LENGUAJE ORDINARIO Y FORMALIZACIÓN EN LA TEMPRANA CONCEPCIÓN AXIOMÁTICA DE HILBERT

Eduardo N. Giovannini

Universidad Nacional del Litoral
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar el modo en que Hilbert concibe la relación entre la utilización del lenguaje ordinario y su concepción formal del método axiomático. Se intenta mostrar que la decisión de Hilbert de optar por el lenguaje ordinario no se explica exclusivamente en virtud de ciertas limitaciones conceptuales propias de aquella etapa inicial, por ejemplo, la carencia de un sistema deductivo formal explícitamente formulado que sirva de base para sus teorías axiomáticas. Por el contrario, se argumenta que esta preferencia de Hilbert obedece a su manera de concebir, en esta etapa temprana, la naturaleza y función del nuevo método axiomático, en particular en su aplicación a la geometría.

Palabras Clave

<Hilbert> <lenguaje ordinario> <método axiomático>

Abstract

The paper analyzes Hilbert's account of the relation between the use of ordinary language and his formal conception of the axiomatic method. It is shown that Hilbert's decision in favor of the ordinary language does not respond exclusively to certain conceptual limitations proper of an initial period, such as the absence of an explicitly formulated deductive system that could be used as the background of his axiomatic theories. On the contrary, it is argued that Hilbert's preference for the traditional geometrical language is ground on his conception, in this early stage, of the nature and function of the axiomatic method, particularly in its application to geometry.

Fecha de recepción: 8 de Abr. 2016 - Fecha de aceptación: 10 de Oct. 2016
Representaciones, Vol. XII , N° 2 - Nov. 2016, pp 69-86

Key words

< Hilbert> <ordinary language> <axiomatic method>

1. Introducción

El libro *Fundamentos de la geometría* (1899) de David Hilbert es considerado comunmente una de las primeras instancias históricas, y quizás la más influyente, del método axiomático formal. En este trabajo el autor elabora un nuevo sistema de axiomas para la geometría euclídea, por medio del cual es posible construir íntegramente esta teoría matemática clásica de un modo puramente *formal, i.e*., sin apelar a ningún tipo de diagrama geométrico en el transcurso de las demostraciones. Asimismo, las investigaciones geométricas son complementadas con un análisis metateórico del sistema axiomático, que busca asegurar el cumplimiento de propiedades "metalógicas" fundamentales como la consistencia, la completitud y la independencia de los axiomas.

Ahora bien, un rasgo relevante de este abordaje axiomático a la geometría consiste en que Hilbert redujo al mínimo la utilización del simbolismo (lógico), y se inclinó en cambio por formular su sistema de axiomas en el lenguaje geométrico tradicional, enriquecido con algunos términos técnicos. Aunque esta decisión no fue justificada en el marco del propio libro, Hilbert analiza esta cuestión con cierto detalle en sus trabajos manuscritos, particularmente en notas de clases para cursos sobre geometría y aritmética, correspondientes a este período inicial comprendido entre 1891 y 1905[1].

El objetivo de este artículo es analizar el modo en que Hilbert concibe la relación entre la utilización del lenguaje ordinario y su concepción formal del método axiomático. Intentaré mostrar que la decisión de optar por el lenguaje tradicional de la geometría no se explica exclusivamente en virtud de ciertas limitaciones conceptuales propias de aquella etapa inicial, por ejemplo, la carencia de un aparato deductivo explícitamente formulado que sirva de base para sus teorías axiomáticas. Por el contrario, sostendré que esta preferencia de Hilbert obedece a su manera de concebir, en esta etapa temprana, la naturaleza y función del nuevo método axiomático, en particular en su aplicación a la geometría.

La exposición se organizará de la siguiente manera. En la primera sección utilizaré los manuscritos de Hilbert para ilustrar brevemente su concepción de la geometría, en esta etapa inicial. En la segunda sección comentaré el modo en que presenta inicialmente su nueva concepción formal del método axiomático. Finalmente, en la tercera sección, intentaré mostrar que la negativa de hacer un uso extensivo del simbolismo lógico, y la formulación de su sistema axiomático formal en el lenguaje ordinario, responde al modo en que Hilbert concibe la naturaleza y función del método axiomático formal, en esta etapa temprana de sus investigaciones sobre los fundamentos de la matemática.

