Experiencia de laboratorio con modelado matemático de sistemas oscilatorios

REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Teresita E. Humana[1], Silvia I. Navarro[1], Guillermo N. Leguizamón[1], María Luz Quiroga[1], Gustavo A. Juarez[1]
[1]*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca. Avda. Belgrano N° 300, CP 4700, Catamarca, Argentina*

E-mail: terehumana@gmail.com

Resumen

En la configuración de una teoría, el proceso de reconstrucción de un modelo matemático permite orientar las actividades experimentales y la simulación en los sistemas en estudio. A partir de ello, es posible definir las funciones de transferencias en tiempo continuo o discreto. En base a ello proponemos, en el estudio de sistemas oscilatorios, la implementación de estrategias didácticas alternativas para fortalecer la comprensión del fenómeno en estudio.

Palabras clave: Sistema oscilatorio, Modelo matemático, Estrategia didáctica, Simulación. Función de transferencia.

Abstract

In the configuration of a theory, the reconstruction of a mathematical model to allow orient the experimental and simulation activities in the systems under study. From this, we can define transfer functions in continuous or discrete time. On this basis we propose in the study of oscillatory systems, the implementation of alternative teaching strategies to strengthen the understanding of the phenomenon under study.

Keywords: Oscillating system, Mathematical model, Teaching strategy, Simulation, Transfer functions.

I. INTRODUCCIÓN

A partir de observaciones realizadas en el ciclo básico de las carreras de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNCa, en la cátedras de Métodos Matemáticos, consideramos necesario repensar y rediseñar integralmente distintos aspectos presentes en el planteamiento de las actividades.

Nuestro objetivo es favorecer la compresión y el proceso de construcción del conocimiento científico mediante estrategias de aprendizaje que integren la adquisición de conceptos con la familiarización del trabajo científico. Por lo tanto, proponemos usar simulaciones y prácticas de laboratorio que complementen la práctica tradicional de resolución de problemas físicos-matemáticos, mediante funciones de transferencias en tiempo continuo y discreto, tales como los sistemas oscilatorios, en particular el sistema subamortiguado. Según Cudmani et al. (1991) expresa *"creemos que estas actividades llevan a favorecer la comprensión metacognitiva y las transiciones parciales hacia el conocimiento científico"*. Se trata entonces, de rescatar globalmente el conocimiento sustancial y sintáctico de la física que es el referente permanente del aprendizaje, debiéndose tener siempre presente que la adquisición de conocimientos científicos y la familiarización con metodologías, metas, actitudes y valoraciones científicas, son procesos no espontáneos ni basados en el sentido común. Por ello, parece ser necesario un esfuerzo consciente y sostenido para romper con los modos de razonamiento espontáneos, para poder enfrentar científicamente los problemas. (Salinas et al, 1995).

En consecuencia, este proceso ocasionaría que el alumno:

- Analice el interés de la problemática planteada y la aborde cuali y cuantitativamente.
- Precise el problema y practique el modelado matemático y la abstracción.
- Consulte antecedentes de estudios vinculados con las funciones de transferencias en tiempo continuo y discreto.
- Proponga objetivos y metodología de trabajo.

La evaluación del presente artículo estuvo a cargo de la organización de la 19 Reunión Nacional de Educación en Física

- Conciba diseños experimentales para registrar la validez de la propuesta.
- Verifique mediante la simulación dinámica los resultados físicos – matemáticos utilizando software de aplicación libre para tiempo continuo el GeoGebra. Mientras que para tiempo discreto el "Δx_n" (Juarez y col., 2014) desarrollado por los integrantes del equipo de investigación que trabajan con Ecuaciones en Diferencias, que tiene la finalidad de resolver ecuaciones en diferencias y sistemas en diferencias con valores iniciales, y a través de ello obtener la gráfica respectiva representativa del sistema en cuestión.
- Analice la coherencia de los resultados obtenidos, establezca una analogía con los que reportan otros que han estudiado problemas relacionados; y elabore un informe con las conclusiones de su investigación.

