

Propuesta experimental para el estudio de sistemas caóticos de tipo pozo doble

María Llera¹, Andrés Sartarelli²

¹Instituto de Ciencias. Universidad Nacional de General Sarmiento. Juan María Gutiérrez 1150. Los Polvorines. Buenos Aires. Argentina.

²Instituto de desarrollo humano. Universidad Nacional de General Sarmiento, Juan María Gutiérrez 1150. Los Polvorines. Buenos Aires. Argentina.

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

E-mail: mllera@ungs.edu.ar

Resumen

La palabra caos nos trae a la mente fenómenos aleatorios, fenómenos que no están regidos por ningún determinismo posible. Pero, a diferencia de esta idea intuitiva, en física el caos implica cierto grado de orden. El caos se manifiesta en una infinidad de fenómenos: sistemas no lineales con pocos grados de libertad pueden presentar soluciones difíciles de interpretar. En general los procesos caóticos requieren de un análisis muy complejo, donde las expresiones matemáticas tienden a volverse la principal dificultad a la hora de comprender "la física" contenida en el fenómeno. En este trabajo se presenta la elaboración de un dispositivo sencillo que permite, por medio del análisis y el procesamiento de datos, comprender y visualizar algunas de las características de los procesos caóticos. La experiencia está ideada para estudiantes del último año del ciclo medio con una orientación en ciencias naturales, o para estudiantes de profesorado.

Palabras clave: Caos, Potencial, Datos, Grados de libertad, Fenómenos complejos.

Abstract

The word chaos makes us think about random phenomena, which are not ruled by any possible determinism. However, unlike this intuitive idea, chaos involves order to a certain degree. Chaos appears in countless phenomena: nonlinear systems with a few degrees of freedom can bring solutions which are difficult to interpret. Generally, chaotic processes require a complex analysis, in which the mathematical expressions tend to become the main difficulty to understand the physics contained in the phenomenon. The development of a simple device that allows us to understand and visualize some of the characteristics of chaotic processes through the analysis of data processing is presented in this work. The idea is designed for secondary school students with natural science focus, or for teachers' training college students.

Keywords: Chaos, Potential data, Degrees of freedom, Complex phenomena.

I. INTRODUCCIÓN

El caos se entiende como la ausencia de orden, en esta ausencia de orden sería muy difícil para la física elaborar hipótesis para poder predecir sucesos futuros. La palabra caos nos trae a la mente un fenómeno completamente aleatorio, algo que básicamente no está regido por ningún determinismo posible.

Pero a diferencia de lo que pensamos el caos de la física contiene cierto grado de orden. Estos fenómenos se manifiestan en una infinidad de fenómenos, así por ejemplo: sistemas no-lineales con pocos grados de libertad pueden ser caóticos y mostrarse muy complejos. Es decir, parte de la complejidad del mundo real puede tener un origen sencillo. El objetivo del presente trabajo es enfrentar al estudiante con sistemas sencillos que presentan, sin embargo, soluciones caóticas. Los sistemas son resueltos de forma numérica. De esta manera se intentan introducir conceptos tales como: atractores extraños, fractalidad, bifurcación etc. La propuesta está destinada a estudiantes que transitan los primeros años de carreras vinculadas a la física, profesores o estudiantes del último año de estudio.

II. FUNDAMENTACIÓN

El caos es muy popular en frases comunes que vulgarmente utilizamos para referirnos a fenómenos en aparente desorden o que son aleatorios, pero el significado físico de estas frases pocas veces se conoce, incluso dentro del área de la física es un tema que siempre está relacionado con temas avanzados donde predomina la complejidad matemática por sobre los conceptos o la visualización de los fenómenos físicos.

Comprender un fenómeno físico implica armarse un modelo mental que describa el fenómeno, “llevarlo a algo conocido”. Para esto son esenciales las prácticas de laboratorio, es en este tipo de prácticas donde los estudiantes elaboran esquemas mentales que usan de herramienta para resolver problemas, predecir fenómenos y comprender conceptos. Por eso es fundamental el uso de prácticas de laboratorio en los diferentes niveles cognitivos de los estudiantes (incluyendo los temas más avanzados).