2. La temprana concepción de la geometría

En todas las notas para cursos previas a *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), y en las inmediatamente posteriores, es posible identificar fácilmente una tesis filosófica fundamental respecto de la naturaleza de las teorías matemáticas en general. Se trata de una posición muy influyente en el siglo XIX, principalmente entre matemáticos de habla alemana, atribuida por lo general a Gauss. De acuerdo con esta tesis, dentro de las matemáticas es preciso distinguir entre aquellas disciplinas que se basan exclusivamente en el pensamiento puro y aquellas que, al menos en parte, tienen un origen empírico. En otras palabras, en virtud de su origen epistemológico, debe diferenciarse entre la *matemática pura* (aritmética, álgebra, análisis, teoría de números, teoría de funciones, etc.) y la *matemática mixta*, en donde se encuentran la geometría y la mecánica. Hilbert reproduce esta distinción en un pasaje muy elocuente, en la introducción de su primer curso dedicado a la geometría, en 1891:

> *La geometría es la ciencia de las propiedades del espacio, y se diferencia substancialmente de las ramas matemáticas puras, como la teoría de números, el álgebra y la teoría de funciones. Los resultados de estas disciplinas pueden ser alcanzados a través del pensamiento puro […] Algo completamente distinto ocurre en la geometría. No puedo nunca fundar las propiedades del espacio en la mera reflexión, tanto como no puedo reconocer de*

> *ese modo las leyes básicas de la mecánica, las leyes de la gravitación o cualquier otra ley física. El espacio no es un producto de mi pensamiento, sino que me es dado sólo a través de los sentidos [Sinne]. Necesito de la intuición y el experimento, tanto como se los requiere para fundar las leyes físicas, donde también la materia debe sernos dada a través de los sentidos.* (Hilbert, 1891: 22–23)

En la medida en que en sus trabajos posteriores Hilbert adopte una posición axiomática abstracta, esta definición tradicional de la geometría como la ciencia que se ocupa de estudiar las propiedades del espacio (físico) deberá ser abandonada. Sin embargo, una característica central de su concepción de la geometría que aparece sugerida aquí tempranamente, y que se mantendrá a lo largo de todo este período inicial, es una postura *empirista* respecto del estatus epistemológico de esta teoría matemática. Hilbert sostiene que el conjunto de "hechos geométricos fundamentales" sobre los que se construye nuestro conocimiento geométrico proviene de la experiencia, y por lo tanto tiene un carácter *empírico*:

> *Entre los fenómenos o hechos de la experiencia que se nos ofrecen en la observación de la naturaleza, existe un grupo particularmente destacado, es decir, el grupo de aquellos hechos que determinan la forma externa de las cosas [die äussere Gestalt der Dinge]. De estos hechos se ocupa la geometría.* (Hilbert, 1893/1894: 72)

La posición empirista de Hilbert consiste en afirmar que la geometría se funda en un conjunto de hechos, leyes y conceptos básicos que no pueden ser adquiridos a través del *pensamiento puro*, sino que nos son dados a través de la experiencia y la intuición. El trabajo del geómetra consiste precisamente *describir y ordenar* este conjunto de hechos, del mismo modo que la tarea del físico consiste en describir y ordenar un determinado conjunto de fenómenos físicos[2]. Asimismo, al indicar que la geometría es la ciencia encargada de estudiar el grupo de hechos que determina la forma externa de las cosas en el espacio, Hilbert reconoce que las proposiciones básicas de la geometría elemental no son muy distintas que las proposiciones de la física en cuanto a que, en un sentido factual, formulan una multitud de hechos del "mundo exterior" [*Aussenwelt*]. Hilbert subraya de ese modo el papel significativo de la geometría en nuestro *conocimiento de la naturaleza,* en tanto puede ser utilizada para suministrar una descripción más o menos precisa de la naturaleza[3]. En este aspecto, la geometría elemental puede ser considerada una de las *primeras ramas de la física.*

Hilbert advierte además que la geometría se diferencia de otras teorías físicas como la mecánica, la teoría de la electricidad, la óptica, etc., no en virtud de una característica esencial asociada a su naturaleza, sino más bien debido a su avanzado estado de desarrollo. El notable grado de avance que ha alcanzado la geometría desde los tiempos de Euclides y el consenso generalizado respecto de los 'hechos' que forman este dominio o ámbito de conocimiento permiten, según Hilbert, que esta disciplina pueda ser sometida fácilmente a un tratamiento axiomático (formal)[4]. En este preciso sentido, la geometría puede ser considerada la *más completa de las ciencias naturales*:

> *La geometría elemental (euclídea) tiene como objeto los hechos y leyes que el comportamiento [Verhalten] espacial de las cosas nos presenta. Según su estructura, es un sistema de proposiciones [Sätzen] que – en mayor o menor medida – pueden ser deducidas de un modo puramente lógico a partir de ciertas proposiciones indemostrables, los axiomas. Esta conducta, que en menor completitud encontramos, por ejemplo, en la física matemática, puede expresarse brevemente en la sentencia: la geometría es la ciencia natural más completa.* (Hilbert, 1898/1899b: 302)

Hilbert adopta en su concepción temprana de la geometría una posición visiblemente empirista, que en cierta medida puede resultar insospechada para aquellos más familiarizados con su exposición axiomática formal de la geometría en *Fundamentos de la geometría* (1899). Ahora bien, esta posición empirista no es profundizada en ningún momento, sino que se circunscribe a defender que la geometría es una ciencia natural sólo en cuento a su *origen*. El empirismo de Hilbert consiste en sostener que los hechos, leyes y conceptos básicos que están en la base de la geometría no pueden ser adquiridos a través del "pensamiento puro", sino que para ello es necesario el material proporcionado por la experiencia y la intuición. En cambio, no radicaliza su posición empirista exigiendo que *todos* los conceptos primitivos y axiomas de su teoría geométrica (axiomatizada) se correspondan con objetos y hechos empíricamente observables. Ésta es una diferencia importante respecto de otras posiciones radicalmente empiristas como por ejemplo el programa de Pasch para la fundamentación de la geometría[5].

Finalmente, a pesar de adoptar una posición empirista que concibe a la geometría cuanto a su *origen* como una ciencia natural, Hilbert pretende permanecer neutral en lo que se refiere al estatus epistemológico de esta intuición geométrica, advirtiendo que no se pronunciará respeto de esta difícil cuestión:

> *Finalmente podemos designar a nuestra tarea como un análisis lógico de nuestra intuición; la pregunta, acerca de si nuestra intuición espacial tiene un origen a priori o empírico, permanecerá aquí sin discutir.* (Hilbert, 1898/1899b: 303)[6].

3. El método axiomático formal en Fundamentos de la geometría (1899)

La concepción formal del método axiomático elaborada por Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899) es bien conocida. Para ilustrarla es útil confrontarla con la concepción clásica del método axiomático, representada originalmente en la exposición sistemática de la geometría griega llevada a cabo por Euclides. En los *Elementos* partimos de una serie de definiciones, postulados y nociones comunes completamente interpretadas, en el sentido de que los términos primitivos como 'punto', 'recta', etc., refieren a objetos dados a la intuición geométrica y los axiomas predican *verdades* acerca de estos objetos. Todo el conocimiento geométrico está así organizado a partir de un conjunto de principios básicos, considerados como verdades intuitivas auto–evidentes, y de estas proposiciones pueden derivarse, por medio de deducciones lógicas, el resto de las verdades geométricas. Hilbert llama a esta concepción clásica la 'axiomática material' [*inhaltliche Axiomatik*], para aclarar que ella 'introduce sus nociones básicas a través de la referencia a experiencias comunes y presenta sus principios o bien como hechos evidentes, de los cuales uno puede convencerse, o bien los formula como extractos de complejos de experiencia [*Erfahrungskomplexen*] (Hilbert y Bernays, 1934: 2).

Por el contrario, en su nueva concepción formal del método axiomático, Hilbert adopta desde un inicio una perspectiva más abstracta y general. Renuncia por lo tanto a dar una definición descriptiva de los elementos básicos, y comienza en cambio presuponiendo la existencia de tres conjuntos de cosas u objetos [*Dinge*], a los que se les asigna su denominación geométrica habitual, pero que sin embargo no refieren a objetos particulares dados en la intuición geométrica. Antes bien, todo aquello que resulta geométricamente relevante de estos objetos son las relaciones establecidas en los axiomas, por medio de los cuales reciben una "caracterización matemática completa y precisa" (Hilbert, 1899: 2). Para construir la geometría euclídea elemental Hilbert se propone asumir simplemente la existencia de tres sistemas de objetos llamados 'puntos', 'líneas', 'planos', sobre los que se imponen siete relaciones primitivas: una relación ternaria de orden relaciona a los puntos, tres relaciones binarias de *incidencia* y tres relaciones binarias de *congruencia* (Cf. Hilbert, 1899: 2–3).

