

Aportes conceptuales para el análisis del movimiento relativo

Fabián Lorenzo Venier¹, Claudio Ceballos¹

¹Universidad Nacional de Río Cuarto. Facultad de Ingeniería.
Departamento de Ciencias Básicas. Ruta Nac. 36 km 601. Río Cuarto.
Córdoba. CP 5800

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

E-mail: fvenier@ing.unrc.edu.ar

Resumen

En el desarrollo de las actividades de dictado de la asignatura Física correspondiente al primer año de las carreras de Ingeniería, se trata el tema movimiento relativo como cierre de la unidad de Cinemática. El desarrollo del tema en los libros de texto, y en los ejemplos que se utilizan habitualmente no alcanza para que los estudiantes puedan construir un concepto sobre la relatividad de los movimientos. Muchas veces el planteo trigonométrico de los ejemplos es visto como una receta salvadora y no es visualizado como parte integral del movimiento en ejes cartesianos, recayendo en el uso de una "receta mágica", que complica el análisis integral del movimiento de los cuerpos. Uno de los puntos no desarrollados en los textos de mecánica clásica recae en la estrategia para el abordaje del movimiento relativo. En esta experiencia se desarrollan aspectos que facilitan la construcción del concepto de movimiento relativo de una partícula, las mismas quedan plasmadas en un texto de consulta para los estudiantes.

Palabras clave: Movimiento relativo, Estrategia para la resolución de problemas, Transformaciones Galileanas, Enseñanza de la cinemática, Sistema de referencia.

Abstract

The relative motion is the latest theme in the cinematic chapter during the teaching activities in the first year of physics in engineering. The development of relative motion in textbooks and the use of trigonometry to solve examples are used by students as a saving recipe and not as a summary of the whole movement in Cartesian coordinates. Thus becomes a "magic bullet" that contrasts with the overall analysis of the motion of bodies, and do not contribute to the construction of it. The texts of classical mechanics do not develop a strategy for the integrated approach of relative movement. In our work we proposed a treatment to facilitate the construction of the concept of relative motion of a particle with the use of vectors in two or three dimensions. Students used a material designed to achieve these objectives which is new to the first year students of engineering and who have just started the course of algebra.

Keywords: Relative movement, Strategies for Solving Problems in physics, Galilean transformations, Teaching kinematics, Reference system.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de material de lectura complementaria en Física surge como necesidad detectada en las actividades de aula. Los libros de textos de mecánica clásica que se utilizan normalmente en los primeros cursos de las carreras de ingeniería, abordan de manera general el tema de movimiento relativo. El desarrollo didáctico general que estamos planteando se refiere al hecho de que el abordaje del movimiento relativo si bien es correcta y de significación lógica, la situación inicial en un primer año universitario desdibujan el tratamiento físico matemático y la significación psicológica por parte de los lectores, dificultando el aprendizaje significativo del tema tratado.

A partir de la tarea de resolución de problemas de movimiento relativo en clases de la asignatura Física, se observaron dificultades que aparecen como emergentes, obstaculizando la tarea de los estudiantes a la hora de la aplicación del modelo.

Una de las principales dificultades radica en el hecho de no poder identificar los marcos de referencia desde los cuales se quiere analizar el movimiento. Normalmente el estudiante busca resolver los problemas de cinemática en general reemplazando valores numéricos en distintas ecuaciones, lo que lo

Lleva a la no interpretación del fenómeno analizado y generando en el mismo un estado de confusión en la cual no puede identificar las variables presentes en el problema.