La característica principal de los sistemas caóticos es que una pequeña variación en la condición inicial produce un desequilibrio difícil de predecir (aclaremos que difícil no es imposible). Esta dependencia sensible a los factores condicionantes hace que sea complicado presentar prácticas de laboratorio sencillas e ilustrativas, que puedan ser elaboradas en cualquier laboratorio de física, y que impliquen realizar mediciones para realizar el posterior análisis de datos. Muchas de las propuestas para trabajar experimentalmente en torno a esto es utilizando dispositivos electrónicos que requieren conocimientos previos de electrónica. Hodson (1989) indica que la importancia del laboratorio radica en ser un espacio atrayente para el alumno donde aumentan las interacciones y se actúa libremente. Pensando en esto es que organizamos una práctica donde les facilitaremos a los estudiantes el material y ellos serán los que, a través de la indagación tendrán que elaborar estrategias para cumplir con los objetivos. Para esto tendrán que elaborar estrategias e hipótesis de trabajo sobre el material de laboratorio entregado por los docentes y buscar las configuraciones más convenientes.

II. OBJETIVOS

OBJETIVOS PRINCIPALES

- Visualizar en forma sencilla fenómenos relacionados con la dinámica de sistemas complejos.
- Realizar una práctica de laboratorio donde a partir del trabajo cuanti y cualitativo se puedan visualizar fenómenos ligados al concepto de caos, atractores, bifurcación.
- Trasladar la terminología de sistemas complejos a temas simples donde se ejemplificar y visualizar desde experiencias cotidianas.

OBJETIVOS SECUNDARIOS.

- Comprender la importancia del cálculo numérico para el análisis de sistemas dinámicos complejos.
- Realizar análisis de datos obtenidos experimentalmente.
- Implementar las mediciones realizadas de manera de guardar un compromiso entre precisión y sencillez, con el fin de que el proceso resulte comprensible y reproduzca adecuadamente los valores experimentales obtenidos.

III. SISTEMAS DINAMICOS NO LINEALES, UN POCO DE HISTORIA.

Henri Poincaré fue uno de los primeros en plantear características de los sistemas dinámicos no lineales. En las últimas décadas los innumerables avances en la industria informática permitieron aumentar la capacidad de cómputo hasta obtener aproximaciones tan precisas que los errores muchas veces se vuelven despreciables. Estas facilidades que brinda el avance de la informática fue la puerta de acceso a el estudio de fenómenos hasta el momento casi imposibles de predecir, dando lugar a una nueva forma de trabajo científico, el trabajo interdisciplinario. Comienza una búsqueda de leyes comunes entre diferentes sistemas de estudio que reúne múltiple disciplinas con los más variados resultados. La ruta que comenzó a trazar Poincaré con algunas ecuaciones diferenciales no lineales estuvo inexplorada por casi medio siglo por falta de recursos informáticos que le permitan continuar sus cálculos. Luego, la tecnología y sobre todo la informática permitieron que otros continúen sus avances. Ilya Prigogine centro su trabajo en “estructuras disipativas” en procesos lejos del equilibrio. Brian Goodwin realizó trabajos sobre la evolución y el desarrollo abriendo nuevas perspectivas al área de la biología. Doyne Farmer, venció las ruletas de los casinos de Las Vegas con ayuda de una ecuación diferencial no lineal. Se sucedieron múltiples investigaciones en torno a variados temas. Desde movimientos complejos hasta procesos atmosféricos en torno al clima. Entre los más importantes precursores de estudios de sistemas dinámicos complejos aplicados a la atmósfera se encuentra Edward Lorenz quien uso ecuaciones diferenciales para

modelar fluidos bajo un gradiente térmico, hoy en día sus ecuaciones continúan usándose para el modelado de sistemas atmosféricos.

Los sistemas dinámicos no lineales continúan haciendo importantes aportes a diferentes áreas de conocimiento, donde premia el trabajo multidisciplinario. Los avances en estudios de alta complejidad se proliferan desde la mecánica cuántica, pasando por la paleontología, la astronomía e incluso la medicina. Es un campo del saber con constantes aportes que se actualizan al compás de la tecnología que usamos.

III. CONCEPTOS INVOLUCRADOS EN ESTAS EXPERIENCIAS.

Varios estudios sobre la problemática del aprendizaje de las ciencias indican que las mayores dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la Física reside en el aprendizaje significativo de los conceptos. (Mc. Dermot, 1984; Driver, 1989; Vienot, 1996).

