

Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) co-disciplinares a la Física y la Matemática con profesores en formación en la Universidad.

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

Viviana Carolina Llanos^{1,2}, María Rita Otero^{1,2}, María Paz Gazzola^{1,2}, Marcelo Arlego^{1,2}

¹Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

E-mail: vllanos@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una investigación que desarrolla la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2012) en la Universidad. Se propone un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) a partir de una pregunta que requiere estudiar física y matemática juntas. Se presentan aquí algunos resultados preliminares de las implementaciones del REI desarrolladas durante dos años consecutivos con estudiantes de Profesorado en Matemática de la Universidad. El desarrollo y el alcance del REI implementado, se describe utilizando los componentes del REI definidos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (2012), y vinculando los mismos con las modificaciones necesarias para su viabilidad a partir de las funciones didácticas *topogénesis*, *cronogénesis* y *mesogénesis*. El análisis de estas funciones permite generar algunas conclusiones sobre la ecología de la pedagogía de la investigación en la Universidad.

Palabras clave: Recorridos de Estudio y de Investigación (REI), Funciones didácticas, Enseñanza de la física y la matemática, Formación de Profesores, Universidad.

Abstract

This work shows the results of a study which develops the Pedagogy of Research and Questioning the World (Chevallard, 2012) in the University. A Research and Study Course (RSC) on questions connected to Physics and Mathematics is carried out. We present preliminary results of the RSC developed pendant two consecutive years with Mathematics teacher students at University. The development and scope of the RSC in each group is described by using the RSC components as defined by Chevallard's Anthropological Theory of Didactics (ATD) (2012), and linking the same ones with the modifications necessary for his viability, from the didactic functions *topogenesis*, *mesogenesis* and *chronogenesis*. The analysis of these functions allows generating some conclusions concerning the ecology of the pedagogy of research and questioning the world at university.

Keywords: Research and Study Course (RSC), Didactic functions, Physics and Mathematics teaching, Training teachers of Mathematics, University.

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una investigación que tiene por objetivo comenzar a introducir en contextos controlados, una modificación sustancial en la enseñanza, tanto en la Escuela Secundaria como en la Universidad, emplazando una enseñanza por investigación. Se obtienen en el marco de la misma, resultados de introducir lo que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (2012) denomina Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM), cuyo correlato en el aula de cualquier nivel son los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI). Los REI vendrían a sustituir la pedagogía tradicional que propone una enseñanza basada en respuestas, que no responderían a ninguna

pregunta; por el estudio de preguntas “fuertes”, en particular derivadas todas de una pregunta denominada generatriz, cuyo estudio requiere de potenciales respuestas y de más de una disciplina para estudiar e investigar. Los resultados obtenidos aportarán a otras investigaciones desarrolladas en el grupo de investigación NIECyT, en el marco de la TAD (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Parra, 2013), sólo que a diferencia de las anteriores aquí proponemos el estudio de un REI genuinamente co-disciplinar, implementado tanto con estudiantes de la escuela secundaria, como con profesores en formación en la Universidad.

El Recorrido propuesto inicia con la pregunta Q_0 : ¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? Son varias las respuestas posibles, inicialmente dadas por las conjeturas que existen sobre la caída de la Piedra Movediza. Entre estas conjeturas se habría asumido que la caída podría explicarse a partir del fenómeno de Resonancia Mecánica, que es la única hipótesis científicamente tratable. Es en este sentido que se asume que en el REI propuesto es necesario estudiar conjuntamente la física y la matemática del problema. El REI inicialmente se desarrolló por el grupo de investigadores, quienes realizaron un análisis praxeológico y didáctico del problema de la caída de la Piedra. El análisis de los recorridos posibles y del estudio de la matemática y física involucrada de manera conjunta y funcional en el problema, permitió introducir el REI tanto en la Universidad con profesores en formación, como en la escuela secundaria (Otero, Gazzola, Llanos, Arlego, 2015; Gazzola, Otero, Llanos, 2015). En este trabajo presentamos los resultados parciales de introducir el REI en dos cursos con estudiantes de profesorado de Matemática para la escuela secundaria en la Universidad.

Se presentan a continuación las características de los REI y de las funciones didácticas *topogénesis*, *mesogénesis* y *cronogénesis* para su análisis, a partir de los resultados obtenidos de las implementaciones realizadas en la Universidad.