La interpretación de la velocidad como magnitud vectorial es un concepto difícil para internalizar por parte de los estudiantes, y ante los ejemplos de textos normalmente el estudiante opera solamente con los módulos de las velocidades tal como lo hace en movimiento rectilíneo, olvidando el carácter vectorial de la misma, en lo que se refiere a su dirección y sentido. Esto cambia radicalmente la forma de operar con los mismos y el uso de receta dificulta la explicación a otros movimientos fuera de los ejemplos tratados y del movimiento percibido

La física requiere del uso de matemática con distintos objetivos dentro del aprendizaje de la física, para evaluar la: comprensión, generalización y predicción. En el primer año universitario los estudiantes continúan pensando las formulas y ecuaciones como herramienta para operar y encontrar un resultado numérico, y con este mismo sentido hacen uso de las funciones trigonométricas

El desarrollo del tema es iniciado y revalorizado con la introducción del texto: Introducción a la Física de Alberto P. Maiztegui y Jorge A. Sabato. (Ed. Kapeluz. 1951. Página 80). Texto que el grupo de estudiantes considera interesante aunque lo describe como “de otra época”, viejo en su representación, imágenes de trenes y las personas vestidas de traje evidentemente algo poco usual en nuestros tiempos, pero, también coinciden casi totalmente indicando que la definición citada en el libro de movimiento es muy completa y diferente a lo visto y tratado en el colegio secundario: “Un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema de coordenadas elegido como fijo, cuando sus coordenadas varían a medida que transcurre el tiempo”. Este punto de partida es muy importante como inicio y anclaje para el desarrollo y sustento de una física universitaria de primer año, que no solo resuelva con el uso de fórmulas sino que desarrolle actitudes superadoras de predicción y análisis.

En esta propuesta se inicia la descripción del movimiento de un cuerpo puntual a partir de un sistema de referencia con respecto al cual se analizará dicho cuerpo y considerar el intervalo de tiempo que transcurre mientras dura el movimiento. En un sistema de referencia cartesiano de coordenadas ortogonales, se ubica al observador que permitirá el estudio del movimiento en una, dos o tres dimensiones.

II. DIFICULTADES IDENTIFICADAS AL ABORDAR EL ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO RELATIVO

Se inicia el trabajo sobre esta propuesta con el grupo de alumnos en condición de promoción de la asignatura Física durante el año 2014, partiendo desde la definición general de movimiento y movimiento relativo, el concepto de velocidad como magnitud vectorial, ya trabajado en cinemática con variables como posición, velocidad, aceleración y tiempo.

La propuesta actual es extender este análisis cinemático para poder analizar el movimiento desde dos sistemas de referencia y poder cuantificar el movimiento de una partícula desde cada sistema, teniendo presente que uno de los sistemas se mueve con velocidad constante. Se utiliza en clase un dibujo animado como elemento auxiliar, en el cual su personaje (La Pantera Rosa) viaja en una motocicleta que a posteriormente se desarma en dos partes mientras viaja por una ruta. Este dibujo toma como centro de observación del movimiento a la Pantera Rosa y secuencia el desplazamiento de su mirada observando como la rueda delantera viaja hacia atrás según su perspectiva de observación.

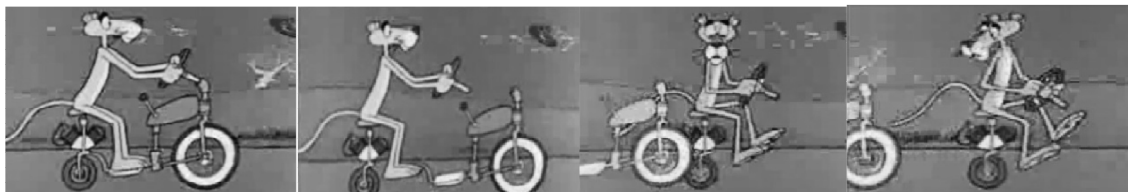


FIGURA 1: Dibujo animado de la Pantera Rosa

Tomamos de esta experiencia la posibilidad de poder establecer distintos observadores para un movimiento dado. En este ejemplo el observador fijo puede determinar el movimiento de los dos cuerpos estableciendo que ambos se mueven en la dirección que traían anteriormente. Para el observador en movimiento (la Pantera Rosa) el movimiento que describe la rueda es en sentido contrario al que traían antes de que se separaran las partes de la moto (ver Figura 1)