En particular los cursos sobre sistemas no dinámicos involucran avanzados conocimientos previos de ecuaciones diferenciales y un fuerte manejo del álgebra, la propuesta presentada involucra el análisis de diferentes conceptos intercalando lo conceptual con lo experimental pero sin necesitar destrezas matemáticas que impliquen sumar dificultades a las actividades pedidas.

La propuesta implica analizar puntos de equilibrio, se hace un breve repaso de oscilaciones, forzadas y libres para comprender la estabilidad de la configuración elaborada experimentalmente.

Solo se presentaran las ecuaciones dinámicas para los diferentes osciladores, permitiendo que aquellos que tengan más conocimientos matemáticos puedan profundizar sobre las ecuaciones. Además la propuesta facilita realizar el análisis energético de los distintos osciladores. Permitiendo esto más claridad a la hora de deducir la claridad de las diferentes tipos de estabilidades.

Además los gráficos obtenidos permiten analizar y calcular el exponente de Liapunov. Las diferencias en las condiciones iniciales permiten realizar un análisis del conocido “efecto mariposa”. Los atractores en un sistema dinámico y sus efectos. El análisis de los datos se realiza con un programa diseñado en el lenguaje de programación Matlab, no es necesario que los estudiantes posean conocimientos de cálculo numérico ya que pueden correr el programa solo introduciendo los datos obtenidos. Queda abierta la opción para quienes quieran reforzar en este aspecto, reformulando el código para otras experiencias o el estudio de otras variables. De esta forma el planteo metodológico de la propuesta queda abierto para que cada docente pueda adecuarla a las necesidades del grupo.

IV. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE DATOS.

Uno de los objetivos de la práctica es que los alumnos sean autónomos frente a los problemas experimentales presentados. Con este espíritu se facilita el material a los estudiantes junto al esquema del dispositivo. En la figura se muestra el esquema experimental del trabajo.

El dispositivo de la figura 1 consiste en una masa que se desliza sobre una pista con bajo rozamiento. Esta masa esta unida por dos resortes de iguales constantes elásticas “k”. Uno de los resortes están unidos al punto A y por el otro extremo al vibrador mecánico B. El vibrador es excitado por un generador de funciones que permite forzar al sistema con distintas frecuencias.

Adheridos al carrito se encuentran sendos imanes de neodimio I1 e I2 y por debajo de la pista se encuentran los cubos de hierro H1 y H2 tal cual se observa en el esquema de la figura. Se pueden ubicar los imanes y los cubos de hierro para generar un potencial de tipo pozo doble simétrico de manera tal que la posición central del carrito ($x=0$) corresponda a un punto de equilibrio inestable.

Además de todo esto se dispone de un dispositivo para medir la velocidad, posición y aceleración del carrito (sensor de movimiento-interface), en los casos de no poseer una interface para registrar estos datos, la configuración de trabajo presentada permite colocar un teléfono celular en la parte superior y coleccionar los datos con esta herramienta¹. Finalmente los datos deben exportarse a una pc para su posterior análisis.

La configuración del experimento permite visualizar que en ausencia de fuerzas $x=0$ es un punto de equilibrio estable. La presencia de los imanes produce dos fuerzas en torno al sistema que causan un desequilibrio haciendo que oscile entre dos puntos. El sistema ahora tendrá dos puntos de equilibrio estable, entre $-x_0$ y x_0 . En periodos cortos de tiempo, se puede considerar que la energía del sistema se mantiene constante. En este caso se puede realizar un diagrama de fases como en la figura 2.

¹ Los celulares con sistema ANDROID admiten descargar en forma gratuita un acelerómetro, de esta forma el celular puede utilizarse de Interface.



FIGURA 1. Foto del dispositivo en el mismo se muestran las configuraciones óptimas para el armado de la experiencia.

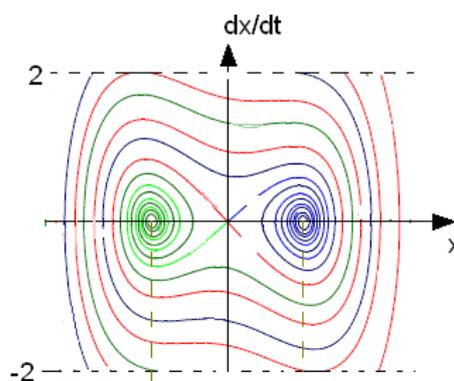


FIGURA 2: Diagramas sin forzar sometido a las fuerzas naturales (rozamiento con el aire).

