , será el doble de la masa de un solo cono,  $m$ , ( $M = 2m$ ), por ende:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 A}$$

y reemplazando tanto la expresión anterior como la ecuación (8) en la igualdad (10), los estudiantes obtuvieron la inercia rotacional del cono doble:

$$I = \frac{3m}{5R^2} A^4 \tan^4 \theta$$

$$I = \frac{3}{5} m (A^2 \tan^2 \theta)$$

$$I = \frac{3}{5} m R^2 \quad (11)$$

Nótese que la inercia rotacional del cono doble, depende tanto de su radio como de la masa de un solo cono. Finalmente, los estudiantes haciendo uso de la conservación de la energía mecánica, calcularon el módulo de la velocidad final alcanzada por el centro de gravedad del cono doble, teniendo en cuenta para ello que  $\omega = v_{CG}/R$ , asumiendo que el cono doble rueda sin deslizar, pues de lo contrario la velocidad tangencial ( $v = \omega R$ ) sería distinta a la velocidad del centro de gravedad,  $v_{CG}$  (Resnick y Halliday, 1971). Así los educandos obtuvieron que:

$$(2m)gh_1 = \frac{1}{2}(2m)v_{CG}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_{CG}}{R}\right)^2$$

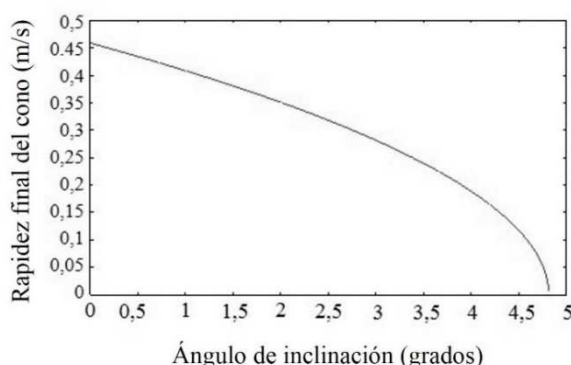
$$v_{CG} = \sqrt{\frac{20}{13}gh_1} \quad (12)$$

Esta ecuación nos permite apreciar que, como era de esperarse, la rapidez del centro de gravedad del cono doble ascendente bajo estas condiciones es menor que la rapidez alcanzada por el mismo cono al deslizarse sin rodar ( $v_{CG} = \sqrt{2gh_1}$ ), debido a que la energía potencial inicial es transformada no solo en energía cinética de traslación, sino también en energía de rotación, reduciendo así la contribución de la energía cinética y con ello la velocidad con la que llega el cono doble al final de su recorrido.

#### D. Resultados con el código en C++

Con base en lo anterior, los estudiantes elaboraron un código en lenguaje de programación C++ que calcula el módulo de las velocidades finales del centro de gravedad del cono doble para los diferentes ángulos de inclinación de los rieles. De esta forma obtuvieron una gráfica que muestra cómo cambia el valor de dicha velocidad final, si se aumenta el ángulo de inclinación  $\beta$ , quedando en reposo cuando alcanza el ángulo crítico ( $4,8^\circ$ ) (figura 6).

En dicha gráfica se observa cómo disminuye el módulo de la velocidad final del centro de gravedad (C.G.) del cono doble, a medida que aumenta el ángulo de inclinación, como era de esperarse según los argumentos expuestos con antelación, ya que cuando el ángulo de inclinación aumenta, la distancia que recorre el cono doble es menor por efecto de la fuerza de gravedad que actúa sobre él. Nótese que cerca del ángulo crítico, la rapidez con la que se desplaza el centro de gravedad disminuye más rápido que en los demás casos.



**FIGURA 6.** Variación de la rapidez final del centro de gravedad del cono doble (en m/s) en relación al ángulo de inclinación de los rieles (en grados). El ángulo crítico para el cual el cono doble no se mueve, es de  $4,8^\circ$  para este caso.

El código no sólo muestra al usuario el ángulo crítico de inclinación para los rieles, sino que también ofrece otro tipo de información como la distancia recorrida por el cono doble sobre los rieles. En este sentido, los estudiantes podían cambiar los parámetros fácilmente y ajustar el programa para cualquier situación de interés.

## V. APORTES A LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Cuando se logra motivar a los estudiantes en torno al estudio de un fenómeno en particular, se genera un escenario propicio donde se despliegan múltiples posibilidades para la enseñanza. Tales posibilidades se acrecientan siempre y cuando el docente logre conjugar las herramientas más sencillas de las cuales dispone, procurando espacios de discusión e interacción entre los individuos.

Entre las herramientas que el docente de física puede utilizar para optimizar su labor docente, destacamos: los experimentos discrepantes, los modelos como alternativas de resolución de problemas y la implementación del ordenador junto con los lenguajes de programación.

### A. Experimentos Discrepantes

Cuando se hace uso de los ExD como una estrategia educativa, entran en juego un sinnúmero de posibilidades para la enseñanza de la física que pueden ser aprovechadas por el docente, quien tiene como papel principal ser la guía del proceso, sin apresurarse a dar una respuesta definitiva, por el contrario debe ser él quien fomente el proceso de búsqueda de explicaciones por parte de los educandos, planteando

nuevas preguntas y exigiendo la búsqueda de respuestas, como se plantea desde el enfoque de la enseñanza de las ciencias por investigación dirigida (Pozo y Gómez Crespo, 1997).

