

# Movimiento amortiguado: Transición de sobreamortiguado a subamortiguado

REVISTA  
DE  
ENSEÑANZA  
DE LA  
FÍSICA

Ernesto Farías de la Torre<sup>1,2</sup>, Franco Zacco<sup>1</sup>, Guillermo Guzzo<sup>1</sup>, Nicolás Harambillet<sup>1</sup>, Diego Gonzalez Dondo<sup>1</sup>, Santiago Gelerstein<sup>1</sup>, Sergio Boglione<sup>1</sup>, David Novillo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende y Haya de la Torre, Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

E-mail: fariasdeltorre@gmail.com

## Resumen

Se propone la mejora de un equipo de dinámica unidimensional incorporando el movimiento amortiguado con fricción viscosa. Se utiliza, a tal fin, un mecanismo que permite una variación continua de la constante de amortiguamiento con lo cual se obtienen valores superiores e inferiores al coeficiente de amortiguamiento crítico. A partir de las mediciones posición-tiempo se determina el coeficiente de amortiguamiento para los distintos casos.

**Palabras clave:** Amortiguamiento, Viscoso, Coulomb, Sobreamortiguado, Subamortiguado.

## Abstract

Improved equipment 1-D dimensional dynamics is proposed incorporating the damped motion with viscous friction. Is used, for this propose, a mechanism that allows a continuous variation of the damping constant whereby the upper and lower critical damping. From measurements of the position-time relationship between the damping coefficient and the critical damping coefficient for different cases is obtained.

**Keywords:** Damping, Vacous, Coulomb, Overdamped, Underdamped.

## I. INTRODUCCIÓN

En los Trabajos Prácticos de Laboratorio (TPL) que se desarrollan en la asignatura de Física I correspondiente a las carreras de Ingeniería y, eventualmente, a las de Licenciatura en Física referidos a oscilaciones libres se abocan a la medición del periodo de oscilación y su comparación con el valor teóricamente esperado; haciendo referencia a la fricción seca o de Coulomb (Steidel, 1981) para explicar el decaimiento de amplitudes sucesivas. El TPL así planteado tiene su justificación por el hecho de que, como se analizará en el apartado **IV**, la fricción seca no afecta al periodo y, por ende a la frecuencia de oscilación natural del sistema. Esta situación no se cumple para el caso de oscilaciones con fricción viscosa (apartado **V**).

Un segundo aspecto a considerar es el referido a la asignatura Mecánica y otras relacionadas con la misma para las cuales una introducción sobre el tema de amortiguamiento viscoso reviste particular importancia. (Beer, Johnston, 2010).

## II. OBJETIVOS

Nuestra intención, con el presente Trabajo, es aportar elementos para un más completo desarrollo del TPL referido al tema en cuestión incorporando, específicamente, la fricción seca y la fricción viscosa.

Asimismo y, en relación a esta última, proponemos la instrumentación de un mecanismo que permita variar el coeficiente de amortiguamiento y así obtener los casos de sobreamortiguado y subamortiguado como así también realizar la medición del coeficiente de amortiguamiento (Beer & Johnston, 2010).

### III. METODOLOGIA

Los pasos para abordar el experimento son los siguientes: a) comprensión de la experiencia tradicional e incorporación a la misma del rozamiento seco (Coulomb) y viscoso con sus ecuaciones básicas b) introducción de las modificaciones necesarias para medir movimientos amortiguados. c) comprensión del sistema de medición utilizado (ultrasonido). d) realización del experimento.

### IV. FRICCIÓN SECA

#### A. Ecuaciones básicas

El análisis físico-matemático de la oscilación con fricción seca se realiza a partir de considerar los intervalos de tiempo en los cuales la velocidad ( $v$ ) no cambia de signo ya que la fuerza debida a la fricción seca se opone a aquella. Esto nos lleva a analizar el fenómeno a intervalos de semiperiodos (Steidel, 1981). La ecuación diferencial para el primer semiperiodo, con las condiciones iniciales que se establecen a continuación resulta ( $v < 0$ ):

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = \mu \cdot g \quad (0 \leq t \leq \frac{T_n}{2}) \tag{1}$$

donde,  $x(t)$  representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio estático;  $\omega_n$  es la frecuencia natural de oscilación,  $\omega_n = 2\pi/T_n$ ;  $T_n$ : periodo;  $\mu$ : coeficiente de fricción dinámica y  $g$ : aceleración local de la gravedad. Finalmente, debemos recordar la relación:  $\omega_n = (k/m)^{1/2}$  donde  $k$  es la constante de resorte (resultante del sistema de resortes) y  $m$  la masa del móvil.