II. EL FENÓMENO FÍSICO ESTUDIADO EN LA EXPERIENCIA

En el estudio de sistemas oscilatorios es indispensable representar en forma aproximada el comportamiento de la dinámica del sistema, para comprender sus características. Un modelo matemático se puede definir *como un conjunto de ecuaciones que describen con cierto grado de precisión la dinámica del sistema.* Dado que en la mayoría de los problemas dinámicos, el modelado del sistema adopta la forma de un conjunto de ecuaciones diferenciales, obtenidas a partir de las leyes físicas que lo gobiernan; y que los modelos matemáticos pueden tomar diferentes formas, la selección del modelo es una cuestión de conveniencia que tiene en cuenta las características específicas del problema. (Juarez y col. 2005); Serway, (2001); Novak, (1998). En las aplicaciones de sistemas oscilatorios, se utilizan con frecuencia las funciones de transferencias, con el fin de caracterizar las relaciones entre las variables de entrada – salida de los sistemas que se pueden describir con la Transformada de Laplace en tiempo continuo y la Transformada Zeta en tiempo discreto, con ciertas condiciones iníciales. (Simmons, 1991).

III. POBLACION DE ESTUDIO

La experiencia que se propuso fue implementada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Catamarca, con 6 alumnos de segundo año de las carreras de Física en 2014, donde se desarrollaron los contenidos relacionados con las funciones de transferencias que abordan las relaciones físico-matemáticas dentro de la Física.

IV. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Se trabajó con una metodología experimental, la cual permitió confrontar los valores obtenidos con la formulación matemática del modelo matemático propuesto a través de las funciones de transferencias en tiempo continuo y discreto. (Humana y col, 2013)

El objetivo fue determinar los sistemas oscilatorios a partir del registro de valores experimentales y de valores simulados de las variables intervinientes con la utilización de software de aplicaciones libres.

Utilizando un dispositivo experimental tal lo muestra la (Figura 1), se considera un amortiguador básico consistente de un resorte de constante elástica *k*, un objeto de prueba de forma cilíndrica cuyo volumen es de 11 cm^3 que actúa como un embolo en un líquido de baja viscosidad y de constante *b*, vaso de precipitado, una regla milimetrada que mide las elongaciones, y un sensor de fuerza (con alcance: 50[N], calibrado previamente con el objetivo de minimizar los correspondientes errores, configurado para registrar solamente fuerza de tiro positivo, registrándose 100[muestras/s] en un lapso de 13[s].

Realizamos experiencias con líquidos de diferentes densidades y viscosidades, obteniendo las correspondientes gráficas con su respectiva amortiguación. A partir del análisis y la aplicación de los criterios de selección adecuados, se puede observar que la experiencia que mejor aporta información al parámetro *b*, es en la que se utiliza como líquido viscoso el agua. Este parámetro *b*, nos permite ajustarlo a las condiciones iniciales establecidas en el modelo matemático con la aplicación de las funciones de transferencia en tiempo continuo y discreto.

Conformemente, la masa ejerce una fuerza conservativa que depende de la deformación en *k*-veces, mientras que el líquido ejerce una fuerza disipativa contraria al movimiento que depende *b*-veces de la velocidad. En consecuencia, ante la acción de una fuerza externa se observa el movimiento de la masa. Debido a una fuerza aplicada, la masa sujeta al resorte comienza a moverse alcanzando una amplitud máxima que disminuye gradualmente en el tiempo, siguiendo un patrón de amortiguación, hasta encontrar la posición de equilibrio.