III. MOVIMIENTO RELATIVO

Se inicia el análisis a partir de la secuencia de movimiento de la Pantera Rosa al ser este un movimiento rectilíneo. Pero esta sencillez también evidencia los inconvenientes que se genera en los estudiantes al pretender realizar este mismo análisis, como suma algebraica de vectores, a otros movimientos, por ejemplo, en el plano. Esta problemática de abordaje se evidencia en el anclaje que realiza el estudiante, con lo visto previamente como ejemplos o problemas y el fuerte énfasis que el asigna en la resolución de ejercicios. En ello, el uso de fórmulas como estrategia de resolución los incentiva a su uso sin una indagación más profunda o validez para casos más general, conceptos que atentan con el objetivo de predecir y valorar su importancia como modelo de pensamiento, más que la resolución de una situación particular de un problema.

Con el texto propuesto como guía de trabajo se busca superar tales esquemas a partir de la secuencia de movimientos analizados, identificando dónde conviene ubicar los observadores del movimiento, el significado físico de la conveniencia de un observador en la Tierra y el otro observador móvil que este caso será la misma Pantera Rosa. Definir el correcto uso de los sistemas de referencia y la importancia para caracterizar y explicar el movimiento de los cuerpos y así identificar cada una de las velocidades en función de los sistemas de referencia establecidos.



FIGURA 2: Sistema de referencia para describir el movimiento de la Pantera Rosa

En los libros de textos aparece este abordaje indicando con subíndices cada una de las velocidades analizadas, si bien esto aporta una pertenencia de variables asignadas y su relación respecto al observador elegido, la propuesta de este trabajo incentiva el uso de pares ordenados enfatizando así el uso de sistemas coordenados cartesianos y versores ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$).

Algunos autores de física para primer año de ciencias e ingeniería como por ejemplo Resnick (Física. Resnick y otros, Pág 76) propone para el análisis del movimiento:

$$\vec{V}_{PS} = \vec{V}_{PS'} + \vec{V}_{S'S} \quad (1)$$

La ecuación es una ley de la transformación de velocidades, que permite convertir una medición de velocidad realizada por un observador en un marco de referencia – digamos, S' – en otro marco – por ejemplo S –, mientras conozcamos la velocidad relativa entre los dos marcos. En una ley basada firmemente en el sentido común de la experiencia cotidiana, y en los conceptos de espacio y tiempo esenciales para la física clásica de Galileo y Newton. De hecho, a la ecuación se la conoce como la forma galileana de la ley de transformaciones de las velocidades”

En nuestra propuesta pretendemos trabajar identificando cada una de las velocidades tratando de esta manera de aproximarnos a lo cotidiano, sin dejar de lado la formalidad de la física. Ejemplo:

Comenzaremos colocando un sistema fijo a Tierra para analizar el movimiento y un sistema lo colocaremos sobre la Pantera Rosa. Desde el sistema fijo podemos determinar la velocidad de la Pantera respecto a Tierra $v_{p/T}$

Cuando se desprende la rueda delantera comienza a producirse el movimiento relativo de esta como partícula con respecto a la Pantera considerada también partícula y sobre la cual habíamos colocado un sistema de referencia móvil a velocidad constante. Con respecto al sistema móvil la rueda posee una velocidad que simbolizamos como $v_{r/p}$, y la interpretamos como: la velocidad de la partícula rueda respecto a la Pantera, también llamada simplemente: velocidad relativa

Recordando que:

$$v_{p/O} = v_{O'/O} + v_{p/O'} \quad (2)$$

Esta expresión general que planteamos podemos utilizarla para nuestro análisis, debiendo colocar los subíndices correspondientes al caso y analizar la relación vectorial establecida.

$$v_{r/T} = v_{r/P} + v_{p/T} \quad (3)$$

En nuestro ejemplo estamos observando a la rueda desde dos sistemas de referencia. La expresión anterior nos dice que la velocidad de la rueda con respecto al sistema Tierra es igual a la suma de la velocidad de la rueda respecto a la Pantera, más la velocidad de la Pantera respecto a Tierra.