Una consecuencia inmediata de este nuevo modo de concebir el método axiomático es que los axiomas de la geometría dejan de ser considerados como *verdades* inmediatas o evidentes acerca de un dominio (intuitivo) fijo, *i.e*., el espacio físico. Hilbert aclara que un sistema axiomático constituye un 'entramado de conceptos' [*Fachwerk von Begriffen*] – o una *estructura relacional*, como se lo designa actualmente – que no se refiere a un dominio fijo de objetos, sino que puede recibir múltiples interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas como físicas. La gran contribución de Hilbert consistió así en presentar a esta teoría matemática como un sistema axiomático formal, por lo cual debe entenderse que los objetos y relaciones primitivas del sistema ('punto', 'línea', 'plano, 'estar en', 'estar entre', etc.) deben ser tomados como desprovistos de un significado específico, y por lo tanto pueden ser reemplazados por otros objetos y relaciones cualesquiera, bajo la condición de que este nuevo sistema de objetos satisfaga las relaciones establecidas en los axiomas.

4. Axiomatización formal y lenguaje ordinario

En su forma matemática madura, la axiomática formal supone el uso de un *lenguaje formal*, un lenguaje que es tomado como no interpretado para que varias interpretaciones diferentes puedan ser consideradas y comparadas. Idealmente, al menos en principio, la axiomática formal también requiere que se expliciten qué inferencias lógicas entre los enunciados del lenguaje van a ser permitidas. Ello se consigue por medio de un sistema deductivo formal, que hace referencia sólo al lenguaje formal y no a sus diversas interpretaciones. Ninguna de estas dos características está presente en *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899).

En cuento a la primera de ellas, aunque una opción disponible en aquel momento era el conjunto de reglas de inferencias especificado en el sistema lógico del *Begriffschrift* de Frege, Hilbert decidió utilizar una teoría informal de conjuntos y funciones como la "lógica subyacente" de sus sistemas axiomáticos. En sus primeras investigaciones axiomáticas Hilbert no hace referencia a ningún un aparato deductivo formal explícitamente formulado. Ello significa que el carácter "formal" de su fundamentación de la geometría consiste estrictamente en que a los diagramas geométricos, y por lo tanto a la intuición, no se le asigna ningún valor inferencial en el desarrollo de las demostraciones de los teoremas.

Por otro lado, si bien en esta etapa temprana Hilbert no contaba todavía con una noción matemáticamente precisa de interpretación *à la Tarski*, en *Fundamentos* el lenguaje de la geometría es tratado *de hecho* como un lenguaje formal. Tanto las términos geométricos primitivos y las relaciones básicas son concebidas de un modo *esquemático*, esto es, no están ligados a una interpretación fija sino que pueden ser reinterpretadas en diversos dominios de objetos. En sus cursos Hilbert señala además que en esta estricta separación entre los términos primitivos y los objetos geométricos habituales reside precisamente una de las dificultades más importantes en la compresión de la naturaleza abstracta de su teoría geométrica:

> *Quisiera ahora resaltar la dificultad principal para la comprensión [de este curso]. Un esfuerzo y atención considerables son ne-*

> *cesarios para abstraerse constantemente de las cosas, representaciones e intuiciones con las que uno está familiarizado, como así también para ubicarse nuevamente en un estado de ignorancia. Sin embargo, someterse a este esfuerzo es más fácil, cuando el objetivo es reconocido.* (Hilbert, 1898/1899a: 223)

Ahora bien, es interesante observar que a diferencia de otros matemáticos como Peano y Pieri, quienes también en esta misma época lograron presentar a la geometría euclídea elemental como un sistema formal o "hipotético–deductivo"[7] , en su presentación axiomática de la geometría Hilbert decide prácticamente no utilizar ningún simbolismo o notación lógica especial, que contribuya precisamente a facilitar esta disociación entre los objetos geométricos intuitivos y los conceptos primitivos de la nueva teoría geométrica. Por el contrario, Hilbert prefirió utilizar el lenguaje ordinario para formular su sistema axiomático, enriquecido con algunos términos técnicos; los sistemas hilbertianos son así *sistemas axiomáticos formales no formalizados.*