II. LOS REI Y LAS FUNCIONES DIDÁCTICAS EN EL MARCO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

Los REI son un dispositivo didáctico propuesto en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard, formulados con el objetivo de sustituir a la pedagogía de inventariar los saberes, por una pedagogía funcional, denominada de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Chevallard, 2012). En un REI, un grupo de alumnos (X) investiga y estudia una pregunta Q bajo la dirección de un profesor (y) o de un conjunto de profesores (Y); conformando un sistema didáctico $S(X;Y;Q)$ con el objetivo de encontrar una respuesta a Q , denominada R^\heartsuit . Esta respuesta no está determinada de antemano, se construye o reconstruye según ciertas condiciones, y es funcional a las mismas (Chevallard, 2009). Por otro lado, R^\heartsuit es el resultado del estudio realizado y por ello se asume que no es única ni universal, sino efectiva al sistema. Para producir la respuesta R^\heartsuit es necesario construir un medio M conformado por $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$, donde:

- Las R^\diamond son las respuestas disponibles y aceptadas por la cultura escolar, respuestas “hechas” o pre-construidas, como los libros de textos, los apuntes de un profesor, la web;
- Las preguntas derivadas de Q_0 , denominadas Q_j , que orientarían el estudio en M , y
- Las O_j , obras que deben estudiarse consideradas como potencialmente útiles para encontrar una respuesta a R^\heartsuit ; entre las que pueden considerarse teorías, montajes experimentales, praxeologías matemáticas o de otras disciplinas, etc.

Así, el sistema didáctico $S(X;Y;Q)$ construye y organiza (\curvearrowright) el medio M con el cuál engendrará o producirá (\curvearrowleft) una respuesta R^\heartsuit , y es expresado por lo que Chevallard (2004) denomina esquema herbartiano desarrollado¹. Los REI se formalizarían a partir de dicho esquema, que se denota como sigue: $[S(X, Y, Q) \curvearrowright \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \curvearrowleft R^\heartsuit$.

Los REI pueden ser monodisciplinares o co-disciplinares, dependiendo si para su estudio se requiere o no de la consideración de obras Matemáticas únicamente o conjuntamente estudiar matemática y otra disciplina. En el caso del REI propuesto en el marco de la investigación, se trata claramente de un REI codisciplinar. Para que la enseñanza co-disciplinar en el marco de un REI tenga sentido, son necesarios cambios en la constitución del medio M , y como principal característica se señala que el mismo no está predeterminado de antemano, ni su constitución está a cargo únicamente del profesor. La *mesogénesis* permite describir las características de M , que es construido por la clase, tanto a partir de respuestas externas a esta, como las distintas R^\diamond , las obras disponibles llevadas para el estudio de Q , las preguntas

¹ Esta denominación se refiere al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841), pedagogo alemán, a quien se considera el padre de la pedagogía científica. Su filosofía y su ética, inspiraron los trabajos de John Dewey y también pueden reencontrarse trazos de ellas, en las formulaciones de Chevallard, quien le rinde tributo en diversos constructos de su teoría.

derivadas y la constitución de respuestas “disponibles” a las mismas; además de las respuestas internas a M dadas por X como resultado de su estudio a cada pregunta enunciada.

Para que las modificaciones en el nivel de la *mesogénesis* tengan lugar, es necesario modificar los roles del profesor y de los estudiantes en una clase, descritos por la función *topogénesis*. La principal modificación radica en que la construcción del medio M ya no es únicamente responsabilidad del profesor o de un grupo de profesores, sí de la clase; de la que éste forma parte como director del estudio. Por otra parte, los estudiantes además de aportar sus respuestas personales o consensuadas, y tomar decisiones con relación al estudio, podrán introducir en M toda obra que consideren apropiada para acercarse a R^Y. Asociado a este cambio en el topos de los estudiantes y del profesor, se considera también necesario realizar modificaciones en los “tiempos de estudio” de las obras llevadas a M, de la elaboración de respuestas y de la formulación de preguntas, modificaciones descritas por la *cronogénesis*, que exceden claramente a los tiempos previstos en una enseñanza tradicional.

En este trabajo, se presentan algunos resultados de la implementación de un REI codisciplinar desarrollado con profesores en formación, en el último año de la carrera Profesorado en Matemática en la Universidad. Se analizan los alcances del REI en las dos implementaciones realizadas, a partir de las funciones didácticas *topogénesis*, *mesogénesis* y *cronogénesis*.

III. METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa y exploratoria. Se propone introducir una nueva pedagogía en un contexto controlado, con el objetivo de realizar enseñanza por investigación en la Universidad, por medio de un REI codisciplinar a la física y a la matemática. El diseño y análisis del REI realizado a priori de las implementaciones por los investigadores, permite considerar que el dispositivo propuesto corresponde a un REI genuinamente co-disciplinar. En el REI la matemática no es una “excusa” para estudiar física, ni tampoco la física lo es para la matemática. Ambas disciplinas juntas son necesarias para obtener una respuesta funcional a la caída de la piedra y las respuestas parciales permiten ingresar en el estudio de obras de las dos disciplinas de manera conjunta.

El recorrido es desarrollado por cuatro investigadores: uno con formación en física y matemática, dos sólo en matemática; y un físico. La conformación del equipo obedece a la co-disciplinariedad y a la complejidad de la pregunta generatriz propuesta. Inicialmente el equipo de investigación “vivió” el REI en primera persona, analizando las respuestas disponibles, y en función de ello, considerando las posibilidades para su estudio independientemente del nivel donde se pueda implementar el REI.

El análisis realizado por los investigadores permitió implementar el REI tanto en la Escuela Secundaria como en la Universidad. En este trabajo se describen los resultados de dos implementaciones realizadas en la universidad pública, en la ciudad de Tandil, Argentina, en una disciplina del área didáctica de la carrera Profesor en Matemática, donde los investigadores son profesores. Entre las dos implementaciones participaron N=25 estudiantes del último año de la carrera mencionada (N=12 en el primer año y N=13 estudiantes en el segundo). Las dos implementaciones realizadas una por cada año permiten identificar diferencias que podrían atribuirse a decisiones en el estudio, y no a características de los estudiantes en cada grupo que participaron de la investigación. En particular, los resultados obtenidos el primer año, permitieron identificar que la principal dificultad de los estudiantes en este nivel radica en el no entienden acerca de la modelización y el análisis que una actividad adecuada de este tipo permitiría realizar. En consecuencia, en el segundo año antes de comenzar la implementación los estudiantes pasaron por actividades de modelización previas. Esta diferencia es determinante en los resultados alcanzados que se describen a continuación.

En los dos años, las edades de los estudiantes oscilan entre los 21 y 33 años. Las clases se realizaron en la Biblioteca de la Universidad durante 10 semanas, totalizando 7 horas semanales, distribuidas en dos encuentros. Las características edilicias y materiales a disposición no cambian entre un año y otro, si por ejemplo cambia la selección de textos realizada por los estudiantes y la visita de sitios web, a partir de la vasta disponibilidad de la biblioteca y conexión de este edificio.

En cada implementación, los investigadores obtienen los protocolos de los estudiantes al finalizar cada encuentro, los cuales se digitalizan y se devuelven al encuentro siguiente. Además, se tomaron registros de audio generales y notas de campo a cargo de los investigadores.

Las diferencias antes mencionadas entre un año de implementación y el siguiente se describen a continuación a partir de las funciones *topogénesis*, *mesogénesis* y *cronogénesis*, en particular nos proponemos analizar ¿Cuáles son las modificaciones dadas en las funciones didácticas en cada año de implementación? y si es viable introducir una nueva pedagogía en la Universidad.

IV. EL REI Y RESULTADOS DE SU IMPLEMENTACIÓN

El REI inicia con la pregunta Q_0 : ¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? La Piedra Movediza es un ícono de la ciudad de Tandil, y atractivo mundial. Se trataba de una roca de 248 toneladas, en equilibrio en la cima de un cerro a 300 metros de altura, que experimentaba oscilaciones discontinuas cuando se la perturbaba en un lugar determinado, conocido por quienes la frecuentaban. El 29 de febrero de 1912 es la fecha de la caída de la Piedra. De esa mole han quedado tres partes ubicadas a 50 m al pie del cerro producto de su derribamiento. Este acontecimiento no sólo acabó con una maravilla del mundo, sino que además dejó a la ciudad consternada y sin su identidad. El intento por explicar la caída originó todo tipo de conjeturas, desde leyendas, mitos y hasta explicaciones científicas sobre las posibles causas que no fueron desarrolladas entonces, y en el marco de esta investigación se propone introducir el estudio de este fenómeno en la Universidad y la Escuela Secundaria con el objetivo de estudiar la física y la matemática involucradas en el problema, de una manera funcional y conjunta a partir del fenómeno en cuestión. Las implementaciones son posibles gracias al análisis realizado por los investigadores (Otero, et. al, 2015) con relación al alcance y potencial del problema, a la vez que se analizan las características de introducir una nueva pedagogía en este caso en la Universidad, y en la consideración de las diferencias identificadas entre un año y el siguiente de implementación. El REI entonces ha sido implementado en dos cursos con profesores en formación (PF). Se analizan las similitudes y diferencias entre cada implementación, a partir de las funciones didácticas.