La experiencia de años anteriores nos indica que es de suma importancia el uso de los subíndices en cada una de las velocidades que aparecen en la expresión anterior. Estos subíndices permiten la identificación por parte del estudiante del sistema de observación pertinente. Aquí es donde comenzamos a profundizar progresivamente el conocimiento sobre el movimiento de los cuerpos, modificando la idea que se había trabajado anteriormente analizando desde un sistema fijo y con un único observador, y que luego generalizaremos como pares ordenados (i, j) en el caso de dos dimensiones o más aun la notación vectorial con versores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} en tres dimensiones.

IV. CONCLUSIONES

La elaboración de material de lectura en tópicos de mecánica clásica como es el de movimiento relativo, pretende cumplir con dos objetivos. El primero que el material sea lógicamente significativo y el segundo objetivo es el de realizar un aporte estratégico para el abordaje en la resolución de problemas en el tema tratado, fomentando el uso de los libros de textos y familiarizar al estudiante de un primer año de ingeniería con el libro de texto pero desde una posición crítica para que a partir de la lectura y discusión se logre objetivos superadores a la simple resolución de problemas por parte de los estudiantes.

El texto citado anteriormente figura en el anexo presente en este trabajo. El mismo se pretende implementar como material de trabajo durante el 2^{do} cuatrimestre del 2015 en la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Río Cuarto. La propuesta de compartir el texto de aportes conceptuales para el análisis del movimiento relativo es el de motivar a que los docentes lo puedan utilizar en sus unidades académicas, trabajarlo con sus alumnos de acuerdo a su alcance y devolver las observaciones y críticas que surjan a través de su experiencia y uso, para su extensión y enriquecimiento de experiencias en este tema en nuestros estudiantes y en distintos niveles de aprendizaje.

REFERENCIAS

Alonso M., Finn E. (1992). *Física*. EEUU: Addison Wesley Iberoamericana

Maiztegui Alberto P. y Sabato Jorge A. (1951). *Introducción a la Física*. Argentina: Ed. Kapeluz

Resnick, Halliday. Krane (2007). *Física* 5ta edición. México: Editorial Patria

Roederer Juan G. (2008). *Mecánica elemental*. Argentina: EUDEBA

ANEXO

Aportes conceptuales para el análisis del movimiento relativo

Comenzaremos a analizar el movimiento de un cuerpo puntual representado por el círculo p en la figura. Colocaremos un sistema de referencia fijo a Tierra que denominaremos sistema O.

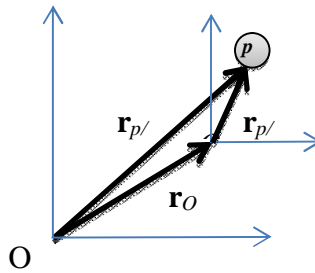
El vector posición del cuerpo p con respecto al sistema de referencia O es simbolizado por el vector $\mathbf{r}_{p/O}$ (posición del cuerpo p, respecto al sistema O).

Con respecto al sistema de referencia O' el vector posición del cuerpo p es $\mathbf{r}_{p/O'}$ (posición del cuerpo p, respecto al sistema O').

Por último la posición del sistema O' respecto al sistema O es el vector $\mathbf{r}_{O'/O}$ (posición del sistema O' con respecto al sistema O).

Analizando la figura podemos observar que la posición del cuerpo p respecto del sistema O ($\mathbf{r}_{p/O}$), es la suma vectorial de: $\mathbf{r}_{O'/O} + \mathbf{r}_{p/O'}$

$$\mathbf{r}_{p/O} = \mathbf{r}_{O'/O} + \mathbf{r}_{p/O'} \quad (4)$$



Derivando la expresión (4) con respecto al tiempo encontramos la relación de los vectores velocidades en un instante t para un movimiento relativo.

