LOS INFINITESIMALES ACTUALES DE LEIBNIZ

Federico Raffo Quintana

IESCT-UNQ / CONICET

Resumen

En esta presentación intentaremos dilucidar los sentidos de lo infinitesimal que operan en el pensamiento juvenil de Leibniz a propósito del problema del continuo. En primer lugar veremos las características que Leibniz le atribuye a los infinitesimales cuando defendió que componen actualmente el continuo en 1672. Luego, veremos que por 1676 parecería haber cambiado de opinión al afirmar que hay cantidades infinitamente pequeñas que son ficticias. Intentaremos mostrar que, detrás de esto, hay dos sentidos distintos de lo infinitesimal que no se contradicen, de manera tal que Leibniz podría haber defendido infinitesimales actuales que componen el continuo al mismo tiempo que concibió que ciertas cantidades infinitamente pequeñas son ficticias.

Palabras clave

<infinitesimales> <continuo> <ficción>

Abstract

In this presentation we will try to elucidate the senses of the infinitesimal in Leibniz' early thought on the problem of the continuum. We will first see the characteristics that Leibniz has assigned to infinitesimals when in 1672 he defended that they actually compose the continuum. We will then see that in 1676 he seems to change his mind when he claimed that there are infinitely small quantities that are fictitious. We will try to show that beyond this there are two different senses of the infinitesimal which are not contradictory, in such a way that Leibniz could have defended infinitesimals that actually compose the continuum while he conceived that there are certain infinitely small quantities that are fictitious.

Fecha de recepción: 5 de Abr. 2016 - Fecha de aceptación: 5 de Oct. 2016
Representaciones, Vol. XII , N° 2 - Nov. 2016, pp 27-37

Key words

<infinitesimals> <continuum> <fictions>

Los infinitesimales actuales de Leibniz

Ha sido célebre el reconocimiento por parte de Leibniz de dos 'laberintos' del pensamiento humano, a saber, el de la libertad y el del continuo (A VI 3, 527; GP VI, 29). Al segundo de ellos Leibniz lo ha abordado intensamente en su juventud, fundamentalmente durante la década de 1670. Una de las tesis centrales en el examen leibniziano del continuo de este período es aquella según la cual "[s]e dan en acto partes en el continuo (...) y ellas son infinitas en acto" (A VI 2, 264). Probablemente la importancia y el alcance de esta tesis se entienden especialmente en la teoría leibniziana del cuerpo. En efecto, Leibniz suele señalar que "[l]a materia está dividida en acto en infinitas partes. Hay, en cualquier cuerpo dado, infinitas criaturas" (A VI 2, 280).

Ahora bien, esta tesis leibniziana acarrea inevitablemente varios interrogantes. Uno de los más importantes es: ¿cómo debe entenderse un número actualmente infinito de partes en el continuo? Una de las interpretaciones históricas dadas por Leibniz para entender la tesis del infinito actual fue que el continuo se compone de 'infinitesimales'. Esta idea está presente en el período parisino de Leibniz, especialmente en textos de 1672. Por ejemplo:

> *Por consiguiente, el espacio se compone de partes menores que cualquiera determinable por nosotros. O bien muy brevemente: el tiempo se compone de momentos o partes menores que cualquiera determinable por nosotros; en efecto, no existe nada [en el tiempo] sino el momento. El movimiento divide a la línea en partes proporcionales a las partes del tiempo. Por consiguiente, hay, en una línea, partes proporcionales a los momentos, es decir, menores que cualquiera determinable por nosotros.* (A VI 3, 81. Traducción nuestra)

Leibniz se aproxima al concepto de lo infinitesimal al examinar especialmente las partes extremas del continuo (lo que llama 'inicios' y 'finales'), oponiéndose a la concepción que mantuvo en la TMA de 1671, donde defendió que dichos extremos han de ser concebidos como indivisibles (A VI 2, 264-265).[1] Al comienzo del período parisino, Leibniz entiende que los extremos no son indivisibles sino que han de entenderse como infinitesimales, que no son cantidades últimas en el sentido de que pueden haber otros infinitesimales más pequeños:

> *Supóngase que un punto se entiende como una línea infinitamente pequeña, y que una [línea] es mayor que otra, y que ésta es pensada como designada en un espacio o cuerpo; y [supóngase] que se pregunta por algún inicio de cierto cuerpo o espacio, esto es, por la primera parte, y que no puede tenerse por 'inicio' aquello a lo que puede quitársele algo, conservado el inicio. Supuesto esto, llegaremos necesariamente a indivisibles en el espacio y el cuerpo. Pues esta línea cuanto se quiera infinitamente pequeña no será el verdadero inicio del cuerpo, ya que aún puede quitarse algo de ella, a saber, la diferencia entre ella y otra línea infinitamente pequeña todavía menor; y no se descansará hasta que se llegue a algo carente de partes, es decir, para lo cual no puede imaginarse nada menor, la cual cosa se ha mostrado [que es] imposible. Pero si un cuerpo se entiende como aquello que se mueve, entonces su inicio será definido como una línea infinitamente pequeña, aunque, en efecto, exista otra línea menor que ella; sin embargo, de este movimiento no puede asumirse ningún otro Inicio que el que sea mayor que el Inicio de otro movimiento más lento. Pero definimos al inicio del cuerpo por el inicio mismo del movimiento, es decir, por el conato, ya que, de otro modo, el inicio del cuerpo habrá de ser un indivisible. De aquí se sigue que no hay, en el cuerpo, ninguna materia distinta del movimiento; en efecto, ésta necesariamente contendría indivisibles. Por lo que mucho menos el espacio es distinto de la materia. (A VI 3, 100. Traducción nuestra)*

Tenemos, por lo tanto, que el continuo se compone de partes menores que cualquiera determinable por nosotros pero que no son últimas. En este sentido, no son mínimos, o sea, no son algo que no tenga cantidad en absoluto (A VI 2, 264; A VI 3, 97-98). Como revela la última cita, el hecho de que tengan cantidad permite decir que siempre puede haber una parte infinitamente pequeña más pequeña que otra, e incluso infinitamente más pequeña (A VI 3, 98-99). Ahora bien, creemos que hay una característica más que tienen los infinitesimales leibnizianos de 1672, sin la cual no se entendería la composición del continuo, que se desprende de las investigaciones matemáticas (especialmente aritméticas) llevadas a cabo durante el período parisino (véase Hofmann, 1974), a saber: así como los infinitesimales no son cantidades 'absolutamente' pequeñas (o sea, mínimas), así tampoco son cantidades 'arbitrariamente' pequeñas. En este sentido, los desarrollos en series infinitas del mismo año (A II 1, 342-356) mostrarían que Leibniz se habría representado una infinitud actual de partes en el continuo del mismo modo que los términos de una serie infinita, es decir, las partes han de entenderse como determinadas por una cierta ley, de tal manera que no pueden ser escogidas arbitrariamente. Por ejemplo, Leibniz considera series tales que entre una sección y el todo se mantiene la misma ratio que entre una subsección y una sección, es decir, series "decrecientes con una progresión Geométrica al infinito" (A II 1, 343). Así, supóngase una línea AB (que representa un todo) dividida siempre y constantemente siguiendo la razón de un tercio;

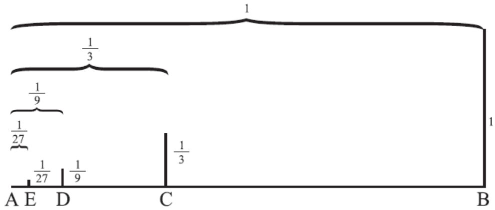

Imagen 1

Otra serie del mismo tipo que Leibniz considera es por ejemplo la serie de Zenón, 1/2 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 , es decir, tal que cada fracción es de la precedente. Lo relevante de esto es que, cuando Leibniz examina la tesis de la infinitud actual de partes del continuo, expone el continuo en una línea siguiendo la serie recién mencionada, por ejemplo en la *TMA* de 1671:

Se da el inicio y el fin de algún espacio, cuerpo, movimiento, tiem-

po: sea aquello cuyo inicio se busca expuesto en la línea ab, cuyo punto medio es c, y sea d el medio entre a y c y e entre a y d, y así sucesivamente. (A VI 2, 264)