Además, los ExD ayudan a dinamizar las clases, ya que se salen de la metodología impuesta por la enseñanza tradicional, reducida al papel activo del maestro y a la inactividad de los estudiantes. Con ello la enseñanza de las ciencias se traslada a un escenario donde la intervención de éstos últimos adquiere un papel protagónico y activo, fortaleciendo el trabajo en grupo, la retroalimentación y el intercambio de ideas (Guarín y Moreno, 2010).

La experimentación se constituye de este modo en la antesala más pertinente al momento de llevar una temática específica al aula, dado que a partir de la evidencia tangible y/o sensible de los fenómenos, es mucho más sencillo llegar a una formalización coherente y significativa de los mismos (Guarín y Moreno, 2010).

## **B. Los modelos como rutas de explicación**

El ExD y su modelación, como en el caso del cono doble ascendente presentado aquí, inducen en el estudiante la necesidad de construir más conocimiento sobre el fenómeno de estudio, siguiendo un proceso de descripción, explicación y predicción, en el que inicialmente los estudiantes tratan de describir aquello que observan (el movimiento “ascendente” del cono por ejemplo), aunque esta descripción es mayormente cualitativa y está relacionada con una primera organización del evento observado. Luego intentan dar una explicación al fenómeno, ligando los sucesos acaecidos al accionar el experimento, con los conocimientos que poseen. Por lo general los estudiantes no tardan mucho en descubrir que las explicaciones dadas no se corresponden con lo que ocurre. Ello precisamente introduce la exigencia de generar nuevas explicaciones basadas en una observación más detallada y en la búsqueda de información en fuentes confiables.

Aquí es donde el estudiante comienza a relacionar variables, conceptos y a establecer patrones de comportamiento que permanecen inalterados, a menos que se introduzcan cambios en las variables, como variaciones en la longitud de los rieles, en el ángulo de apertura de los mismos, en el ángulo de inclinación o en las características del cono doble. En este momento se inicia un proceso de formalización del fenómeno, conjugando las observaciones con los fundamentos teóricos hasta que el estudiante logra hacer predicciones sobre lo que sucederá con el experimento, como se aprecia con las gráficas obtenidas por ellos con ayuda del código numérico.

El resultado de este proceso es un modelo que actúa como intermediario entre el individuo y su mundo, posibilitando su comprensión, su interpretación y su actuación en él (Johnson-Laird, 1996). Sin embargo, cabe aclarar que tales modelos sólo son aproximaciones parciales de lo observado, es decir, no ofrecen una visión completa e infalible de la naturaleza de los fenómenos estudiados, pues nunca logran considerar todas las interacciones que determinan la situación espacio-temporal del suceso. De esta manera, un modelo podrá representar con mayor fidelidad un determinado fenómeno si, aparte de ser sencillo en la explicación del suceso (Chamizo, 2003), también arroja resultados cercanos a lo observado.

## **C. El uso de herramientas virtuales**

Finalmente resaltamos el importante papel de las nuevas tecnologías en el diseño de estrategias educativas, ya que con ellas es posible conjugar el desarrollo del contenido curricular con algunos recursos multimedia, a fin de superar ciertas dificultades de aprendizaje (Guarín y Moreno, 2012; Pérez, 2009).

Así, por ejemplo, resulta más conveniente desde el punto de vista didáctico abordar de forma simultánea en las clases de física el lenguaje de programación y los métodos de cálculo numérico comunes, para lograr solucionar los problemas que surgen en el análisis del fenómeno físico o del ExD. De esta forma el estudiante no solo aprende el lenguaje de programación, sino que además conoce más de cerca el comportamiento del sistema físico. Cabe anotar que no es preciso conocer todos los detalles de un lenguaje de programación particular, basta con estar familiarizado con la parte algebraica de los mismos: los tipos básicos de datos, las operaciones y las sentencias iterativas y de control del flujo, etc. (Anzualdo, 2010).

Sin embargo, las herramientas de programación son sólo una alternativa entre muchas otras que facilitan el análisis de problemas físicos. En nuestro caso adquirió gran importancia, ya que el uso del ordenador apoyó los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, al liberar los contenidos abordados de los complejos desarrollos analíticos, para permitir así el estudio del cono doble ascendente de una forma más concreta y dinámica (Anzualdo, 2010).

## VII. CONCLUSIONES

La inmersión de los ExD en el aula de clases de acuerdo a lo anterior, contribuye a la organización de diferentes fenómenos al manifestar situaciones contra-intuitivas, que instan a los estudiantes a sumergirse en el ámbito disciplinar, dando paso a la creación de rutas explicativas que les permiten comprender a fondo lo que observan. Dichas rutas favorecen la formalización del fenómeno, lo que necesariamente se traduce en la creación de modelos explicativos, los cuales ayudan al estudiante a elaborar una comprensión nunca antes lograda, con cuerpos de conocimiento más robustos y estructurados.