El sistema O' se mueve con velocidad constante con respecto al sistema O, por lo que el movimiento del cuerpo p puede ahora estudiarse desde ambos sistemas. La relación (6) es una relación vectorial y debe prestarse mucha atención a la misma, dado que como tal no sólo interviene en el análisis el módulo de la velocidad, sino también, su dirección y sentido, por lo que deberemos ponerle la máxima atención para lograr así el objetivo de generalidad pretendido.

$$\frac{dr_{p/O}}{dt} = \frac{dr_{O'/O}}{dt} + \frac{dr_{p/O'}}{dt} \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_{p/O} = \mathbf{v}_{O'/O} + \mathbf{v}_{p/O'} \quad (6)$$

Si el cuerpo p acelera por la acción de alguna fuerza, ¿qué podrán decir sobre esta aceleración los observadores ubicados en los distintos sistemas de referencia?

Para tratar este punto, recordamos que en nuestro planteo inicial la velocidad con que se mueve el observador ubicado en el sistema O' es constante, derivando la expresión de velocidades relativas respecto al tiempo:

$$\frac{dv_{p/O}}{dt} = \frac{dv_{O'/O}}{dt} + \frac{dv_{p/O'}}{dt} \quad (7)$$

Considerando que el término $\frac{dv_{O'/O}}{dt} = 0$, por moverse a velocidad constante. Finalmente:

$$\mathbf{a}_{p/O} = \mathbf{a}_{p/O'} \quad (8)$$

Ambos observadores medirán la misma aceleración (8) desde sus respectivos sistemas de referencia.

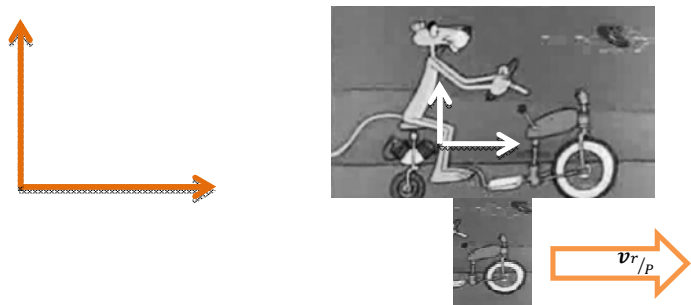
Análisis de caso del movimiento relativo

Comenzaremos analizando un problema de movimiento relativo aparecido en un capítulo de La Pantera Rosa (put put pink. <https://www.youtube.com/watch?v=16YG9qZQIJE>). El personaje construye una moto que tiene sus problemas en lo que respecta a la puesta a punto y ensamblaje de las partes. En la secuencia que se muestra podemos comenzar a plantear el análisis del movimiento relativo para este caso muy particular.

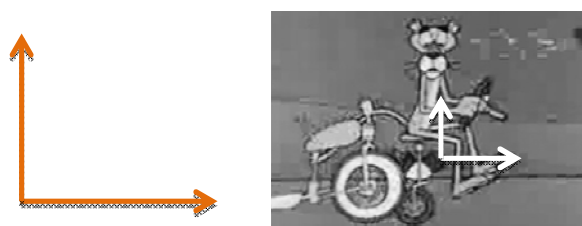
Comenzaremos colocando un sistema fijo a Tierra para analizar el movimiento y un sistema lo colocaremos sobre la Pantera Rosa. Desde el sistema fijo podemos determinar la velocidad de la Pantera respecto a Tierra $v_{p/T}$



Cuando se desprende la rueda delantera comienza a producirse el movimiento relativo de esta con respecto a la Pantera, sobre la cual habíamos colocado un sistema de referencia móvil a velocidad constante. Con respecto al sistema móvil la rueda posee una velocidad que simbolizamos como $v_{r/p}$, y la interpretamos como la velocidad de la rueda respecto a la Pantera, también llamada velocidad relativa. Esta velocidad se dirige en el sentido positivo del movimiento.



La velocidad de la Pantera respecto a Tierra también es un vector dirigido en el sentido positivo desde nuestro sistema de referencia. Ahora en la secuencia la Pantera observa que con respecto a ella la rueda se mueve hacia atrás. ¿Podremos justificar este fenómeno desde el modelo que estamos construyendo?



