EDITORES INVITADOS

DIAGRAMAS, VISUALIZACIÓN Y FORMALISMO EN LA FILOSOFÍA DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Eduardo N. Giovannini y Javier Legris

En años recientes, ha habido un creciente interés por los aspectos visuales del razonamiento lógico y matemático (Mancosu y otros 2005, Barwise y Etchemendy 1996). Este interés ha surgido de la revalorización de los diagramas como instrumentos válidos para el razonamiento formal; más aún, podría decirse que esta reconsideración de los diagramas ha estado íntimamente ligada a la revisión de su empleo diverso en la práctica matemática. La concepción clásica de los diagramas como una mera herramienta subsidiaria para el razonamiento ha sido así desafiada por una nueva mirada sobre los diagramas, de acuerdo con la cual éstos deben ser considerados como formas legítimas del razonamiento lógico y matemático. El objetivo de los trabajos reunidos en este volumen es reflexionar y promover una discusión acerca de la naturaleza y la función de las representaciones visuales y los diagramas en las ciencias formales, desde una perspectiva filosófica que privilegia la práctica matemática.

En la filosofía de la matemática de la mayor parte del siglo XX, los diagramas -geométricos, lógicos, etc.- fueron considerados en general como una herramienta auxiliar o heurística para facilitar y promover ciertas cadenas de inferencia, pero que sin embargo no debían desempeñar ningún papel en el razonamiento mismo. Es decir, aunque se les reconocía un valor pedagógico importante, los diagramas fueron así señalados como dispensables en cuanto herramientas demostrativas válidas. Las pruebas debían tener por lo tanto una formulación "lingüística" o "sentencial", y en el caso particular de las demostraciones formales, ellas consistían estrictamente en una secuencia de fórmulas de un lenguaje formal; una prueba era así un objeto sintáctico que consistía en una cadena finita de sentencias o fórmulas. Por ejemplo, los *Elementos* de Euclides, obra que desde la antigüedad fue concebida como un ejemplo emblemático del razonamiento cuidadoso y del rigor matemático, comenzó a ser tomado como un claro caso de razonamiento informal debido a la utilización esencial que allí se hacía de los diagramas geométricos. Esta mirada sobre los diagramas está claramente conectada con la llamada crisis de los fundamentos de la matemática, que en los comienzos del siglo pasado condujo a los conocidos programas de fundamentación.

Ahora bien, hacia fines del siglo XX, algunos filósofos e historiadores de la matemática empezaron a cuestionar si efectivamente tales programas de fundamentación llegaban a agotar o no todos los problemas filosóficos respecto de la naturaleza de la matemática, y sobre todo, del conocimiento matemático. De este modo, el interés se desplazó hacia la consideración de lo que los matemáticos realmente hacen cuando producen matemática, poniendo un especial énfasis en la actividad matemática como una actividad humana (Cf. Mancosu 2008). Esta nueva perspectiva incluía una noción más abarcativa de prueba, en la que la investigación en los campos de la enseñanza matemática, la inteligencia artificial y las ciencias cognitivas resultaron muy influyentes. En consecuencia, el razonamiento diagramático fue reexaminado en diferentes aspectos: lógicos, epistemológicos y filosóficos (see Mancosu 2005, Esquisabel & Sautter 2013). La indispensabilidad de las representaciones diagramáticas en el conocimiento matemático fue objeto de una intensa discusión, y en ocasiones defendida explícitamente.

Quizás no resulte exagerado afirmar que muchas de las ideas que guiaron esta revisión pueden encontrarse en el pensamiento de Charles S. Peirce (1839-1914). En sus últimos trabajos de lógica, Peirce se concentró en el razonamiento diagramático, examinándolo en el contexto de su teoría de signos. Asimismo, en el programa metamatemático de David Hilbert (1862-1943), la justificación epistémica de los procesos combinatorios descansa en la noción de intuición sensible. El trabajo de Peirce sobre razonamiento diagramático fue además precedido por las propuestas de G. W. Leibniz (1646-1716) y J. H. Lambert (1728-1777), entre otros. En ambos casos, la noción de conocimiento simbólico desempeñó un papel central permitiendo la relación entre sistema de signos y pensamientos. Ello representó un primer intento de proporcionar una explicación del papel de los diagramas en el conocimiento humano (véase Lassalle Casanave 2012).