Aunque en *Fundamentos de la geometría* no se encuentran mayores indicios respecto de esta decisión, en sus cursos Hilbert se refiere específicamente a esta cuestión. En primer lugar, es claro que su preferencia por el lenguaje ordinario no se explica exclusivamente en virtud de la ausencia de un simbolismo lógico adecuado para ser utilizado en la formulación de la teoría geométrica; antes bien, esta decisión estaba íntimamente ligada a su modo de entender la naturaleza y la función de los sistemas axiomáticos formales, en particular en su aplicación a la geometría. Hilbert admite ciertamente que la utilización del lenguaje ordinario para formular un sistema axiomático puede generar graves confusiones y equivocaciones, si no se tiene bien en claro desde un inicio que los conceptos primitivos no tienen un significado intuitivo prefijado de antemano. Sin embargo, al mismo tiempo, reconoce que si se tiene presente este hecho fundamental de los sistemas axiomáticos abstractos, entonces el empleo del lenguaje ordinario resulta muy útil para facilitar la comprensión de la teoría axiomática y para conservar de alguna manera una referencia al contenido intuitivo original de los axiomas:

> *En la ambigüedad del lenguaje, a la que aquí nos enfrentamos,*

> *reside una dificultad, que pronto en nuestras investigaciones lógicas se volverá inapropiada y generadora de confusiones. Utilizaremos todas estas expresiones como sinónimos , y con ellas sólo pensaremos en las relaciones establecidas por medio de los axiomas; estas relaciones, que hemos postulado para cosas abstractas del pensamiento, no tienen ningún significado intuitivo; y si de hecho utilizamos las designaciones habituales 'estar sobre', o luego 'entre', 'congruente', etc., ello sólo se debe a que a través de ellas es más fácil comprender el contenido de los axiomas, y de ese modo uno puede al final – una vez que la estructura conceptual esté completa – hacer más fácil su aplicación a los fenómenos.* (Hilbert, 1905: 40)

Es posible observar cierta tensión en este pasaje de Hilbert. En la medida en que su sistema axiomático es formal, los términos y relaciones primitivas del sistema no poseen un significado intuitivo concreto. Pero entonces no es claro cómo el uso del lenguaje geométrico habitual, con su referencia inmediata a la intuición, puede contribuir a comprender el "contenido" de los axiomas. En un sentido estricto, el contenido de los axiomas de un sistema formal – en el sentido antes especificado – consiste en las *relaciones* entre los conceptos primitivos allí establecidas. En consecuencia, el lenguaje ordinario, y por lo tanto la intuición geométrica, no aportan nada relevante en la comprensión del "contenido formal" de los axiomas.

Ahora bien, en mi opinión, esta tensión puede disiparse si se distinguen dos dimensiones o puntos de vista desde los que Hilbert considera a sus sistemas axiomáticos, al menos en esta etapa temprana. Desde el punto de vista de la fundamentación formal de la geometría que se alcanza a partir de su presentación como un sistema axiomático formal, y de su prueba requerida de consistencia, la intuición geométrica y el lenguaje ordinario no desempeñan ningún papel relevante. En particular, la demostración de teoremas geométricos se funda exclusivamente en las condiciones o propiedades expresadas en los axiomas, y en este proceso no se les reconoce a los diagramas ningún valor inferencial. Sin embargo, desde el punto de vista práctico del trabajo con el sistema axiomático, la utilización del lenguaje geométrico habitual resulta esencial, en la medida en que permite conservar un cierto paralelismo entre el contenido intuitivo original que para Hilbert posee la geometría y el nuevo entramado conceptual, resultado de la axiomatización formal. En otras palabras, Hilbert reconoce que la conservación – debidamente entendida – de una relación con la intuición geométrica y la simplicidad en la manipulación son *valores* importantes en la axiomatización de una teoría matemática como la geometría. Quizás sea por ello que, en un pasaje posterior de este mismo curso, afirma que la utilización de un lenguaje artificial, como por ejemplo la creación arbitraria de palabras, para hacer más evidente el carácter formal del sistema axiomático, es un recurso legítimo pero ciertamente inadecuado para los objetivos que se propone alcanzar con su axiomatización de la geometría elemental:

> *Cuando uno se pregunta por el lugar, dentro de todo el sistema, de un teorema conocido desde antaño como el de la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo, entonces naturalmente se debe apartar de las creencias tradicionales y de la intuición, y aplicar solamente las consecuencias lógicas de los axiomas presupuestos. Para asegurarse de ello, a menudo se ha hecho la sugerencia de evitar los nombres usuales de las cosas, ya que éstos pueden desviarnos, a través de las numerosas asociaciones con los hechos de la intuición, de la rigurosidad lógica. Se ha sugerido así introducir en el sistema axiomático nuevos nombres para 'puntos', 'líneas', 'planos', etc.; nombres que recuerden solamente lo que ha sido establecido en los axiomas. Se ha propuesto incluso que palabras como 'igual', 'mayor', 'menor', sean reemplazadas por formaciones arbitrarias de palabras, como 'a–rig', 'b–rig', 'a–rung', 'be–rung'. Ello es de hecho un buen medio pedagógico para mostrar que un sistema axiomático sólo se ocupa de las propiedades establecidas en los axiomas y de nada más. Sin embargo, en la práctica este procedimiento no es ventajoso, e incluso no está realmente justificado. En efecto, uno siempre debe guiarse por la intuición al formular un sistema axiomático y uno siempre tiene a la intuición como una meta [Zielpunkt]. Por lo tanto, no es defecto alguno si los nombres nos recuerdan siempre, e incluso hacen más fácil recordar, el contenido de los axiomas, puesto que se puede evitar fácilmente la intromisión de*

> *la intuición en las investigaciones lógicas, al menos con un poco de cuidado y práctica.* (Hilbert, 1905: 87–88)

Esta advertencia de Hilbert puede ser utilizada para contrastar su propia concepción del método axiomático con algunas de las interpretaciones radicalmente formalistas que aparecieron poco después de la publicación de *Fundamentos de la geometría*. En particular, este pasaje puede ser tomado como una respuesta directa a algunas de las críticas formuladas posteriormente por Frege, en una serie de artículos que buscaron continuar la célebre controversia epistolar[9]. En estos trabajos, Frege opone la noción clásica o euclídea de axioma, según la cual "los axiomas son pensamientos verdaderos, no demostrados por medio de inferencias lógicas" (Frege 1903, pp. 265–266), a la concepción moderna de axioma defendida por Hilbert, que concibe estrictamente a los axiomas como "*pseudo–proposiciones*". Una pseudo–proposición es un grupo de signos que no expresa un pensamiento, como sí ocurre con una proposición propiamente dicha, sino que sólo comparte con ella su forma gramatical[10]. En la medida en que los términos básicos "punto", "línea", etc., no poseen en el sistema de Hilbert una referencia (intuitiva) fija, Frege concluye que deben ser considerados como *meros símbolos vacíos*, sin significado, y los axiomas que los contienen, como meras reglas para la manipulación de signos. Más aún, dado que para Frege los axiomas hilbertianos son pseudo–proposiciones, cualquier axioma de su sistema es equiparable con una *formación arbitraria de palabras*. Frege ridiculiza la posición Hilbert, al comparar su axioma "Toda recta contiene al menos dos puntos" (I.7), con la construcción arbitraria de palabras sin ningún sentido: "Toda anej bacea, por lo menos dos helas" (Frege 1906, p. 284).

Por el contrario, pasajes como el recién citado permiten apreciar con claridad la firme oposición de Hilbert respecto de este tipo de interpretación, formalista radical, de su método axiomático. El hecho de que la geometría sea presentada como un sistema axiomático formal no significaba para él, de ningún modo, que la naturaleza de esta teoría matemática pueda ser comparada con un juego de símbolos o signos vacíos, sin significado. De la misma manera, la propuesta de formular los axiomas de la geometría a través de construcciones arbitrarias de palabras, carentes de todo sentido, tampoco era una opción atendible.