La figura 2 muestra el diagrama de fases para un sistema sin forzar sometido a las fuerzas de rozamiento naturales del sistema (el aire y el roce del carrito con la pista). La zona central corresponde a un movimiento acotado en torno a alguno de los puntos de equilibrio estable que posee el sistema. La curva que pasa por el punto (0,0) es el caso particular en que la masa oscila en torno a un punto de equilibrio y pasa al otro con velocidad nula. Las diferentes curvas concéntricas externas son movimientos oscilatorios en torno a puntos de equilibrio pasando de un lado a otro con velocidad no nula. Las curvas cerradas son los llamados atractores clásicos o simples.

En la figura se puede observar la evolución del sistema libre, sin forzar gobernada por las fuerzas de rozamiento, de esta forma la energía del sistema ya no se conserva. Se observa como el sistema culmina su movimiento en el entorno de alguno de los puntos de equilibrio estable. Luego de oscilar un breve periodo, donde ya se disipa la solución transitoria el sistema oscila prácticamente sobre su posición de equilibrio (alguno de los dos atractores) hasta detenerse.

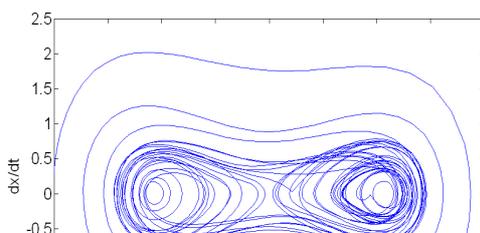


FIGURA 3. Diagrama de fases. Los parámetros utilizados son $A=0.25$, $\alpha =0.22$ y $\omega =1$.

La figura 3 muestra el caso de las oscilaciones forzadas sin despreciar el rozamiento. Se puede ver que una pequeña variación en las condiciones iniciales modifica íntegramente la evolución del sistema. Las figuras muestran como una pequeña variación de 0.02 en la condición inicial, sobre la amplitud del sistema produce una pluralidad de soluciones distintas. Los atractores que se producen bajo este fenómeno ya no son simples, son complejos y su estructura podría ser mucho más compleja. Estos son los atractores caóticos que caracterizan el este tipo de sistema.

Como venimos mostrando la dependencia con las condiciones iniciales es lo que caracteriza el tipo de movimiento que realizara el objeto de estudio, esto es distintivo del caos determinista. Cualquier variación por insignificante que parezca produce grandes modificaciones en la evolución del sistema.

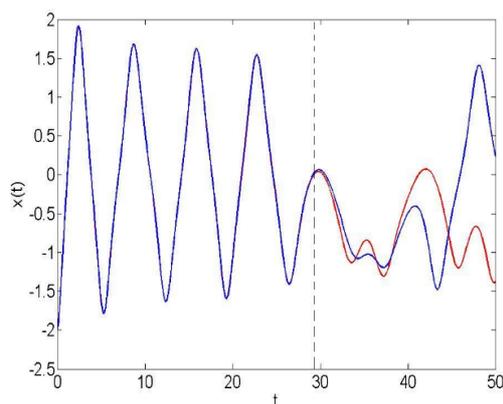


FIGURA 4. Posición en función del tiempo. Los parámetros utilizados en este diagrama de fases son $A=0.33$, $\alpha=0.22$, $\omega=1$

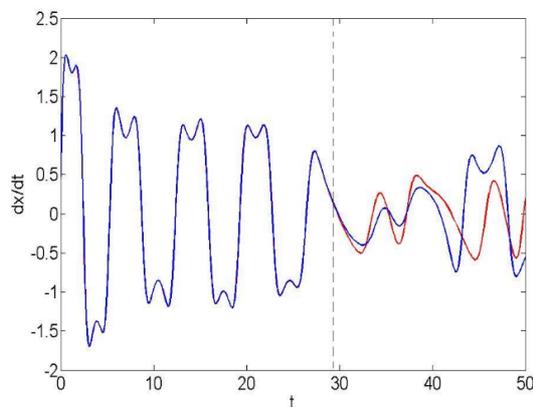


FIGURA 5. Velocidad en función del tiempo. Los parámetros utilizados en este diagrama de fases son $A=0.33$, $\alpha=0.22$, $\omega=1$

El comportamiento se mantiene análogo para la posición en función del tiempo y para el

grafico de velocidad en función del tiempo. Los dos gráficos están divididos por una línea punteada, ese es el tiempo en que el movimiento comienza a convertirse en caótico, el sistema comienza a diferenciarse notoriamente. Esta diferencia entre las soluciones crece conforme a la expresión matemática $e^{\lambda t}$, donde λ es el máximo exponente de Liapunov del sistema. Este coeficiente mide la diferencia entre soluciones a sistemas difíciles de predecir como el presentado. Este efecto, donde hay un fuerte vínculo entre las condiciones iniciales y la evolución del sistema se define como efecto mariposa.