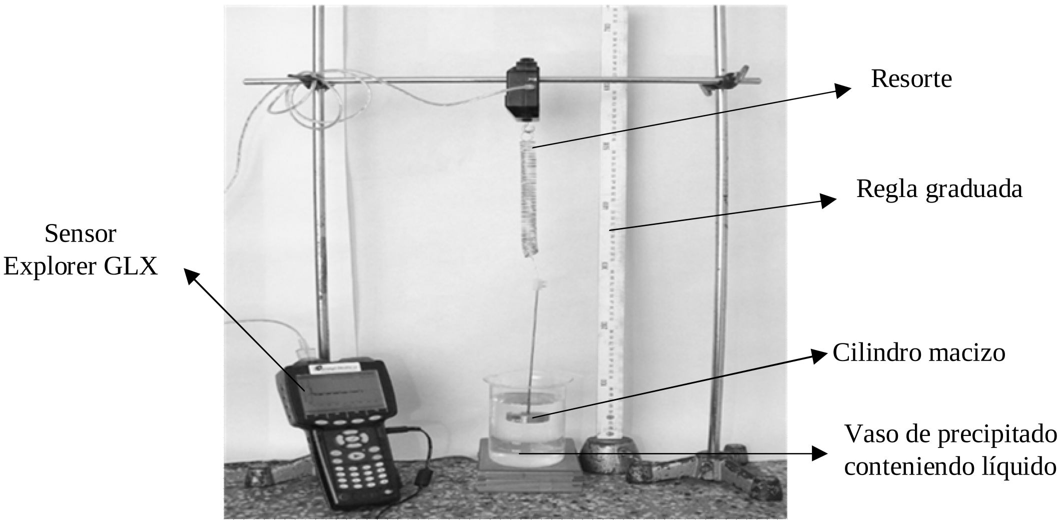

FIGURA 1: Dispositivo experimental

Existen tres características generales de amortiguación, que en nuestro caso haremos referencia al movimiento subamortiguado (Figura 2), el cual se ajusta a las condiciones iniciales para la aplicación de las funciones de transferencias. Se reconocen entonces la entrada y salida del sistema, que son la fuerza aplicada y la deformación producida respectivamente para un instante de tiempo.

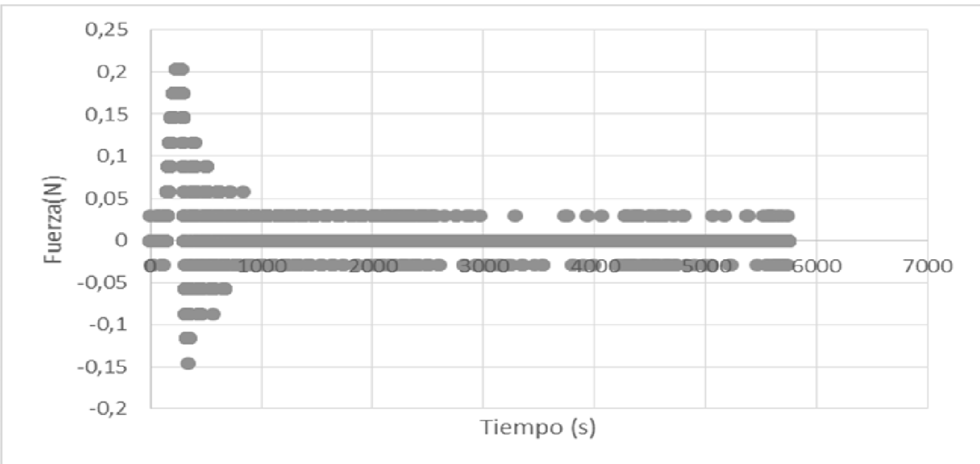

FIGURA 2: Registro de datos experimentales fuerza en función de tiempo. Sistema oscilatorio subamortiguado.

De acuerdo a los resultados obtenidos, los cuales se ajustan a las condiciones iniciales que nos conducen a la aplicación de las transformadas respectivas, lográndose el valor de k = 3,8163$[N/m]$, m = 0,0744721$[kg]$ = 74,4721$[gr]$, F = 0,2038$[N]$, analizándose valores máximos de fuerza en función del tiempo, calculando el parámetro b, se obtiene el mejor valor con su correspondiente error: $b = (\bar{b} \pm \Delta b)$ = (0,0236 ± 0,0001) $\left[kg/s\right]$