Para los siguientes semiperiodos con velocidad negativa se satisface la misma ecuación diferencial; pero las condiciones iniciales deben analizarse para cada caso.

Por otra parte, para el segundo semiperiodo ( $v > 0$ ) como para los sucesivos semiperiodos pares, se tiene, como ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = -\mu \cdot g \quad (\frac{T_n}{2} \leq t \leq T_n) \tag{2}$$

Las condiciones iniciales que adoptamos para nuestra experiencia son las mas simples de lograr experimentalmente y con esto nos referimos a.

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \tag{4}$$

Donde se asume que, por simplicidad,  $x(0) > 0$ . Las soluciones de (1) y (2) resultan:

$$x_1(t) = (x_0 - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k}) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \tag{5}$$

$$x_2(t) = (-x_0 + \frac{2 \cdot \mu \cdot m \cdot g}{k}) \cdot \cos[\omega_n \cdot (t - \frac{T_n}{2})] - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \tag{6}$$

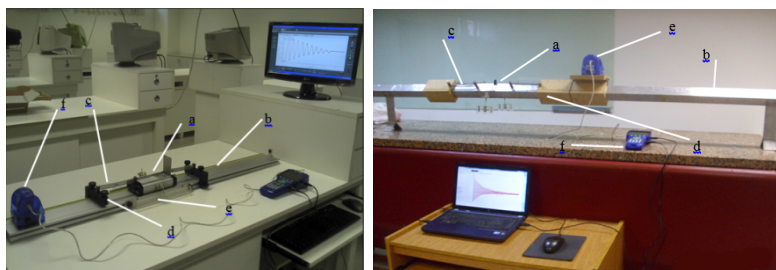
La solución para los siguientes semiperiodos debe plantearse eligiendo la ecuación diferencial adecuada conforme al signo que observe la velocidad en ese subintervalo.

Como se puede deducir de las ecuaciones anteriores, el efecto de la fricción seca atenúa las amplitudes sucesivas en forma lineal y conforme a la ecuación:

$$y(t/T) = x_0 (4\mu m g/k)(t/T_n) \tag{7}$$

## B. Descripción del equipo

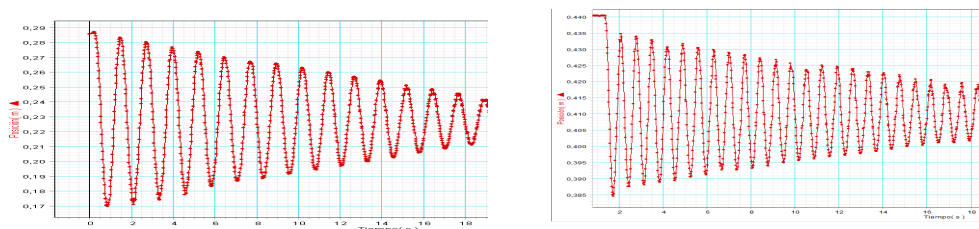
En la actualidad conviven dos sistemas físicos para el análisis de los movimientos unidimensionales y, específicamente, para nuestro caso los movimientos oscilatorios. Por una parte los equipos más recientes usan rodamientos de baja fricción (Pasco, 2010) mientras que otros algo más antiguos (Leybold, 1997) emplean la suspensión por aire logrando, como se explicará, un menor coeficiente de fricción dinámica. En la figura 1 se muestran estos sistemas con sus partes constituyentes.



**FIGURA 1:** A la izquierda vemos el sistema para el estudio de movimientos unidimensionales usando móviles con rodamientos de baja fricción (Pasco, 2010): a) móvil; b) pista con ranuras para guía del movimiento; c) resortes; d) puentes de sujeción de los resortes; e) accesorios para fricción viscosa; f) detector de movimiento por ultrasonido; g) interface. A la derecha vemos el sistema para el estudio de movimientos unidimensionales basado en suspensión por aire (Leybold, 1997): a) móvil; b) pista con orificios de salida de aire, c) resortes; d) puentes de sujeción para el sistema de resortes; e) sensor de movimientos; f) interface.