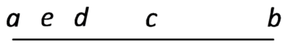

Imagen 2

En los escritos de 1672 donde afirma infinitesimales actuales, Leibniz mantiene la misma manera de argumentar (A VI 3, 81; 98-99). En síntesis, prosiguiendo la serie se alcanzarán términos infinitamente pequeños que, en la serie de Zenón, son la mitad respecto del término dado con anterioridad. De acuerdo con esto, un infinitesimal sería visto por Leibniz como una fracción o razón infinitamente pequeña. En términos actuales, si la expresión algebraica general de la serie de Zenón es 1/2n, donde n son los números naturales, el infinitesimal correspondiente se expresaría 1/2∞. No obstante, esto no significa que la división del continuo tenga un límite sino todo lo contrario: el número de partes en el continuo (lo mismo que el número de términos de una serie) no tiene un último término (A II 1, 352), y precisamente por ello pueden haber infinitesimales infinitamente más pequeños que otros.

Ahora bien, unos años más adelante Leibniz se ha referido a cantidades ficticias infinitamente pequeñas. Por ejemplo, en 1676 señala que "un ángulo será (…) el espacio comprendido por dos líneas que concurren menores que cualquiera asignable. Y tal Ente es ficticio, puesto que las líneas de este tipo [son] ficticias" (A VI 3, 499). No es nuestra intención centrarnos aquí en las razones por las cuales Leibniz ha sostenido esto (véase, por ejemplo, Arthur, 2009). Lo que nos interesa examinar es si la afirmación del carácter ficticio de los infinitesimales anula o no la manera de entender la composición del continuo presentada los años anteriores. Podría parecer *prima facie* que la respuesta a este interrogante es evidente: en 1672 Leibniz dijo que hay infinitesimales actuales que componen el continuo, pero en 1676 dijo que son ficciones. Sin embargo, hay otros pasajes de 1676 en los que parecería que Leibniz no piensa respecto del continuo algo distinto de lo que consideraba en los años anteriores. Por ejemplo:

1. Leibniz sigue defendiendo que el continuo no tiene un último término, es decir, que la división del continuo es *sine fine, interminata:*

> *[S]i supusiéramos que algún cuerpo está resuelto en acto en cosas menores, es decir, si se suponen unos Mundos en otros, ¿acaso por esto está dividido en partes Mínimas? Y así, una cosa es estar dividido sin fin y otra estar dividido en mínimos. A saber, [lo que está dividido sin fin] no tendrá una parte última. (*A VI 3, 513*)*

En el *Pacidius Philalethi* Leibniz introduce una imagen muy elocuente para referirse a la división sin fin del continuo: no ha de pensarse como la división 'de la arena en granos', que representa la división en mínimos, sino como la división 'de un papel o una túnica en pliegues':

> *Por tanto, la división del continuo no debe ser considerada como la [división] de la arena en granos, sino como la [división] de un papel o una túnica en pliegues; y así, aunque sucedan algunos pliegues infinitos en número menores que otros, no por ello ningún cuerpo se disolverá en puntos o mínimos.* (A VI 3, 555)

2. En consecuencia, Leibniz no renuncia a la afirmación de que hay infinitas partes en acto en el continuo:

> *[N]o hay ninguna porción de materia que no esté dividida en acto en muchas partes, y así, no hay ningún cuerpo tan exiguo en el cual no haya un mundo de infinitas criaturas. (…) y así como [lo está] el cuerpo, así también tanto el espacio como el tiempo estarán en acto subdivididos al infinito. (*A VI 3, 565-566*)*

3. Más aún, Leibniz concibe que seríamos infinitos en relación con cosas infinitamente más pequeñas e infinitamente pequeños en relación con cosas infinitamente grandes:

> *Ciertamente, si imagináramos criaturas de otro Mundo infinitamente pequeño, nosotros seríamos infinitos en comparación con ellos. De donde es evidente que nos podríamos imaginar, por el contrario, infinitamente pequeños en*

> *comparación con otro Mundo que sea de una magnitud infinita y sin embargo tenga un término.* (A VI 3, 475)

Estos pasajes permiten entender el planteo que nos propusimos, esto es, si decir que los infinitesimales son ficciones conlleva o no un cambio en la manera de entender la composición del continuo. Los últimos pasajes, en efecto, parecen sugerir que no. Inclusive, es llamativo que en algunos de los textos en los que están los pasajes recién citados, Leibniz señala que los infinitesimales no son entidades reales, por ejemplo, en el *Pacidius Philalethi:*