V. MODELADO MATEMÁTICO

A. Función de transferencia en tiempo continuo

Del sistema experimental diseñado consideramos el modelo matemático de la función de transferencia $Q(s)$ del sistema masa – resorte subamortiguado que describe su comportamiento dinámico, el cual se define como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida $Y(s)$ respecto a la transformada de Laplace de la variable de entrada $R(s)$**,** con las condiciones iniciales cero. (Glyn, 2002; Kreiszig, 2001). Donde la ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse en términos de la frecuencia angular ω_0 con la cual el sistema oscilará libremente, y el factor de amortiguamiento relativo β obteniéndose:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\omega_0 \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = b_0\omega_0^2 R(s) \tag{1}$$

Por tanto, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$s^2X(s) + 2\beta\omega_0 s\, X(s) + \omega_0^2 X(s) = b_0\omega_0^2 R(s)$$

$$Q(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{b_0\omega_0^2}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{2}$$

Consideremos, la salida de éste sistema sujeto a una entrada escalón unitario en el dominio de s, tal que $R(s) = 1/s$, entonces:

$$X(s) = \frac{b_0\omega_0^2}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2} R(s) = \frac{b_0\omega_0^2}{s\,(s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{b_0\omega_0^2}{s\,(s - m_1)(s - m_2)} \tag{3}$$

Donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación $s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$**.**Para este caso, el tipo de respuesta que se presenta depende del valor del factor de amortiguamiento relativo cuando $\beta < 1$**,** dichas raíces son complejas: $m_1 = -\beta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{(1-\beta^2)}$ y $m_2 = -\beta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{(1-\beta^2)}$

Reemplazando en (3) por los valores obtenidos en la experiencia, teniendo en cuenta el ajuste de datos y la entrada escalón unitario, se tiene:

$$X(s) = \frac{49b_0}{s\,(s^2 + 6s + 49)} \tag{4}$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene:

$$X(t) = 0{,}0236[1 - e^{-3t} sen6t] \tag{5}$$

Esta ecuación representa la solución de la función de transferencia que satisface las condiciones iniciales establecidas, y mediante la simulación dinámica permite confronta este resultado con los datos experimentales, utilizándose el software libre GeoGebra, (Figura 3).

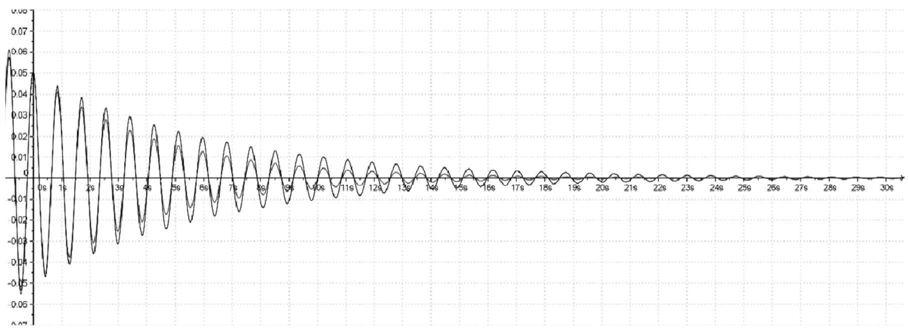

FIGURA 3: Simulación dinámica del movimiento subamortiguado en tiempo continúo utilizando Software GeoGebra.

B. Función de transferencia en tiempo discreto

En forma análoga procederemos a realizar éste análisis aplicado al sistema subamortiguado, utilizando como herramienta matemática la transformada Zeta. (Moreno y col.,2003), Sacerdoti (2003).

La función de transferencia $F[Z]$ de un sistema lineal e invariante es la relación que existe entre las transformadas Z de la salida y de la entrada, para condiciones iniciales determinadas. Por lo tanto, el algoritmo lineal, en forma de ecuación en diferencia se expresa como:

$$x(k) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, u(k-j) - \sum_{j=1}^{n} a_j\, x(k-j) \tag{6}$$

Usando la transformada Z, y especificando sus propiedades de linealidad y retardo, para señales causales con condiciones iniciales, se obtiene la función de transferencia como:

$$Q(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{n} b_j\, z^{-j}}{\sum_{j=0}^{n} a_j\, z^{-j}} \tag{7}$$

Para el sistema causal, es ejecutable en tiempo real por lo que $x(k)$ no depende de valores futuros de la entrada $r(k+1),\ r(k+2), \ldots$ se admite el valor presente de la entrada $r(k)$ suponiendo que el tiempo de cálculo sea despreciable; es decir que la función de transferencia será una fracción propia.