Ambos equipos se usan actualmente, no obstante, hay un proceso de reemplazo del segundo por el primero a causa de presentar menos problemas de operación. El sistema de suspensión por aire presenta su principal inconveniente en el impulsor el cual, cuando fue concebido, era posible obtener este tipo de elemento pero actualmente no se tiene la misma facilidad. El primer sistema es de mayor simplicidad aunque presenta mayor fricción que el anterior. De todas maneras y, como se analizará en V la experiencia con fricción viscosa puede incorporar la corrección por fricción seca y con ello no es determinante en la elección del sistema.

En la figura 2 se muestran las funciones desplazamiento para una experiencia de oscilación con fricción seca realizada usando los dos sistemas.



**FIGURA 2:** A la izquierda vemos la función desplazamiento versus tiempo para el sistema de la figura 1(izquierda). En la escala vertical se grafican los desplazamientos totales. El coeficiente de rozamiento, medido a partir de la ec.7 resulta: 0.07. A la derecha vemos la función desplazamiento versus tiempo para el sistema de suspensión por aire. El periodo de la oscilación libre resulta,  $T_n=0.7$  s. Y, el coeficiente de rozamiento, medido a partir de la ec.7: 0.00175.

## V. FRICCIÓN SECA Y VISCOSA

Puesto que no se puede omitir la fricción seca plantearemos la solución de la experiencia con amortiguamiento seco y viscoso. La forma de abordar este tema es similar a lo desarrollado en el punto IV pero considerando, esta vez, la solución de amortiguamiento viscoso como punto de partida en vez de la oscilación libre para la definición de los subintervalos con  $v < 0$  y  $v > 0$ .

Las respectivas ecuaciones diferenciales para estos casos son (Steidel, 1981):

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \mu \cdot g \tag{8}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = -\mu \cdot g \tag{9}$$

La ecuación característica de la solución homogénea provee las raíces:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}} \tag{10}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm \omega_n \cdot \sqrt{\frac{c^2}{c_c^2} - 1} \tag{11}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \tag{12}$$

Correspondiendo el primer caso al subamortiguado; el segundo al sobreamortiguado y, el tercero al caso crítico. El primero presenta cambios de signo de la velocidad y por lo tanto es necesario emplear las ecuaciones (8) y (9) y subdividir los intervalos en semiperiodos. Los dos restantes casos tienen velocidad negativa y por lo tanto solo se utiliza la ecuación (8).

**A. Caso subamortiguado.**

Para este caso y los restantes se adoptan las mismas condiciones iniciales de **IV**:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{c}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \left\{ \cos(\omega_a \cdot t) + \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_a} \cdot \sin(\omega_a \cdot t) \right\} + \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \tag{13}$$

$$x(t_1) = \left(-x_0 + \frac{2 \cdot \mu \cdot m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{c}{2 \cdot m} \cdot t_1} \cdot \left\{ \cos(\omega_a \cdot t_1) + \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_a} \cdot \sin(\omega_a \cdot t_1) \right\} - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \tag{14}$$

donde:  $t_1 = t - T_a/2$ ;  $c$ : coeficiente de amortiguamiento;  $c_c$ : coeficiente crítico de amortiguamiento;  $c_c = 2(m \cdot k)^{1/2}$ ;  $\omega_a$ : frecuencia de la componente periódica de la amortiguada;  $\omega_a = \omega_n (1 - c^2/c_c^2)^{1/2}$ ;  $T_a$ : periodo;  $T_a = 2\pi/\omega_a$  y  $c/c_c < 1$ .

Conviene precisar que, cuando nos referimos a la componente periódica lo hacemos indicando la parte armónica de la solución y que está encerrada entre llaves en las ecuaciones (13) y (14).

**B. Caso sobreamortiguado**

Para este caso, la solución resulta como suma de dos exponenciales reales de decaimiento:

$$x(t) = \frac{\left(x_0 - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k}\right)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \left\{ \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} \right\} \tag{15}$$

Donde,  $\alpha_{1,2}$  están dadas por la ecuación (11) y  $c/c_c > 1$ .