Esta experiencia fue reproducida con un sexto año de una escuela secundaria, la propuesta fue bien aceptada por los alumnos que trabajaron generando dudas, debates, preguntas. La experiencia fue muy interesante, las dificultades presentadas rondaron en la configuración de imanes de manera de generar el doble pozo de potencial, pero el mecanismo de prueba y error permitió que puedan obtenerse resultados favorables de la experiencia realizada. A continuación mostramos algunos gráficos obtenidos por nuestros alumnos.

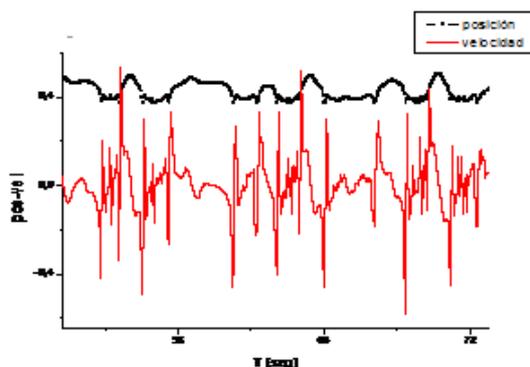


FIGURA 6. Posición en función del tiempo. Los datos fueron obtenidos a partir del acelerómetro de un teléfono celular.

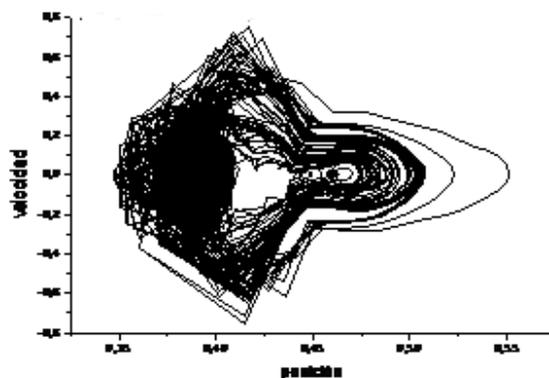


FIGURA 7. Velocidad en función del tiempo. Diagrama de fases para un oscilador forzado y con rozamiento.

V. CONCLUSIONES

La experiencia fue puesta a prueba en el nivel secundario y terciario siempre con resultados aceptables. Las dificultades presentadas por el equipo de laboratorio requerido fueron sorteadas utilizando otros tipos de recursos. La propuesta incluye la posibilidad de continuar un trabajo más formal presentando las ecuaciones y realizando un modelado numérico. En nuestra experiencia al analizar como primera medida los gráficos experimentales obtenidos esto da lugar a una serie de discusiones que motiva el interés de los alumnos y permite que se pueda continuar trabajando sobre el tema. Incluso esto motiva a involucrarse en el desarrollo del modelado matemático del problema.

Respecto del trabajo experimental la idea de presentar una actividad formal no pautada moviliza a los alumnos a encontrar por sí solo la mejor configuración del sistema de estudio. En este aspecto presentan

dificultades en torno a la distancia y ubicación de los imanes y las barras de hierro. Pero la puesta a prueba y error facilita el trabajo.

A futuro se plantea continuar el trabajo usando técnicas y configuraciones alternativas para capturar los datos.

REFERENCIAS

Hodson, D. (1989). Un enfoque más crítico del trabajo de laboratorio. *Investigación y experiencias didácticas*, pp. 299-313.

Fernandez, I., Gil Perez, D., Carrascosa, J., Cachapuz, A. y Praia, J. (2002). Visiones deformadas de la ciencia transmitidas por la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(3), pp. 477-488, España.

Pietracola, M. (1999). Construção e realidade: O realismo científico de Mario Bunge e o ensino de ciências a través de modelos. *Investigações em Ensino de Ciências*, 4(3), pp. 213-227, Brasil.