Este particular e interesante panorama en el contexto de la filosofía actual de la matemática motivó el simposio “Diagramas, visualización y formalismo en la filosofía de la práctica matemática”, que formó parte del decimoséptimo Congreso Nacional de Filosofía, en la ciudad de Santa Fe -Argentina-, del 4 al 8 de agosto de 2015. En el simposio se analizaron diferentes casos históricos, así como también se discutieron problemas de carácter más sistemático. El simposio se propuso promover esta nueva perspectiva sobre los diagramas, así como contribuir también a las discusiones actuales. El presente volumen contiene versiones revisadas y evaluadas (con referato ciego) de algunas de las contribuciones presentadas en dicho simposio.

El presente volumen se inicia con un par de artículos que abordan temas de la filosofía del siglo XVII. En primer lugar, en su artículo titulado “Lenguaje racional y método axiomático en el siglo XVII: dos proyectos con un cierto aire de familia”, Narváez lleva a cabo un examen comparativo de dos proyectos metodológicos que ejercieron una gran influencia en la filosofía del siglo XVII, a saber: por un lado, el intento de crear un lenguaje racional universal; por otro lado, el intento de axiomatizar el conocimiento filosófico siguiendo el modelo de la geometría euclidiana. Tras realizar una presentación de los rasgos metodológicos y epistemológicos más significativos de ambos proyectos, Narváez busca mostrar que en ambos proyectos subyace un trasfondo de ideas, preocupaciones e intereses comunes.

En segundo lugar, en el artículo “Los infinitesimales actuales de Leibniz”, Raffo Quintana se propone dilucidar los sentidos de lo infinitesimal que operan en el pensamiento juvenil de Leibniz, a propósito del problema de continuo. Más precisamente, el autor distingue dos sentidos endilgados por Leibniz a los infinitesimales en el período que va de 1672 a 1676, esto es, como entidades que componen actualmente el continuo y como cantidades infinitamente pequeñas que son ficticias. Raffo Quintana busca mostrar que estos dos sentidos distintos de lo infinitesimal no se contradicen, de manera tal que Leibniz habría defendido infinitesimales actuales que componen el continuo al mismo tiempo que habría concebido ciertas cantidades infinitamente pequeñas ficticias.

El siguiente par de artículos se ocupa de la concepción diagramática de la lógica elaborada por Charles Sanders Peirce (1839–1914). En su artículo “Iconos y proposiciones en la lógica diagramática de C.S. Peirce”, Javier Legris argumenta que uno de los problemas centrales de los que debe dar cuenta dicha concepción diagramática consiste en explicar el modo de conexión entre las formas lógicas diagramáticas y los razonamientos concretos, con contenido, formulados en el lenguaje ordinario. La solución que la teoría de los signos de Peirce ofrece para este problema parte de la observación de que los íconos pueden ser empleados para hacer afirmaciones en el contexto de lo que este autor llama “decisigno”. De este modo, en primer lugar, Legris se encarga de describir la manera de obtener “decisignos” a partir de diagramas; en segundo lugar, presenta una discusión de las consecuencias para la filosofía de la lógica que resultan de la generalización del concepto de proposición propuesto por Peirce. La consecuencia más importante, concluye Legris, es que la relación de deducción deja de depender del lenguaje (ya sea ordinario o un lenguaje formal) y pasa a estudiarse desde la perspectiva de una teoría general de los signos.