Recordando que:

$$v_{p/o} = v_{o'/o} + v_{p/o'} \tag{9}$$

Esta expresión general que planteamos podemos utilizarla para nuestro análisis, debiendo colocar los subíndices correspondientes al caso y analizar la relación vectorial establecida.

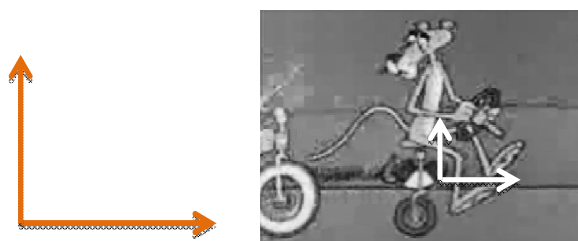
$$v_{r/T} = v_{r/P} + v_{p/T} \tag{10}$$

En nuestro ejemplo estamos observando a la rueda desde dos sistemas de referencia. La expresión anterior nos dice que la velocidad de la rueda con respecto al sistema Tierra es igual a la suma de la velocidad de la rueda respecto a la Pantera, más la velocidad de la Pantera respecto a Tierra.

Despejando de la expresión (10) el término correspondiente a la velocidad relativa, tenemos que:

$$v_{r/P} = v_{r/T} - v_{p/T} \tag{11}$$

Si la velocidad de la rueda con respecto a Tierra es menor que la velocidad que lleva la Pantera respecto al mismo sistema, encontramos que la velocidad relativa es negativa, explicando de esta manera lo observado por la Pantera como sistema móvil.

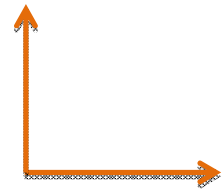


Recordemos que la velocidad de la Pantera Rosa es constante en todo momento, luego analizando la secuencia de imágenes vemos que la rueda delantera comienza a moverse aparentemente hacia atrás, hecho que se evidencia en la mirada la Pantera Rosa.

La aceleración que determinarán ambos observadores será la misma independientemente del sistema elegido.

Movimiento en una dimensión

El auto amarillo viaja con una rapidez de 180km/h al sobrepasar al auto rojo el cual lleva una rapidez de 165km/h. ¿Cuál será la velocidad relativa del auto rojo, respecto al auto amarillo?



Comenzaremos colocando los sistemas de referencia correspondientes para el análisis del movimiento que estamos analizando. Un sistema lo establecemos fijo a Tierra (ejes marrones en la figura), otro sistema lo colocamos en el auto amarillo (ejes blancos en la figura) que es desde donde vamos a tener al otro observador. Recordar que la pregunta se refiere a la velocidad relativa del auto rojo, respecto al auto amarillo.

Ambos vehículos se mueven en línea recta, por lo cual el movimiento es rectilíneo. La suma vectorial se puede resolver sumando algebraicamente los módulos de las velocidades dadas como dato en el inicio del problema. Otro punto a analizar es el hecho que establecimos en nuestro sistema de referencia que el sentido positivo es hacia la derecha y los autos se mueven hacia la izquierda, es decir, ambos autos tienen un sentido negativo.

Las velocidades que nos da el problema, son velocidades medidas desde el sistema fijo a Tierra. Ahora bien, la velocidad del auto amarillo es la velocidad con que se desplaza el sistema de referencia móvil, desde el cual, voy a explicar el movimiento del otro vehículo (auto rojo).

Planteando la expresión de velocidades relativas tenemos que:

$$v_{p/o} = v_{o'/o} + v_{p/o'} \quad (12)$$

En donde debemos identificar cada término con los datos de nuestro problema.

El cuerpo observado es el auto rojo desde dos sistemas de referencias distintos. La velocidad del auto rojo es $v_{rojo/Tierra}$ o también $v_{r/T}$.

La velocidad del auto amarillo con respecto a Tierra es $v_{amarillo/Tierra}$ o también $v_{a/T}$.

Por último la velocidad del auto rojo respecto al auto amarillo será simbolizada como $v_{rojo/amarillo}$ o también $v_{r/a}$.