Durante las implementaciones los PF tratan de encontrar una respuesta a la pregunta ¿cómo y por qué se cayó la Piedra? En el nivel *mesogenético* se identifica que:

- En ambas implementaciones los estudiantes ingresan al estudio de esta pregunta analizando las posibles conjeturas sobre la caída, es decir, las respuestas dadas al problema (las R^\diamond disponibles), entre las que se destacan la conjetura de la voladura con un explosivo por una huelga de obreros picapedreros; la caída por efecto de la erosión; los mitos y leyendas populares, y la conjetura de Holmberg que atribuye la caída por efecto de la resonancia mecánica. En ambos casos los grupos justifican por qué la conjetura de Holmberg sería la más adecuada para el problema. Este estudio de las respuestas dadas al problema llevó a los estudiantes a proponer y considerar nuevas preguntas, como por ejemplo, ¿Cómo era la morfología de la piedra? ¿Qué es una oscilación y qué tipos hay? ¿Qué ecuaciones describen el movimiento? ¿Cuáles son las soluciones? ¿Qué modelo físico conocido es compatible con la Piedra Movediza? ¿Cuál es el modelo matemático subyacente? Las respuestas a las mismas fueron consideradas en ambos casos, pero se identifican en este nivel diferencias entre un año y el siguiente:

- En el primer año, los PF se conformaron con buscar entre las R^\diamond disponibles, un modelo físico y matemático “hecho”, para responder a la pregunta inicialmente planteada. Esperaban que el modelo que encontrarían les permitiera responder por ejemplo ¿a qué hora cayó la piedra? ¿cuántas veces la empujaron hasta que se cayó?, lo cual indica las dificultades que tienen para entender qué les puede ofrecer un modelo matemático del sistema y qué no. Por otro lado, con relación al estudio de las oscilaciones se preocuparon por encontrar un modelo físico “hecho”, adaptable a la situación real, es decir tomar los modelos disponibles en los libros de física y en la web, sin considerar si dicho modelo se ajustaría o no al de la Piedra. Entre los modelos dados, decidieron adoptar el del péndulo físico, cuyo modelo matemático es similar al que podría representar el problema, aunque físicamente es inadecuado. Este modelo parecía funcional a los PF pues la matemática subyacente no parecería presentar problemas inicialmente, dado que en simultáneo a la implementación ellos están realizando el curso de Ecuaciones Diferenciales, que son las ecuaciones del modelo. El modelo por otro lado los lleva a considerar otras preguntas como ¿qué es y cuál es el momento de inercia? ¿cómo calcular el momento de inercia de un sólido irregular? ¿qué sólido regular es una buena aproximación de la Piedra Movediza para obtener la inercia? El protocolo del PF6 de la Figura 1 permite interpretar cómo los estudiantes a partir del modelo del péndulo físico ingresan en el estudio de la inercia y como consecuencia de los sólidos rígidos, calculando la inercia para distintos sólidos regulares o amorfos, que resultasen un modelo apropiado para la forma irregular de la piedra. El protocolo de PF3 (Figura 2) muestra cómo en su intento por calcular la inercia aproximan la Piedra a un cono regular y obtienen así el “valor” buscado. Con relación a la matemática también se señala como una dificultad el hecho de que no hayan intentado verificar la solución de la ecuación dada en los libros, que ellos antes habían encontrado; y en su lugar intentan resolver la ecuación lo que produjo problemas para arribar a la solución final, y como consecuencia para interpretar la solución física del sistema. Un análisis a posteriori de estos resultados permitió a los investigadores identificar que los profesores en formación tienen dificultades para comprender la utilidad de un modelo matemático y del análisis que puede derivarse del mismo, aspecto que fue determinante para los investigadores en el segundo año de implementación.