Por otra parte, en el artículo “Gráficos de Peirce sin pérdida de información”, Frank Thomas Sautter presenta una serie de modificaciones de los sistemas diagramáticos de prueba para la Lógica Proposicional Clásica desarrollados por C.S. Peirce, más precisamente, de los Gráficos Entitativos y del Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales. Sautter desarrolla además dos argumentos principales para justificar las modificaciones propuestas a los sistemas originales de Peirce, a saber: el argumento del interés en la representación previa de la conclusión y el argumento de la superfluidad de la pérdida de información. Luego, estos argumentos lo llevan a concluir que, a diferencia de otros sistemas diagramáticos de prueba (por ejemplo, los Sistemas de Venn y de Lewis Carroll), en los sistemas de prueba de Peirce no es suficiente representar gráficamente las premisas para obtener la representación gráfica de la conclusión si el argumento es válido; es necesario modificarlas por las reglas de inferencia hasta obtener la representación de la conclusión. Pero ello significa que resulta conveniente situar los sistemas de prueba de Peirce en una subcategoría de los sistemas heterogéneos de prueba, distinta de la subcategoría a la que pertenecen la gran mayoría de los sistemas heterogéneos de prueba.

El artículo siguiente, “Lenguaje ordinario y formalización en la temprana concepción axiomática de Hilbert”, ofrece una interpretación de la concepción abstracta o formal del método axiomático desarrollada por David Hilbert (1862-1943). En su trabajo, Giovannini utiliza una serie de fuentes manuscritas de Hilbert, correspondientes al período 1891-1905, para analizar el modo en que el matemático alemán concibe la relación entre la utilización del lenguaje ordinario y su concepción formal del método axiomático. Más aún, se intenta mostrar que la decisión de Hilbert de optar por el lenguaje tradicional de la geometría no se explica exclusivamente en virtud de ciertas limitaciones conceptuales propias de aquella etapa inicial, por ejemplo, la carencia de un aparato deductivo explícitamente formulado que sirva de base para sus teorías axiomáticas. Por el contrario, se argumenta que esta preferencia de Hilbert obedece a su manera de concebir, en esta etapa temprana, la naturaleza y función del nuevo método axiomático, en particular en su aplicación a la geometría.

El volumen continúa con el artículo "Demostraciones heterogéneas: revisando las preguntas" de José Seoane, en donde se lleva a cabo un examen crítico del concepto de 'demostración heterogénea'. Como es bien sabido, el clásico artículo "Visual Inference and Valid Reasoning" de Barwise y Etchemendy (1996) ha ejercido una poderosa influencia en el desarrollo de las investigaciones filosóficas sobre la heterogeneidad inferencial. En su artículo, Seoane se propone revisitar dicha obra, no tanto para aislar las tesis principales, cuanto para hacer emerger las cuestiones a las que aquellas buscan hacer justicia. El principal resultado consiste en ciertas reformulaciones de algunas de las interrogantes iniciales.

Finalmente, los dos últimos trabajos se concentran en el estudio de la función e importancia de la "visualización" en la compresión y enseñanza de la matemática. En el artículo titulado "Relevancia de la evidencia sensible en matemática: articulación dinámica entre figuras y formas analíticas", Rosset Luna y Visokolskis se proponen analizar la articulación dinámica entre figuras y formas analíticas en matemática, a partir de una caracterización de las imágenes como tipos de metáforas, siguiendo la perspectiva aristotélica y versiones actualizadas de su exposición. Más precisamente, el trabajo se concentra en un estudio de caso de construcción matemática de un resultado con demostración concluyente. Sin embargo, a la par de la prueba formal de tal resultado, se aborda una “prueba visual” del mismo, un modo de inteligibilidad no demostrativa de dicho resultado pero que ofrece, a cambio, una comprensión significativa, en un intento de analizar el valor cognitivo de este tipo de explicación matemática, sus ventajas y desventajas frente a las demostraciones formales.