La traducción de estos modelos a otro lenguaje como el lenguaje de programación por ejemplo, le permite al estudiante ser más detallado en el planteamiento matemático, ya que puede percatarse de aspectos que generalmente se pasan por alto cuando se lleva a cabo el proceso matemático habitual. Asimismo, el lenguaje de programación facilita cálculos posteriores, pues con solo algunos cambios en los parámetros, se pueden hacer nuevos análisis a partir de las representaciones gráficas obtenidas.

En este sentido, el presente trabajo se convierte entonces en un proceso de modelación satisfactorio, pues los estudiantes a través de él, lograron reproducir las características esenciales del ExD, mediante un procedimiento matemático sencillo. Del mismo modo, el análisis geométrico conllevó a una descripción física de la dinámica del cono doble ascendente, que impulsó la comprensión del fenómeno y de los conceptos que se encuentran a la base de la situación.

Promover en los estudiantes la necesidad de generar modelos explicativos en torno al análisis de ciertos fenómenos, resulta ser de esta manera una estrategia prometedora, ya que los incentiva hacia la comprensión de los mismos, ampliando, reestructurando y resignificando sus conocimientos y por tanto su forma de apreciar el mundo físico.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos enormemente a los profesores Néstor Méndez Hincapié y José Orlando Organista del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), por sus grandes enseñanzas y su valiosa orientación y colaboración, tanto en el acercamiento al fenómeno como en la construcción y desarrollo del modelo físico. Asimismo agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional y al Departamento de Física, por facilitarnos las aulas y los laboratorios indispensables para el desarrollo de la propuesta.

## REFERENCIAS

Anzualdo, G. T. (2010). *La Enseñanza de la Física*. Recuperado en septiembre de 2013, de Universidad Nacional de Ingeniería:

[http://fiisvirtual.uni.edu.pe/wpcontent/uploads/2010/09/La\\_ensenanza\\_dela\\_fisica\\_\\_2.pdf](http://fiisvirtual.uni.edu.pe/wpcontent/uploads/2010/09/La_ensenanza_dela_fisica__2.pdf)

Ayala, M., Malagón, J. y Romero, A. (2008). *Los Procesos de Formalización y el Papel de la Experiencia en la Construcción del Conocimiento Sobre los Fenómenos Físicos*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Barbosa, L. H. (2008). Los Experimentos Discrepantes en el Aprendizaje Activo de la Física. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(3), pp. 246-252.

Barbosa, L. H. (2009). Los Experimentos Discrepantes Como Instrumento Mediador en el Desarrollo de la Intuición Física. *4º Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias*. Bogotá: Revista Tecné, Episteme y Didaxis.

Chamizo, F. (2003). *Modelización II: Un Pase de Modelos*. Recuperado en Abril de 2014, de Universidad Autónoma de Madrid: <http://www.uam.es/fernando.chamizo>

Díez, J. y Moulines, U. (1999). *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*. Barcelona: Ariel.

Edelson, D. C. y Reiser, B. J. (2006). Making Authentic Practices Accessible to Learners. En: Sawyer, R. K.: *The Cambridge Handbook of the Learning Science*. Inglaterra: Cambridge University Press.

- Ghandi, S. C. y Efthimiou, C. (2005). The ascending double cone: A closer look at a familiar demonstration. *European Journal of Physics*, 26, pp. 681-694.
- Guarin, E. D. y Moreno, H. (2010). Nociones cuánticas en la escuela secundaria: un estudio de caso. *Latin-American Journal of Physics Education*, 4(3), pp. 669-676.
- Guarín, E. D. y Moreno, H. (2012). La modelación y las visualizaciones computarizadas en la Enseñanza de la Física. *Revista Nodos y Nudos*, 4(33), pp. 49-61.
- Johnson-Laird, P. N. (1996). Images, Models and Propositional Representations. En: De Vega, M. et al: *Models of Visuospatial Cognition*. Inglaterra: Oxford University Press.
- Pérez, C. (2009). El método de modelamiento y su integración con recursos tecnológicos para una aproximación constructivista al aprendizaje de conceptos de cinemática. *4º Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias*. Bogotá: Revista Tecné, Episteme y Didaxis.
- Pozo, J. I. y Gómez Crespo, M. A. (1997). Enfoques para la enseñanza de la ciencia. En: Pozo, J.I., y Gómez Crespo, M. A.: *Teorías cognitivas del aprendizaje*. España: Ed. Morata.
- Raviolo, A. (2009). Modelos, Analogías y Metáforas en la Enseñanza de la Química. *Educación Química*, 20(1), pp. 55-60.
- Resnick, R. y Halliday, D. (1971). *Física parte I*. Barcelona: CECSA.
- Vásquez, A. O. (2007). *Doble cono*. Recuperado el Febrero de 2014, de Física Sorprendente: <http://fiscasorprendente.blogspot.com/>
- Veit, E. A. y Teodoro, V. D. (2002). Modelagem no ensino/Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(2), pp. 87-96.