**C. Caso de amortiguamiento crítico** (no es tratado en este Trabajo)

Aquí se tiene:  $c/c_c = 1$  y la solución:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{c}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{c}{2 \cdot m} \cdot t\right) + \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \tag{16}$$

**VI. REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA**

La realización de la experiencia abarca los casos subamortiguado y sobreamortiguado no así el caso de amortiguamiento crítico. En efecto, si bien nuestro equipo permite una variación del coeficiente de amortiguamiento suficiente para efectuar las mediciones de los dos primeros casos y, por tanto, la transición de un caso al otro, esta variación por el momento no es lo suficientemente suave para visualizar el amortiguamiento crítico.

El sistema utilizado es el de suspensión por aire presentado en IV (Descripción del equipo). La detección de posiciones se realiza por el sensor de ultrasonido (Pasco, 2010) el cual trabaja con una frecuencia de muestreo de 50 Hz.

El conjunto de resortes esta constituido por cuatro resortes iguales y dispuestos dos a cada lado del móvil con el fin de lograr la estabilidad del mismo. Por otra parte, este último tiene adosado a ambos lados un sistema de tres paletas fijas, las cuales, al ser sumergidas en aceite determinan un amortiguamiento viscoso. Con este fin y, para el alojamiento del aceite se usaron dos cubetas cuyas dimensiones (iguales para ambas) son de 8cmx15cmx100cm. El aceite utilizado fue de transmisión y de grado 140.

La realización de la experiencia supone los siguientes pasos:

IV-1) Experiencia con fricción seca solamente: El sistema completo se hace oscilar sin inmersión de las paletas en aceite. La condición inicial,  $x_0$ , debe ser medida con la mayor exactitud posible pues, en la determinación de la relación  $c/c_c$ , es necesaria esta condición por la aplicación del método de cuadrados mínimos. Se mide la posición del móvil con el detector de ultrasonido y a una frecuencia de muestreo de 50 Hz. Esta experiencia permite calcular la frecuencia natural de oscilación y la corrección por fricción seca (ec. 7).

IV-2) Experiencia con fricción seca y viscosa: Se procede a sumergir las paletas y a repetir la operación con las mismas condiciones iniciales: a) Para paletas parcialmente sumergidas se logra un movimiento oscilatorio subamortiguado. La mayor inmersión de las paletas determina la aplicación de un coeficiente de fricción  $c/c_c$  de más alto valor. b) Para una inmersión completa de las paletas se obtiene el caso sobreamortiguado.

## VII. RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3:

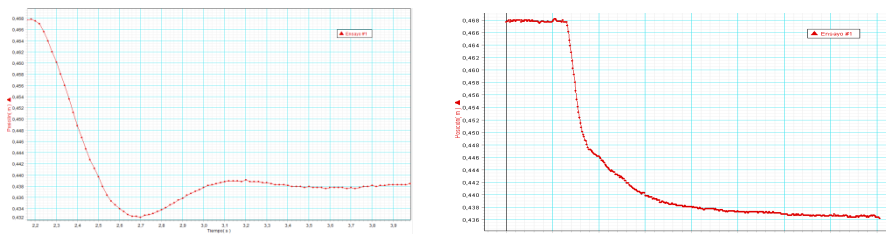


FIGURA 3: Grafica experimental del caso subamortiguado (izquierda); Grafica experimental del caso sobreamortiguado (derecha).

Se presentan las gráficas de posición-tiempo para la fricción seca y viscosa de los casos subamortiguado y sobreamortiguado, respectivamente. Se utilizan, asimismo, los resultados, de fricción seca, se obtiene,  $T_n = 0.7$  s;  $\mu = 0.00175$ ; y,  $g = 9.88$  m/s<sup>2</sup> de gravedad local.