Aunque el resultado de una axiomatización formal de la geometría era un entramado conceptual o estructura relacional capaz de recibir distintas interpretaciones y aplicaciones, Hilbert sostenía que uno de los objetivos centrales de su empresa axiomática era conservar de alguna manera la relación con el conjunto de hechos geométricos intuitivos, que se encuentran en la base de esta disciplina. Más aún, en esta etapa inicial, Hilbert estaba ciertamente convencido de que su análisis axiomático formal contribuía en gran medida a proporcionar un fundamento conceptual para el acervo de hechos geométricos intuitivos. En este sentido, la utilización del lenguaje ordinario en la formulación de su sistema axiomático resultaba consecuente con esta concepción axiomática de la geometría. En efecto, una vez que la naturaleza abstracta de los sistemas axiomáticos era claramente comprendida, la utilización del lenguaje ordinario constituía una herramienta muy eficaz para la compresión del "contenido" de los axiomas geométricos y para su aplicación a los diversos dominios de objetos.

5. Consideraciones finales

La presentación axiomática de la geometría euclídea llevada a cabo por Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899) fue la culminación de un proceso de rigorización y formalización de la geometría que tuvo lugar en la segunda mitad del siglo XIX. Una de sus contribuciones más notables consistió en haber introducido, a partir de su análisis axiomático formal, un grado de *rigor* y abstracción inusitado para esta disciplina. El proyecto de mostrar cómo es posible llevar a cabo, por medio del método axiomático formal, una construcción puramente formal de la geometría – transformándola de ese modo en una teoría *matemática pura* –, estaba así íntimamente ligado a la búsqueda de absoluto rigor y precisión en las demostraciones matemáticas. Hilbert comparte este objetivo con otros programas para la fundamentación de la matemática en el último tercio del siglo XIX, como por ejemplo los de Dedekind y Pasch. En el caso de la geometría, la búsqueda de rigor en las demostraciones suponía, por un lado, que la totalidad de los axiomas o postulados necesarios para construir la teoría geométrica debían ser establecidos desde un inicio, y nuevos principios no podían ser admitidos durante el desarrollo de la teoría; por otro lado, exigía que el resto de las proposiciones o teoremas debían ser obtenidos sobre la base de *deducciones puramente lógicas*, en el sentido de que no se debía apelar a ningún tipo de diagrama o construcción geométrica en las demostraciones. De ese modo, la presentación axiomática de Hilbert satisfacía la exigencia de absoluto rigor en las demostraciones, en tanto que no sólo garantizaba que no existan "lagunas lógicas" en las demostraciones geométricas, sino que al rechazar la validez de los diagramas geométricos excluía la intromisión de cualquier elemento "exógeno o extraño" en las pruebas.

Ahora bien, a diferencia de otros promotores de la búsqueda de rigor en matemática, en particular de Frege[11] , Hilbert no entendía que la utilización del lenguaje ordinario en la formulación de su axiomático para la geometría constituía un *obstáculo* para la consecución de tal objetivo. Por el contrario, pensaba que una vez que la naturaleza formal de su sistema axiomático era debidamente reconocida, el empleo del lenguaje geométrico tradicional: *i*.) facilitaba en gran medida la compresión de su teoría geométrica; *ii*.) permitía conservar cierto paralelismo con los hechos geométricos fundados en la experiencia y en la intuición, contribuyendo de ese modo su aplicación a los fenómenos; *iii*.) hacía que el trabajo con el sistema axiomático sea más simple e intuitivo, sirviendo de ese modo al propósito de que el método axiomático sea una herramienta fecunda de investigación matemática.

La importancia que Hilbert deposita en estas características no fue compartida por otros defensores de método axiomático abstracto hacia fines del siglo XIX, en particular por los geómetras italianos[12]. Sin embargo, ello revela que la concepción abstracta del método axiomático desarrollada en *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899) no puede ser debidamente analizada, si no se toma en consideración la *imagen de la geometría* que Hilbert defiende en este período inicial.

Notas

[1]Sobre el contenido de estas fuentes véase Majer y Hallett (2004).

[2]Véase (Hilbert, 1893/1894: 72).

[3]Cf. (Hilbert, 1898/1899a: 221).

[4]Cf. (Hilbert, 1893/1894: 72)

[5]Esta posición empirista radical se manifiesta, por ejemplo, en el hecho de que Pasch rechaza la inclusión del axioma de Arquímedes en su sistema axiomático, en

tanto considera que es un principio que no está justificado empíricamente. Véase (Pasch 1882).