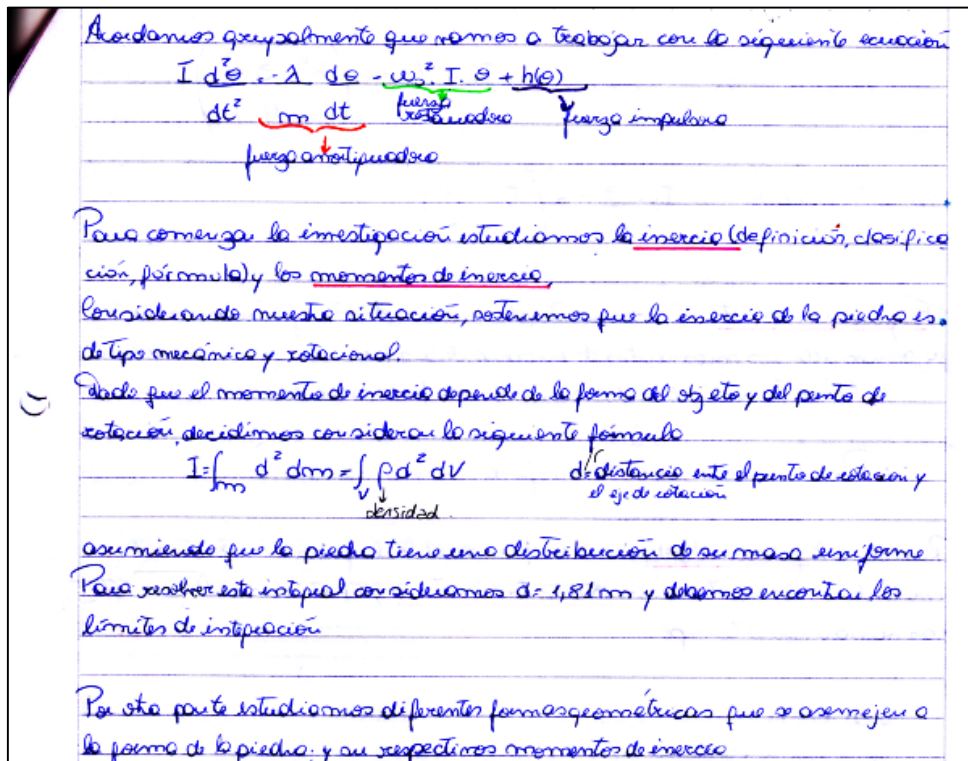


FIGURA 1. Protocolo correspondiente al profesor en formación PF6

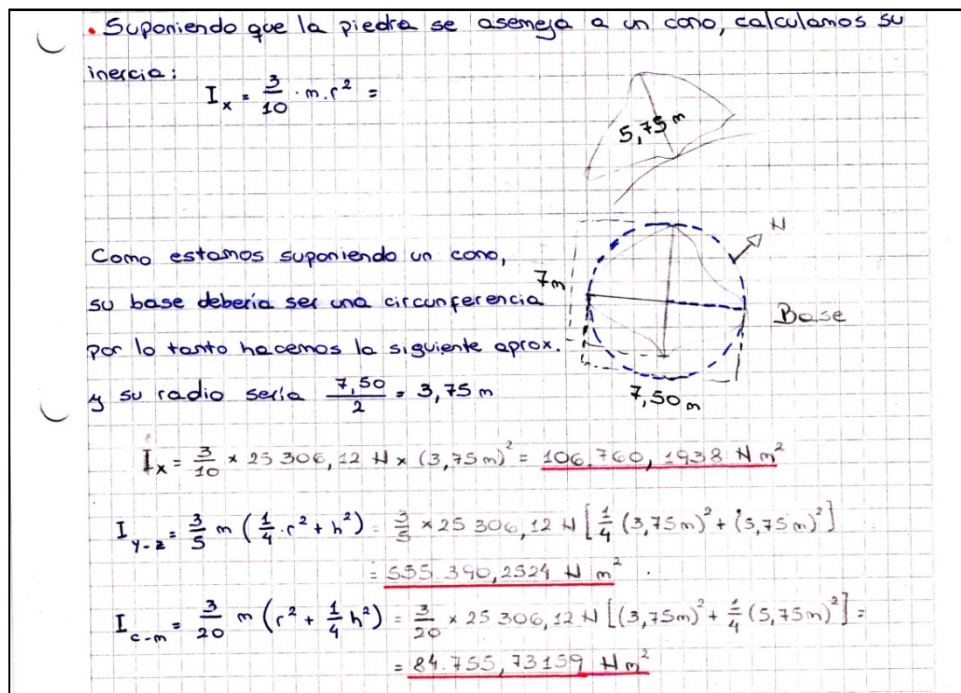


FIGURA 2. Protocolo correspondiente al profesor en formación PF6

En el segundo año de implementación, los profesores-investigadores introducen modificaciones con relación a la dirección del REI. A diferencia del año anterior, en este caso ni bien surgieron los modelos de péndulo y de resorte se puso énfasis en la generación y análisis de todos los casos posibles. Las respuestas R^0 estudiadas por los PF permitieron por un lado cubrir el estudio del MAS para el péndulo simple, el resorte, y el péndulo físico, resultados obtenidos por un grupo de estudiantes; mientras que otro grupo estudió el modelo del resorte en todas las posibilidades. Esto permitió generar una respuesta completa de los tres modelos y sus posibilidades, a partir de lo cual, los PF concluyeron que el

mismo modelo matemático representaba nueve sistemas físicos diferentes y se dedicó un tiempo considerable al análisis de las diferencias y las similitudes entre los modelos físicos y matemáticos y su relación con el sistema real que pretendíamos modelar. Estos resultados se reflejan en el protocolo del PF21 (Figura 3), que completa el instrumento propuesto por los investigadores con el objetivo de potenciar tal comparación entre los sistemas. Luego, las soluciones de las ecuaciones que están en los libros fueron verificadas. Es decir, los PF verificaron la solución de la ecuación diferencial dada en los libros, conocida por ellos, en lugar de resolver la ecuación diferencial como hicieron los estudiantes del año anterior.

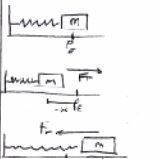
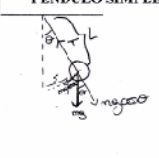
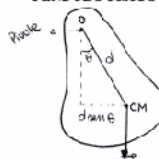
MOVIMIENTO	MAS (Movimiento Armónico Simple)	Movimiento Amortiguado	Movimiento Forzado
RESORTE 	Ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Solución: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\gamma^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ Solución: $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F \cos(\omega t)}{m}$ $\tan \phi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ Solución: $x(t) = \frac{F \cos(\omega t + \phi)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$ Análisis de Resonancia
PÉNDULO SIMPLE 	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$ con $\gamma = \frac{b}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{F \cos(\omega t)}{m l}$ $\tan \phi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ Solución: $\theta(t) = \frac{F \cos(\omega t + \phi)}{m l \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$ Análisis de Resonancia