Por otra parte, en el artículo “Resolución de problemas en matemática e ingeniería. ¿Visualizaciones elegantes versus resoluciones eficientes?”, Vergara Laucirica realiza un análisis de las estrategias de resolución de problemas matemáticos parte características de dos actividades, o mejor, comunidades profesionales: la matemática según es desarrollada por los matemáticos profesionales y la ingeniería. El artículo propone y analiza entonces una diferenciación entre dos estilos diferentes de abordaje de los problemas matemáticos en los procesos de solución de los mismos: (1) la búsqueda de expresiones visuales elegantes versus (2) la búsqueda exploratoria de manipulaciones estratégicas eficientes. El autor se propone caracterizar ambos tipos de búsqueda de soluciones a un problema, más allá de las profesiones por las que fueron impulsadas, con el objetivo de especificar dos metodologías de resolución de problemas que influyen incluso en distintos momentos de trabajo y en diferentes tipos de problemas en ambos ámbitos profesionales. Finalmente, se argumenta que es posible ofrecer un modelo de resolución de problemas donde la eficiencia se ponga a la par de la elegancia y simplicidad

El simposio recibió el generoso apoyo del CONICET (PIP 112-201101-00364). Quisiéramos expresar nuestro agradecimiento a los *referees* anónimos por los valiosos comentarios y observaciones a los artículos que forman este volumen. Sin el apoyo y la paciencia de Leticia Minhot, editora responsable de *Representaciones*, la publicación de este volumen no hubiera sido posible.

Referencias

Allwein, G. y Barwise, J. (eds.) (1996) *Logical Reasoning with Diagrams,* New York, Oxford University Press.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991). “Visual Information and Valid Reasoning", reimpreso en Allwein, G. y Barwise, J (eds.) (1996).

Esquisabel, Oscar y Sautter, F. (eds.). *Conocimiento gráfico y conocimiento simbólico: historia y teoría*, Buenos Aires, Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires.

Lasalle Casanave, A. (2012). *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, London, College Publications.

Mancosu, P., Jørgensen, K. F. y Pedersen, S. (2005). *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics,* Dordrecht, Kluwer, 2005.

Mancosu, P. (ed.) (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press.

DIAGRAMS, VISUALIZATION AND FORMALISM IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICAL PRACTICE

Eduardo N. Giovannini and Javier Legris

In recent years, there has been an increasing interest in visual aspects of logical and mathematical reasoning (Mancosu et al. 2005, Barwise y Etchemendy 1996). This interest has emerged from the appreciation of diagrams as valid instruments in formal reasoning; moreover, such reconsideration of diagrams was intimately connected with a revision of their multiple uses in mathematical practice. The classical view of diagrams as mere subsidiary means of reasoning has been challenged by a new conception of diagrams, according to which they should be considered as legitimate forms of logical and mathematical reasoning. The general aim of the articles gathered together in this volume is then to promote a discussion on the nature and role of visual and diagrammatic representation in the formal sciences, from a philosophical perspective which grant a privilege to mathematical practice.

In the philosophy of mathematics of the most part of 20th century, diagrams (geometrical, logical ones, etc.) were in general regarded as an auxiliary tool or as a heuristic to prompt certain trains of inference, playing no part in the reasoning itself. They were dispensable as proof-theoretic devices and had no proper place in the proof as such. They could be valuable pedagogical devices, but proofs should have a "linguistic" or "sentential" formulation, and in the case of formal proofs they only consisted of a sequence of formulas of a formal language, that is, a formal proof was a syntactic object consisting only of sentences arranged in a finite array. For example, Euclid's *Elements*, which had been viewed since Antiquity as a landmark of careful reasoning and mathematical rigor, came to be viewed as being inherently informal, and the reason was that Euclid's proofs made strong use of geometric diagrams. This view was related to the foundational crisis in mathematics at the beginning of the past century that led to the well-known foundational programs.

Now, some philosophers and historians of mathematics questioned at the end of the 20th century whether such foundational programs could exhaust the philosophical problems concerning the nature of mathematics or not. Thus, the focus turned to a consideration of what mathematicians are actually doing when they produce mathematics, putting much emphasis on mathematical activity as a human activity (see Mancosu 2008). This new perspective included a broader notion of proof. At this point research in mathematical education, artificial intelligence and cognitive science was highly influential. Hence, diagrammatic reasoning was reexamined in different aspects: a logical, an epistemological, and a philosophical one (v.g. Mancosu 2005, Esquisabel & Sautter 2013). The indispensability of diagrammatic representation in mathematical knowledge was discussed, and in some cases explicitly maintained.