> *Yo sin duda admitiría estos espacios y tiempos infinitamente pequeños en Geometría, por el bien de la invención, aunque fueran imaginarios. Pero me pregunto si acaso pueden ser admitidos en la naturaleza. (…) [Y]a que pueden suponerse al infinito otras cosas infinitamente pequeñas aún menores que otras, nuevamente no puede ofrecerse una razón de por qué se supongan unas más que otras; pero nada sucede sin razón.* (A VI 3, 564-565)

Este pasaje parecer ser incluso paradójico, pues para negar la existencia de unas cantidades infinitamente pequeñas apela a la posibilidad de pensar en cosas infinitamente más pequeñas que ellas. No obstante, esta paradoja se disuelve si examinamos qué quiere decir Leibniz cuando se refiere a cantidades ficticias infinitamente pequeñas. El contexto en el que Leibniz se refiere a cantidades ficticias infinitamente pequeñas es el del problema geométrico de la cuadratura del círculo, es decir, el de determinar un cuadrado de igual área que un círculo. Leibniz toma como punto de partida el método de los indivisibles diseñado por Bonaventura Cavalieri para establecer la razón entre dos figuras dadas, aunque lo corrige y perfecciona pues considera que no es fiable tal como fue presentado por el matemático italiano *(DQAC*, XIII, esc., 184). Leibniz considera que la utilidad del procedimiento que él propone se esclarece tan pronto como se acepte que “toda figura curvilínea no es otra cosa que un polígono con un número infinito de lados de magnitud infinitamente pequeña” (*DQAC,* XIII, esc., 184). En este sentido, por ejemplo, Leibniz entiende que un círculo es "un Polígono mayor que cualquier asignable, como si éste fuera posible" (A VI 3, 498). En este sentido, para Leibniz, aunque siempre sea posible pensar un polígono mayor que cualquiera dado (pues los polígonos no tienen por sí mismos un límite posible de lados asignables), nuestra mente se imagina un último polígono (*mens nostra quiddam ultimum fingit*). Esta es precisamente la ficción, pensar un polígono con un número infinito de lados infinitamente pequeños, esto es, un polígono con el mayor número de lados en donde cada lado es el más pequeño de todos: así como no podría haber un polígono con más lados, supuesto que la mente imagine este último polígono, así tampoco podría haber lados más pequeños. En esto consiste precisamente la ficción, esto es, en pensar algo último (A VI 3, 498).

El hecho de que Leibniz se haya referido al círculo como un polígono infinitángulo 'como si éste fuera posible' es significativo, pues deja entrever que tal último polígono es por sí mismo algo imposible. En efecto, si los polígonos no tienen por sí mismos un límite posible de lados asignables, la idea de un último polígono es contradictoria. En cualquier caso, para Leibniz "corresponde al Metafísico investigar si la naturaleza de las cosas acepta cantidades de este tipo; al Geómetra le basta demostrar qué se sigue de su suposición" (*DQAC*, XI, esc., 98). Ahora bien, la sintética descripción que recién hemos ofrecido del modo como Leibniz se refirió a cantidades ficticias infinitamente pequeñas nos permite extraer las siguientes conclusiones:

- *Para Leibniz no existe en la naturaleza una cantidad infinitamente pequeña, esto es, última, menor que cualquiera asignable (es decir, una cantidad como que tendrían los lados del polígono infinitángulo). Para una tal cantidad, no habría una menor.*
- *No obstante, a pesar de que no existe una cantidad infinitamente pequeña en el sentido recién expuesto, Leibniz parece reconocer que existen cosas infinitamente pequeñas, esto es, no absolutamente –es decir, como recién decíamos, menores que cualquier cantidad asignable–, sino en relación con otra cosa.*

En este sentido, Leibniz (1) habría defendido que existen 'infinitesimales actuales *relacionales*', es decir, cosas infinitamente pequeñas en relación con otras, aunque hay cosas más pequeñas que ellas, incluso infinitamente, (2) al mismo tiempo que habría justificado que hay cantidades ficticias infinitamente pequeñas, en un sentido *absoluto*, esto es, como 'algo último' en pequeñez respecto de lo cual no habría otra cosa más pequeña. En consecuencia, el hecho de referirse a cantidades ficticias no habría conllevado necesariamente la negación por parte de Leibniz de la manera de entender la composición del continuo presentada los años anteriores.