Ahora podemos expresar que:

$$v_{r/T} = v_{r/a} + v_{a/T} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta el sentido del movimiento, tenemos:

$$-v_{r/T} = v_{r/a} - v_{a/T} \quad (14)$$

La velocidad relativa será:

$$v_{r/a} = -v_{r/T} + v_{a/T} \quad (15)$$

$$v_{r/a} = (-165 + 180)km/h \quad (16)$$

$$v_{r/a} = 15km/h \quad (17)$$

El conductor del auto amarillo ve que el auto rojo se le aproxima con una rapidez de 15km/h, siguiendo un sentido positivo, de acuerdo al sistema de referencia elegido.

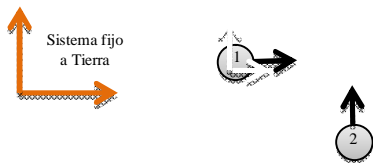
Movimiento relativo en dos dimensiones

Realizaremos una interpretación del movimiento relativo cuando los cuerpos en estudios se mueven siguiendo dos direcciones diferentes.

Las relaciones de movimiento relativo introducidas al comienzo del texto siguen vigentes. Recordar que las relaciones, son vectoriales y debemos interpretarlas y analizarlas como tal.

Comenzaremos con el análisis de dos cuerpos que se mueven en direcciones perpendiculares entre sí y marchan hacia su encuentro en un punto del espacio.

El movimiento debe analizarse desde un sistema fijo a Tierra y otro móvil respecto a cualquiera de los dos cuerpos que aparecen en la figura. Colocaremos el sistema móvil en el cuerpo 1 y procederemos al análisis de la velocidad relativa respecto al cuerpo 1. En otras palabras explicaremos que se observa desde la posición del cuerpo 1.



Una vez posicionados los sistemas de referencia, observamos el movimiento del cuerpo 2 y decimos que:

$$v_{2/T} = v_{2/1} + v_{1/T} \tag{18}$$

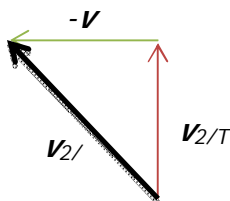
Analizando sus direcciones tenemos:

$$v_{2/T} \hat{j} = v_{2/1} + v_{1/T} \hat{i} \tag{19}$$

La velocidad relativa del cuerpo 2 respecto al 1 será:

$$v_{2/1} = v_{2/T} \hat{j} - v_{1/T} \hat{i} \tag{20}$$

Gráficamente podemos observar cuál es la dirección y sentido de la velocidad relativa, como se muestra en la siguiente figura.



Desde la posición del cuerpo 1 se observa que el cuerpo 2 se aproxima hacia el mismo en una dirección que forma cierto ángulo respecto al vector velocidad del cuerpo 2.

En este movimiento existe un ángulo recto entre la velocidad del cuerpo 1 y la velocidad del cuerpo 2. Luego podemos utilizar el Teorema de Pitágoras para resolver esta situación.

Es necesario aclarar que el Teorema de Pitágoras aplicado solo a los módulos de las velocidades no resuelve nuestro problema, dado que debemos comunicar la dirección y el sentido del vector velocidad resultante en el desarrollo de nuestro análisis.

$$|v_{2/1}| = \sqrt{|v_{2/T}|^2 + |v_{1/T}|^2} \tag{21}$$

De esta manera completamos el desarrollo para un caso particular de movimiento en el plano, dando el ángulo con respecto a la vertical.

Movimiento en el plano. Análisis de dos cuerpos con direcciones no perpendiculares.

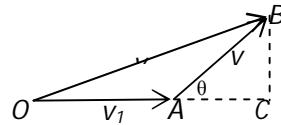
El siguiente ejemplo nos permitirá completar la idea de la interpretación del movimiento relativo. Para ello necesitaremos la ayuda de herramientas matemáticas como son el Teorema del coseno y del seno, también podemos utilizar la descomposición de los vectores intervinientes en el movimiento y resolver por componentes, en este caso el cálculo de la dirección y el módulo del vector resultante ya fue tratado con anterioridad.