It would not be exaggerated to find in the thought of Charles S. Peirce (1839-1914) many leading ideas for this reexamination. In his final work on logic Peirce devoted to diagrammatic reasoning and analyzed it in the context of his theory of signs. Likewise, in the metamathematical program of David Hilbert (1862-1943), the epistemic justification of combinatory processes relies on the notion of sensible perception. Peirce's work on diagrammatic reasoning was preceded by proposals of G. W. Leibniz (1646-1716) and J. H. Lambert (1728-1777) among others. In both cases the notion of symbolic knowledge played a key role by relating systems of signs and thoughts. This represented a first approach to provide a conception on the role of diagrams in human knowledge (see Lassalle Casanave 2012).

This exciting particular landscape within the current philosophy of mathematics motivated the symposium "Diagrams, visualization and formalism in the philosophy of mathematical practice", that was part of the 17th Argentinean National Congress of Philosophy, which took place in Santa Fe City, from 4th to 8th August 2015. In the symposium historical cases as well as theoretical issues were analyzed and discussed. The symposium aimed at promoting this new perspective on diagrams and also to contribute to the current discussion. Revised and refereed versions of some of the contributions to the symposium are the content of this volume.

The first two papers of the present volume deal with some problems in seventieth century philosophy. Firstly, in "Rational language and axiomatic method in the XVII century: two projects with a family reassemble", Narvaez examines two of the most influential methodological projects in seventeenth century philosophy, namely the attempts to construct a universal rational language and to axiomatize philosophical knowledge according to the model of Euclidean geometry. After presenting the main methodological and epistemological aspects of these projects, Narvaez seeks to show that both projects share the same background of ideas, concerns and common interests.

Secondly, in "Leibniz' actual infinitesimals" Raffo Quintana aims to elucidate the different meanings that Leibniz gave to the concept of infinitesimal in his early thought, with regard to the problem of the continuum. More precisely, the author claims that, in the period from 1672 to 1676, Leibniz held two main meanings of the infinitesimals, that is, as entities which actually compose the continuum and as infinitely small fictitious quantities. Raffo Quintana argues that these two different meanings are not mutually contradictory. In this sense, Leibniz would have defended actual infinitesimals which compose the continuum and at the same time he would have conceived certain infinitely small quantities as fictions.

The next pair of papers are devoted to the diagrammatic conception of logic elaborated by Charles Sanders Peirce (1839–1914). In the article "Icons and propositions in the diagrammatic logic of C. S. Peirce", Legris defends that one of the central problems of this diagrammatic conception is to account for the connection between diagrammatic logical forms and concrete arguments formulated in ordinary language. The answer to this problem suggested by Peirce consisted in pointing out that icons can be used to make claims in the context of what he calls a "decisign". On the one hand, Legris describes how "decisigns" are obtained from diagrams; on the other hand, he elaborates on the consequences that a generalization of Peirce's concept of propositions brings to the philosophy of logic. The main consequence, according to Legris, is that the relation of deduction does not depend anymore on the (ordinary or formal) language, but it starts to be investigated from the perspective of a theory of signs.

On the other hand, in the article "Peirce's graph with no loss of information", Sautter presents a series of modifications of two diagrammatic systems of proof for Classical Propositional Logic developed by

C. S. Peirce, namely the Entitative Graphs and the Alpha System of the Existential Graphs. Moreover, in order to justify these modifications, Sautter put forward to main arguments: the argument of the interest in the previous representation of the conclusion and the argument of the superfluity of the loss of information. On the basis of these two arguments, the author draws the conclusion that, unlike other diagrammatic systems of proof (such as Venn's or Lewis Carroll's systems), in Peirce's systems of proof it is not enough to represent the premises graphically in order to obtain the graphical representation of the conclusion, provided the argument is valid; on the contrary, in order to obtain the representation of the conclusion, one must modify the premises by means of the rules of inferences. This means that Pierce's systems of proof should be placed among a sub-category of heterogeneous systems of proof, which is different from the sub-category that contains most of the heterogeneous systems of proof.