PÉNDULO FÍSICO 	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$ con $\gamma = \frac{b}{I}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$	Ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{F \cos(\omega t)}{I}$ $\tan \phi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ Solución: $\theta(t) = \frac{F \cos(\omega t + \phi)}{I \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$ Análisis de Resonancia

FIGURA 3. Protocolo correspondiente al profesor en formación PF21

Además en la segunda cohorte algunos estudiantes plantearon objeciones fuertes a la posibilidad de utilizar el modelo del péndulo físico para la piedra, porque no es posible tratar a un cuerpo apoyado como si fuera un péndulo físico “invertido”. Una particularidad del trabajo desarrollado por los PF en este año es que cada resultado que obtienen, lo analizan en función o no de su pertinencia con el sistema real. El protocolo del estudiante PF13 de la Figura 4 justifica cómo es que ellos colocan nuevas preguntas relativas al modelo real, como ¿el movimiento de la piedra es modelizado por un péndulo físico? Justifican que no es apropiado y llevan el problema de ¿qué modelo podemos encontrar para modelizar la Piedra Movediza? Los estudiantes reingresan en el estudio del sistema real y en las características de la piedra, principalmente con relación a la base de apoyo, de tal modo que el recorrido transitó por los modelos que se remiten específicamente al sistema y que no están en los libros, lo que justifica el papel insoslayable de los especialistas en física porque el modelo fue propuesto por los investigadores. El modelo físico introducido en el medio se correspondería con el de un sólido rígido en roto-traslación, que remite al mismo modelo matemático analizado antes por los estudiantes. A partir de esto, se avanzó también en el cálculo y estimación de los parámetros de la solución de la ED, y en la elaboración de una respuesta que permitiría explicar, a partir del modelo, las características de la caída. A diferencia del año anterior, el cálculo por la inercia en esta implementación no ha sido siquiera un problema para los estudiantes. Entre las respuestas llevadas por X al medio habrían obtenido este resultado, a partir del cálculo realizado por Ingenieros de la UNCPBA, cede Olavarría, responsables de realizar la réplica de la Piedra Movediza (Peralta, et. al, 2008) hoy puesta en el cerro.