En la figura 3 izquierda se muestran los valores obtenidos para el caso subamortiguado el cual debería ajustarse conforme a la ec.13 y considerando el primer semiperiodo. Los valores obtenidos en el párrafo anterior permiten graficar la función desplazamiento,  $x(t)$ , teniendo como único parámetro la relación  $c/c_c$  y, asumiendo que  $x_0$  se mide con un error despreciable y explicitando el factor exponencial:

$$e^{-\frac{c}{2m}t} = e^{-\frac{2\pi c t}{c_c T_n}} \tag{17}$$

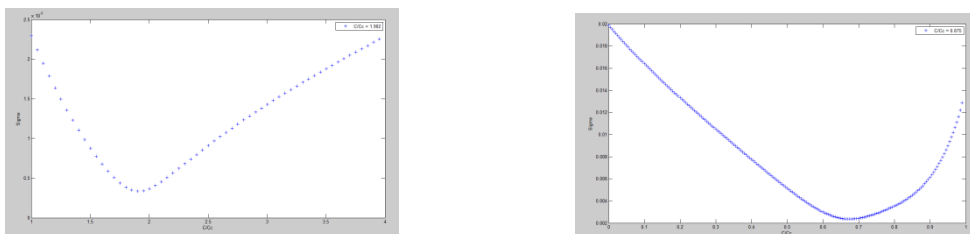
En la figura 3 derecha se grafican los resultados para el caso sobreamortiguado. A partir de un análisis similar al caso subamortiguado se infiere que la curva teórica depende, principalmente, de la relación  $c/c_c$ . Con esta suposición es posible realizar un análisis de los resultados a partir del método de mínimos cuadrados (VIII).

### VIII. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El análisis de los resultados obtenidos y la consiguiente determinación de la relación  $c/c_c$  se realiza a partir de la aplicación del método de mínimos cuadrados. Procedemos, en primer término, superponiendo, en una misma gráfica los valores experimentales con las curvas teóricas (del caso analizado) provenientes de una familia de curvas donde se ha variado la relación  $c/c_c$ . Esto define un intervalo de valores para esta relación la cual, de esta manera, tiene acotado los valores posibles que mejor se aproximan a los experimentales. En una segunda etapa se calcula el error cuadrático medio para cada función teórica y se determina la relación  $(c/c_c)_v$  que minimiza esta cantidad. Designando la misma como  $(c/c_c)_v$ , entonces la magnitud medida resulta:

$$(c/c_c) = (c/c_c)_v \pm \sigma \tag{18}$$

donde,  $\sigma$  es la dispersión estándar. En la figura 4 se muestran, respectivamente, la dispersión como función de la relación  $c/c_c$  y la determinación de su mínimo.



**FIGURA 4:** dispersión como función de la relación  $c/c_c$  para, subamortiguado (izquierda) y, sobreamortiguado (derecha).

Como resultado del análisis anterior se obtiene. Para el caso subamortiguado:  $c/c_c = 0.675 \pm 0.002$  y para el caso sobreamortiguado:  $c/c_c = 1.902 \pm 0.0003$

### IX. CONCLUSIONES

Se aportan elementos que permiten mejorar y ampliar los alcances de los TPL en la asignatura Física I e introductorio al tema de oscilaciones con fricción viscosa para ingeniería mecánica. En segundo término, el tratamiento de los datos experimentales, con su ajuste por cuadrados mínimos y, la determinación de la relación  $c/c_c$  amplía la visión del alumno en relación al empleo del método. Un tercer aspecto a considerar es el posible uso de paletas giratorias para variar más suavemente la relación  $c/c_c$  y aproximarse, así, al amortiguamiento crítico. Finalmente, la mayor masa del sistema con rodamiento en relación al de suspensión por aire hace más difícil alcanzar la condición de sobreamortiguado por parte del primero ( $c/c_c = 2(m k)^{0.5}$ ). Para nuestro caso, las respectivas masas de los móviles con rodamientos y de suspensión por aire son: 606 g y 238 g.

### REFERENCIAS

Beer, F. P. Johnston, E. R. (2010). *Mecánica Vectorial para ingenieros (Dinámica)*. México: VI Ed. Mc. Graw Hill.

Leybold. (1997). *Catálogo general de Física*. Leyboldstr. 1 – D-50354 Hürth (RFA): Leybold Didactic.

Pasco. (2010). *Physics & Engineering Education*. Foothills Blvd. Roseville, California: Pasco.

Steidel Jr. R. F. (1981). *Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*. México: CECSA.