[6]Una declaración similar se encuentra en (Hilbert, 1891: 27) y (Hilbert, 1902: 521)

[7]Cf. Peano (1889) y Pieri (1899a, 1899b).

[8]"Cuando esta relación [de incidencia] tiene lugar decimos también que el punto A 'se encuentra sobre' la recta a, o que a 'pasa por' el punto A, o que a 'une' a los puntos A y B" (Hilbert, 1905: 38).

[9]Cf. Frege 1903, Frege 1906.

[10]Cf. Frege 1906, p. 297.

[11]Cf. Frege 1879.

[12]Un estudio detallado de las diferencias entre el abordaje axiomático a la geometría de Hilbert y el de algunos geómetras italianos, como Peano, Pieri y Veronose, entre otros, se encuentra en (Bottazzini, 2001).

Referencias

Botazzini, Umberto (2001). "I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert", Bollettino dell'unione Matematica Italiana, serie 8, vol.4B (3), 545–570.

Frege, Gottlob (1879) Begriffschrift, Halle: Louis Nebert.

Frege, Gottlob (1903) "Über die Grundlagen der Geometrie", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vol. 12, 319–324, 368–375. Versión en español en (Frege, 1996: 265–278).

Frege, Gottlob (1906) "Über die Grundlagen der Geometrie", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung vol. 15, 293–309, 377–404, 423–430. Versión en español en (Frege, 1996: 279–334).

Frege, Gottlob (1996) Escritos filosóficos, Barcelona: Crítica.

Hilbert, David (1891) Projektive Geometrie; (MS. Vorlesung, SS 1891). Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 535. Publicado parcialmente en U. Majer y M. Hallett (2004), pp. 21–64.

Hilbert, David (1893/1894) Die Grundlagen der Geometrie; (MS. Vorlesung, WS 1893/4). Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 541. Publicado parcialmente en U. Majer y M. Hallett. (2004), pp. 72–178.

Hilbert, David (1898/1899a) Grundlagen der Euklidischen Geometrie, (MS. Vorlesung, WS 1898/9). Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 551. Publicado en U. Majer y M. Hallett (2004), pp. 221–286.

Hilbert, David (1898/1899b). Elemente der Euklidischen Geometrie, (MS. Vorlesung, WS 1898/9). Ausgearbeitet von Hans von Schaper. Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 552. Publicado en U. Majer y M. Hallett (2004), pp. 304–402.

Hilbert, David (1899) Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss–Weber Denkmals in Göttingen, Leipzig, Teubner. Reimpreso en U. Majer y M. Hallett (2004).

Hilbert, David 1902. Grundlagen der Geometrie, (MS. Vorlesung, SS 1902). Georg–August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal. Publicado U. Majer y M. Hallett (2004), pp. 540–608.

Hilbert, David 1905. Logische Principien des mathematischen Denkens; (MS. Vorlesung, SS 1905). Ausgearbeitet von E. Hellinger. Georg–August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert, David y Bernays, Paul (1934) Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Berlin: Springer

Majer, Ulrich y Hallett, Michael (eds.) (2004) David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902, Berlin: Springer.

Pasch, Moritz (1882). Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig: Teubner.

Peano, Giuseppe (1889) I Principii di Geometria logicamente esposti. Torino: Fratelli Bocca.

Pieri, Mario (1899a) "I principia della geometria di posizione composti in Sistema logico deduttivo", Memorie della Reale Accademia delle Scienzia di Torino, Classe di Sc. Fisiche, Mathematiche e Naturali, Serie 2, 48, 1–62.

Pieri, Mario (1899b) "Della geometría elementare come sistema ipotetico–deduttivo; monografía del punto e del moto", Memorie della Reale Accademia delle Scienzia di Torino, Classe di Sc. Fisiche, Mathematiche e Naturali, Serie 2, 49, 173–222.

Eduado N. Giovannini
engiovannini@conicet.gov.ar

Eduado N. Giovannini es Doctor en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires. Actualmente se desempeña como Investigador Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET-Argentina) y docente de la Universidad Nacional del Litoral. Ha publicado un libro sobre la temprana concepción axiomática de la geometría de David Hilbert (College Publications, 2015) y diversos artículos en revistas internacionales.