The next piece, entitled "Ordinary language and formalization in Hilbert's early axiomatic conception", offers an interpretation of the abstract axiomatic conception developed by David Hilbert (1862-1943). On the basis of a series of unpublished notes for lecture courses, corresponding to the period 1891-1905, Giovannini examines the connections between Hilbert's abstract conception of the axiomatic method and the employment of ordinary language in the formulation of axiomatic systems. Moreover, it is argued that the preference of the German mathematician for the traditional geometrical language does not respond to conceptual limitations proper of that early period, such as the lack of an explicitly formulated deductive calculus that could be used as the basis of his axiomatic system. On the contrary, it is claimed that Hilbert's attitude in this early period is intimately related to his view of the nature and function of the new axiomatic method, in particular in its application to geometry.

The volume continues with the article "Heterogeneous proofs: revising the questions", where José Seoane presents a critical assessment of the concept of 'heterogeneous proof'. As is well known, Barwise and Etchemendy's (1996) seminal paper "Visual Inference and Valid Reasoning" has exerted a remarkable influence in the development of the philosophical investigations on inferential heterogeneity. Although the influence of this work has been very important, particularly regarding heterogeneous inference, it is rather difficult to hold that such perspective was the unique dominant point of view. In his paper, Seoane aims to revisit the above-mentioned work, not so much in order to reconstruct its main theses, but mainly to unveil a series of issues that underlie those theses. The major result consists in suggesting a set of reformulations of such initial questions.

The last two papers offer two studies of the role and significance of “visualization” in the understanding and teaching of mathematics. In the paper “Relevance of sensible evidence in mathematics: a dynamic articulation between figures and analytic forms”, Rosset Luna and Visokolskis set a dynamic articulation of figures and analytic forms in mathematics, by means of a characterization of images as a kind of metaphor; in their exposition, the authors follow the Aristotelian perspectives, as well as other more modern conceptualizations of that notion. More precisely, the paper focuses on a case study of a mathematical construction with a conclusive proof. However, along with a presentation of a formal proof of that result, a “visual proof” of the mathematical construction is also analyzed. It is argued that, although this “visual proof” constitutes a non-demonstrative way of understanding that result, it contributes significantly in turn to its comprehension. Consequently, this shows that the cognitive value of this kind of informal mathematical explanation, its advantages and disadvantages against formal proofs, are worth being analyzed.

Finally, in the article “Resolution of problems in mathematics and engineering: elegant visualizations versus efficient resolutions?”, Vergara Laucirica carry out an analysis of the strategies for the resolution of mathematical problems which are commonly used by two professional communities, namely mathematics as it is practiced by professional mathematicians and as it is used by engineers. The paper distinguishes between two different approaches to the resolution of mathematical problems: 1) the search of elegant visual expressions against 2) the exploratory search of efficient strategic control. The author offers a characterization of these two kind of solutions of mathematical problems, with the aim of specifying its main methodological traits. Then, it is argued that a model of resolution of mathematical problems can be elaborated, where efficiency is combined with elegancy and simplicity.

The symposium received the generous support of CONICET (PIP 112-201101-00364). We would like to thank the anonymous referees for their helpful and insightful comments and observations to the papers here included. Without the encouragement and patience of Leticia Minhot, the editor in chief of Representaciones, this volume would not have been possible.

References

Allwein, G. y Barwise, J. (eds.) (1996) *Logical Reasoning with Diagrams,* New York, Oxford University Press.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991). "Visual Information and Valid Reasoning", reimpreso en Allwein, G. y Barwise, J (eds.) (1996).

Esquisabel, Oscar y Sautter, F. (eds.) (2013). *Conocimiento gráfico y conocimiento simbólico: historia y teoría*, Buenos Aires, Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires.

Lasalle Casanave, A. (2012). *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, London, College Publications.

Mancosu, P., Jørgensen, K. F. y Pedersen, S. (2005). *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer, 2005.

Mancosu, P. (ed.) (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice,* New York, Oxford University Press.