Teorema del coseno

La suma de dos vectores de módulos v_1 y v_2 nos permite obtener un nuevo vector de módulo v . mostraremos como podemos conocer el módulo del vector v resultante de la suma de los vectores v_1 y v_2 conociendo solamente el módulo de ambos vectores y el ángulo entre ellos.

En la figura se puede observar que:

$$v = v_1 + v_2 \quad (22)$$



Si proyectamos hasta la intersección con el punto C, obtenemos un triángulo rectángulo, cuyos catetos son los segmentos OC, BC y la hipotenusa es el segmento OB.

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 \quad (23)$$

En donde:

$$OC^2 = (OA + AC)^2 \quad (24)$$

Luego desarrollando el término entre paréntesis y sabiendo que $OA = v_1$ y que $AC = v_2 \cos \theta$. Por último $BC = v_2 \sin \theta$.

$$OC^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \theta + (v_2 \cos \theta)^2 \quad (25)$$

$$v^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \theta + (v_2 \cos \theta)^2 + (v_2 \sin \theta)^2 \quad (26)$$

$$v^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \theta + v_2^2 \cos^2 \theta + v_2^2 \sin^2 \theta \quad (27)$$

$$v^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \theta + v_2^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad (28)$$

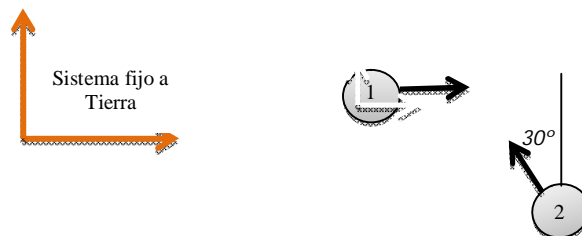
$$v^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \theta + v_2^2 \quad (29)$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta \quad (30)$$

En el siguiente ejemplo se trabajará utilizando como herramienta el Teorema del coseno.

Ejemplo

Dos cuerpos se mueven en las direcciones mostradas en la figura teniendo el cuerpo 1 una velocidad v_1 y el cuerpo dos una velocidad v_2 . Calcule la velocidad relativa del cuerpo dos respecto al cuerpo 1.



En el ejemplo la velocidad del cuerpo uno es de 5 m/s y la del cuerpo 2 es de 4 m/s. ¿Cuál será la velocidad relativa del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1?

Análisis por componentes.

Sabemos que:

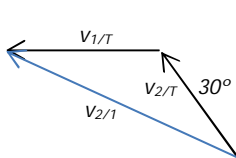
$$v_{p/o} = v_{o'/o} + v_{p/o'} \quad (31)$$

En nuestro ejemplo tomando las variables que caracterizan al movimiento:

$$v_{2/T} = v_{2/1} + v_{1/T} \tag{32}$$

Luego:

$$v_{2/1} = v_{2/T} - v_{1/T} \tag{33}$$



$$v_{2/T} = v_{2/1} + v_{1/T} \tag{34}$$

$$(v_{2/T} \sin \theta, v_{2/T} \cos \theta) = v_{2/1} + (v_{1/T}, 0) \tag{35}$$

$$v_{2/T} = (v_{2/T} \cos 120, v_{2/T} \sen 120) - (v_{1/T}, 0) \tag{36}$$

Recordando que el ángulo de los vectores se mide desde el eje x positivo, el ángulo θ tiene un valor de 120° .

$$v_{2/T} \cos 120 = 4 \frac{m}{s} (-0,5) = -2m/s \tag{37}$$

$$v_{2/T} \sen 120 = 4m/s. (0,86) = 3,44 m/s \tag{38}$$

$$v_{2/T} = ((-2; 3,44) - (5; 0))m/s = (-7; 3,44)m/s \tag{39}$$

Utilizando el Teorema del coseno:

$$v_{2/1} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60} \tag{40}$$

$$[v_{2/1}] = 7,81 m/s \tag{41}$$