Aplicando este concepto se propone un modelo matemático dinámico discreto para el *movimiento subamortiguado*, a partir de la ecuación en diferencia lineal con coeficientes constantes de segundo orden dado por:

$$x_{k+2} + a x_{k+1} + b x_k = r(k) \tag{8}$$

Donde el término involucrado en el mayor corrimiento de la sucesión $\{x_k\}$ es el término $\{x_{k+2}\}$ (lo que implica un corrimiento de dos pasos), que para satisfacer la convergencia establecemos valores que cumplan los criterios de convergencia siguientes: $|a| - 1 < b < 1$ y $a^2 - 4b < 0$. Ahora asignamos los valores de $a = -1{,}09;\ b = 0{,}95$ y la sucesión de entrada $\{x_k\}$ es la sucesión escalón unitario definida por:

$$u_0(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Procedemos a resolver (8) reemplazando los valores y utilizando las propiedades de la transformada Z.

$$x_{k+2} + 1{,}09 x_{k+1} + 0{,}95 x_k = 0{,}09 \qquad (\mathrm{k} \geq 0)$$

$$[z^2 X(z) - z^2 x_0 - z x_1] - 1{,}09[z X(z) - z x_0] + 0{,}95\, X(z) = \frac{z}{(z-1)} \tag{10}$$

Reordenando los términos, aplicando las condiciones iniciales $x_0 = 0,\ x_1 = 1$para el movimiento escogido, y despejando $X(z)$ se obtiene:

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z+\bar{a})} + \frac{z}{(z-1)(z-a)(z+\bar{a})} \tag{11}$$

Cuyas raíces son $a = 0{,}5 + j0{,}81$; $\bar{a} = 0{,}5 - j0{,}81$. Luego dividimos por z ambos miembros, y operando algebraicamente se obtiene:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z+\bar{a})}$$

Se realiza la expansión de la función $X(z)\,/\,z$ en vez de la función $X(z)$ para que las fracciones simples de la expansión, queden de la misma forma que para las expansiones en fracciones parciales en s

Aplicando la transformada Z inversa y la expansión para el caso de polos complejos conjugados, se obtiene:

$$\{x_k\} = \frac{1}{0{,}81} e^{0{,}5k} (0{,}81 \cos 0{,}81k + 0{,}5\, sen\, 0{,}81k) \tag{12}$$

Esta ecuación representa la sucesión solución de la ecuación en diferencias que satisface las condiciones iniciales establecidas, y mediante la simulación dinámica se confrontó este resultado con los datos experimentales, utilizando en este caso el software de aplicación libre"Δx_n"(Figura 4a).

De acuerdo al resultado de la simulación obtenida (Figura 4b), se observa que cuando la función de transferencia presenta polos complejos conjugados, el sistema contendrá una parte real negativa que tenderá a estabilizarse alrededor de un valor determinado, y la tendencia de la parte imaginaria del polo presentará un comportamiento oscilatorio.