Notas

[1] Algunos intérpretes del pensamiento leibniziano del problema del continuo han entendido que el continuo leibniziano de 1671 está compuesto en su totalidad de indivisibles, como Bassler, 1998 y Lison, 2006. Richard Arthur mantiene algunas veces la misma interpretación, como en Arthur, 1986: 108-109, 1998: 113, 2001: xxxii-xxxvii y 2009: 9-17, aunque en otros casos la discute, como en 2000: 7. No obstante, creemos que la interpretación de la composición leibniziana del continuo de indivisibles no concuerda con lo que ha dicho Leibniz, como hemos sugerido en Raffo Quintana, 2015a y examinado más en detalle en Raffo Quintana, 2015b.

Referencias

Andersen, Kirsti (1985), "Cavalieri's Method of Indivisibles", Archive for History of Exact Sciences, 31, pp. 291-367.

Arthur, Richard T. W. (1986), "Leibniz on Continuity", PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, 1, pp. 107-115.

Arthur, Richard T. W. (1998), "Cohesion, Division and Harmony: Physical Aspects of Leibniz's Continuum Problem (1671-1686)", Perspectives of Science, 6 nos. 1 & 2, pp. 110-135.

Arthur, Richard T. W. (2000), "Leibniz's Inversion of Zeno: Continuity of Motion, Substantial Action and Plurality", en Workshop 'Corporeal Substances and the Labyrinth of the Continuum', http://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/LIZ.pdf [Consultado: 26/10/2015]

Arthur, Richard T. W. (2001), The Labyrinth of the Continuum. Writings on the Continuum Problem, 1672-1686, textos seleccionados, traducidos y editados e introducción elaborada por Richard T. W. Arthur, New Haven y Londres: Yale University Press.

Arthur, Richard T. W. (2009), "Actual Infinitesimals in Leibniz's Early Thought", The Philosophy of the Young Leibniz, Studia Leibnitiana, Sonderheft 35, pp. 1-26.

Bassler, Otto Bradley (1998), "The Leibnizian Continuum in 1671", Studia Leibnitiana, 30, 1, pp. 1-23.

Hofmann, Joseph E. (1974), Leibniz in Paris, 1672-1676. His growth to mathematical maturity, Cambridge y New York: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1923 y ss.), Sämtliche Schriften und Briefe, Darmstadt; Leipzig; Berlin: Akademie-Verlag, (Citado como A, seguido de la serie en números romanos, el tomo en números arábigos y finalmente el número de página)

Leibniz, G. W. (2004), Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométriques qui en est le corollaire (introducción, traducción y notas de Marc Parmentier, texto latino editado por Ebenhard Knobloch), París: Vrin (citado como DQAC, seguido del número de proposición en números romanos y otra información (escolio, corolario, etc.) y finalmente por el número de página de esta edición).

Lison, Elad (2006), "The Philosophical Assumptions Underlying Leibniz's Use of the Diagonal Paradox in 1672", Studia Leibnitiana, 38, 2, pp. 197-208.

Raffo Quintana, Federico (2015a), "Indivisibles y movimiento en el continuo leibniziano", Revista Latinoamericana de Filosofía, 41 (en prensa).

Raffo Quintana, Federico (2015b), “G. W. Leibniz y L. Froidmont: coincidencias en sus abordajes del problema del continuo”, en Carosi, Carlos y Navia, Ricardo (comps.), Actas del II Congreso Internacional de la Sociedad Filosófica del Uruguay, Montevido: SFU, pp.1372-1390.

Federico Raffo Quintana
federq@gmail.com

Federico Raffo Quintana es Licenciado en Filosofía por la Universidad Católica Argentina (UCA). En su tesis de licenciatura abordó algunas problemáticas relativas al espacio, al tiempo y al movimiento en el marco del examen leibniziano del continuo. Actualmente se encuentra realizando el doctorado.