Como resultado del estudio en el segundo año de implementación, los estudiantes concluyen que es probable que un grupo reducido de personas pueda haber provocado que la piedra entre en resonancia, fenómeno que explicaría su caída. Entre sus respuestas justifican que por medio del estudio de nociones de física y matemática y un trabajo de modelización adecuado, es posible confirmar la conjetura de Holmbger publicada en 1912. Por otro lado, el cálculo y estimación de los parámetros les permitió establecer los valores posibles que dichos parámetros de la solución de la ecuación diferencial podrían tomar para que la Piedra haya caído.

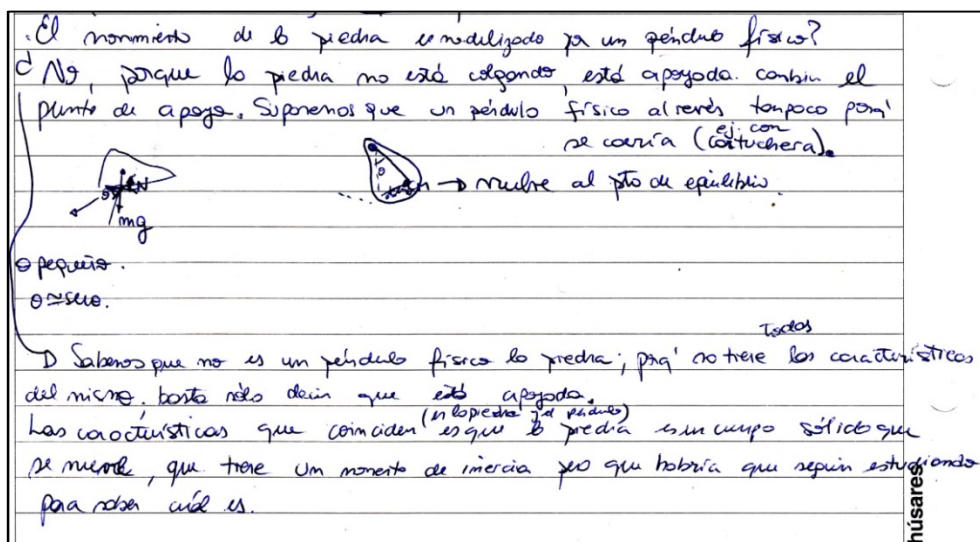


FIGURA 4. Protocolo correspondiente al profesor en formación PF13.

Con relación a los modelos, es que se identifican las principales diferencias entre un año y el siguiente de implementación. En el primer año los estudiantes no ingresaron siquiera en el cuestionamiento de si el péndulo físico sería o no apropiado para describir el sistema real. En el segundo, los estudiantes ingresan al medio este problema y los investigadores introducen un modelo que se ajusta mejor al sistema real y a la vez es apropiado para los estudiantes; pero que no es el modelo más desarrollado por los investigadores al momento. Estos cambios a su vez pueden explicarse por las decisiones y “espacios” dados a los actores del proceso de estudio en cada año.

En el nivel de la *topogénesis* se describen las decisiones en cada implementación. En el primer año los estudiantes ingresan en el estudio de las respuestas disponibles, y principalmente en el cálculo de la solución de la ecuación diferencial del sistema del péndulo físico, lo que genera problemas no sólo en los cálculos sino en la interpretación física del sistema. Los investigadores identifican que el problema radicaría en que los PF no comprenden la utilidad del modelo matemático, ni el papel de los parámetros que consideran fijos e inamovibles, lo que imposibilita avanzar con el desarrollo del REI. Como consecuencia, al año siguiente, antes de comenzar la implementación, se dedican ocho sesiones al desarrollo de dos REI intra-matemáticos (Chappaz y Michon, 2003; Ruiz, Bosch y Gascón, 2007), que los PF vivieron en primera persona, enfatizando el papel de la modelización y el uso de dispositivos tales como planillas de cálculo y graficadores. Esta decisión motiva el trabajo con los modelos en la segunda cohorte, que es responsabilidad de los estudiantes, y la estimación de parámetros que consiguen obtener como resultado del estudio.