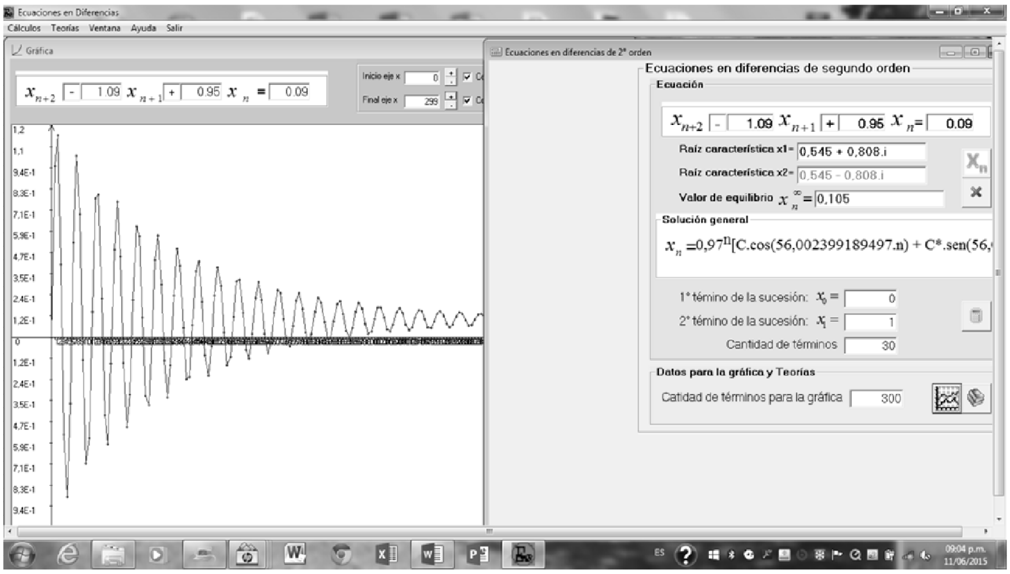

FIGURA 4: a) Simulación dinámica del movimiento subamortiguado en tiempo discreto, b) Ecuación en Diferencias de 2°orden, utilizando Software "Δx_n"

VI. CONCLUSIÓN

De las experiencias realizadas, el alumno logró visualizar la respuesta del sistema a distintas situaciones, pudiendo resolver y comprender las funciones de transferencias, tanto en tiempo continuo y discreto mediante la respuesta a la señal función escalón unitario, de modo que sobre una respuesta subamortiguado típica, es posible definir el valor de la elongación máxima, el tiempo pico y el tiempo que necesita el sistema para que la diferencia entre el valor de la señal y el valor límite en estado estacionario difieran un porcentaje determinado. Asimismo es importante reconocer la utilidad que presenta el software de aplicaciones libres, que le permite confrontar los resultados experimentales y analíticos del problema planteado. En base a lo propuesto, es posible contribuir a orientar las actividades para el aprendizaje de las ciencias y con una forma científica de abordar las relaciones físico-matemáticas dentro de la Física.

REFERENCIAS

Cudmani L.C. (1991) Contexto y significado. *Memoria REF VII. Mendoza*, pp.103 – 109.

Glyn J. (2002) *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* México: Editorial Prentice Hall (2° Ed.)

Humana T., Navarro S. (2013). Aporte de la Transformada de Laplace en la interpretación del Movimiento Armónico Simple. *Memoria Décima Octava Reunión Nacional de Educación en la Física.* En CD, pp. 223 – 237

Juarez G., Navarro S. (2005). *Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones a Modelos en Sistemas Dinámicos*. Catamarca: Editorial Sarquís. Derecho de autorN°5175833 (10/06/2014)

Juarez G. A., Navarro S.I., Barros LE., Valdez L.E (2014).Software libre en Ecuaciones en Diferencias.

Kreiszig E. (2001). *Matemática avanzada para ingeniería* (Tomo I). México: Editorial Limusa Wiley (3° Ed).

Moreno L., Garrido S., Balaguer C. (2003) Ingeniería de control. Modelado y control de sistemas dinámicos. España: Editorial Ariel Ciencia.

Novak J. D. (1988) *Imaginación y ciencia. Ciencia, aprendizaje y comunicación.* Barcelona: Editorial Lala, Cuadernos de pedagogía.

Sacerdoti J. (2003). *Transformada Z.* Dpto. Matemática, Facultad de Ingeniería. UBA - V.2.07

Salinas J., Gil Pérez D., Cudmani L. (1995) ¿Cómo adecuar las estrategias educativas a los requerimientos de modelos de aprendizaje basados en psicologías constructivistas? *Memoria REF IX. Salta.* pp.350 – 362.

Serway, F (2001). *Física.* México: Editorial Prentice-Hall (5º Edición)

Simmons G.F. (1991) *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* Madrid: Editorial McGraw-Hill (2° Ed).