El tiempo “invertido” en cada implementación explica que la *cronogénesis* también se ha visto afectada positivamente en el segundo año, pues los estudiantes en el primero dedicaron mucho tiempo al cálculo de los parámetros, en el intento de encontrar los valores fijos, como se puede interpretar por ejemplo con el caso de la inercia que los llevó a ingresar en el estudio de los sólidos regulares o amorfos, para modelar la forma irregular de la piedra, y obtener como consecuencia el valor del parámetro buscado. En el segundo año, todo el trabajo dedicado a la “generación” de los sistemas físicos para el resorte, péndulo simple y físico, y luego para el modelo del sólido rígido en roto-traslación; y la identificación del modelo matemático subyacente, produjo la principal dilatación en el tiempo, lo mismo que el análisis del modelo y la determinación de los valores posibles que podría tomar cada parámetro. Las diferencias entonces se identifican también en la dilatación del tiempo es estudio invertido en cada año, que en cualquier caso es muy superior al estudio de estas nociones en una enseñanza tradicional.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos descripto las características de las implementaciones, a partir de las funciones didácticas, usando los componentes de un REI. Como una característica destacada del trabajo realizado con los profesores en formación en la Universidad, enfatizamos que, más allá de las restricciones inicialmente puestas por los estudiantes, y las relativas al problema de la modelización identificadas, los dos grupos tuvieron oportunidad de vivenciar una enseñanza por investigación. En el marco de una enseñanza co-disciplinar, fue posible que los futuros profesores estudien física y matemática

conjuntamente desde el inicio, a pesar de la resistencia inicialmente colocada a los estos, porque ellos son de matemática, entonces ¿por qué deberían estudiar física?

La importancia de ingresar en el estudio de otra disciplina se justifica por la posibilidad de vivir un REI genuinamente co-disciplinar. El principal problema aquí se presenta en la Matemática, en particular, en la funcionalidad de la matemática, a pesar de la fuerte formación universitaria en la disciplina que poseen los estudiantes. La dificultad de la no funcionalidad de los conocimientos adquiridos en su formación, tanto matemáticos, como de otras disciplinas, sería el principal obstáculo identificado en la formación de profesores. En qué medida una enseñanza por REI vendría a sortear estas dificultades?

Consideramos que, el hecho de hacer vivir una enseñanza por investigación les permite a los futuros profesores entender cómo se desarrolla en una clase normal una enseñanza basada en preguntas mediante un REI. Si bien esto es muy positivo, no podemos creer que esta posibilidad habilita a los futuros profesores al desarrollo escolar de una enseñanza por investigación plena, pues la dificultad aquí radica en el diseño de los dispositivos REI que no pueden de ningún modo ser responsabilidad de un único profesor, y en las restricciones propias de cada institución en cualquier nivel. Sí consideramos que esta oportunidad podría bien permitir a los profesores hacer vivir toda vez que sea posible una enseñanza basada en preguntas, pues el desarrollo del REI sin dudas ha conseguido introducir en los estudiantes algunos gestos auspiciosos.

Como se evidencia en los protocolos y en la descripción realizada a partir de las funciones didácticas *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*, el desarrollo de una enseñanza basada en preguntas ha sido posible y positiva, así como la construcción de respuestas por parte de los profesores en formación ha resultado contundente. Es un paso pequeño pero muy prometedor, que invita a seguir intentando en la formación de profesores hacer vivir las actitudes de la pedagogía de la investigación toda vez que sea posible, con el propósito claro de introducir alguna modificación en su práctica profesional futura, por pequeña que sea.

REFERENCIAS

Chappaz, J. y Michon, F. (2003). Il était une fois.... La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en <http://yves.chevallard.free.fr/>. Obtenido el 14 de Abril de 2015.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Obtenido el 5 de Mayo de 2015.

Chevallard, Y. (2012). Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. *Journal du séminaire TAD/IDD*. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Obtenido el 7 de Mayo de 2015.

Fonseca C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, 23 (1), pp. 97-121.

Gazzola, M. P., Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2015). Teaching of mathematics and physics in secondary school through research and study paths. *International Journal of Education and Practice*, 3 (2), pp. 85-89.

Otero, M. R., Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Arlego, M. (2015). Recorridos de estudio y de investigación codisciplinares a la física y la matemática en tres grupos de estudio: profesores en formación, estudiantes de secundaria e investigadores. *V Encuentro Iberoamericano sobre Investigación en Enseñanza de las Ciencias (V EIBIEC)*. Universidad de Burgos.

Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken.

Peralta, M. H., Ercoli, N. L., Godoy, M. L., Rivas, I., Montanaro, M. I. y Bacchiarello, R. (2008). Proyecto estructural de la réplica de la piedra movediza: comportamiento estático y dinámico. *XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*.