Acerca de la definición de "número"
Un abordaje wittgensteiniano

Pablo Ruiz Lezcano*

Introducción

En el ejercicio de la matemática hay algunos "objetos" en los que tienen poca relevancia el carácter ontológico y, en algunos casos, el epistemológico. Los números, el punto, la recta y el par ordenado son algunos ejemplos. Lo que importa, en general, es la relación entre ellos y su estructura. Los problemas que ha planteado la matemática a la filosofía son variados y complejos, uno de ellos es analizar la naturaleza de los conceptos mencionados. A lo largo de la historia de la matemática (y de la filosofía) algunos de ellos han sido elucidados gracias al avance de nuevas herramientas conceptuales. Por ejemplo, Euclides (trad. 2015) define a la recta como "aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella" (p. 53), mientras que actualmente se la define de diferentes formas, una de ellas es:

$$(x, y) \in \mathbb{R} \text{ tal que } ax + by = c, \text{ donde } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}$$

El acto de definir se puede describir como el ejercicio de enunciar las condiciones que un objeto (x) debe cumplir para ser aceptado o no como miembro de un conjunto. Las definiciones son respuestas a la pregunta *¿qué es x?*, *¿cuál es la naturaleza de x?* o *¿cuál es la esencia de x?* Las ciencias, así como la filosofía, intentan dar respuesta a preguntas de este tipo. La matemática no es ajena a dicha cuestión, pues gracias a ella surge una de las características relevantes de la disciplina: el acuerdo entre miembros. Sin embargo, esta situación no ha tenido lugar en relación a el concepto de número. Pues bien, ¿puede haber una definición que abarque a los distintos conjuntos numéricos, cuya introducción en un curso de matemática es heterogénea: axiomática para los naturales, algebraica para los racionales e imaginarios, topológica para los reales? ¿Qué concepto puede considerar

* Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). Los Polvorines, Malvinas Argentinas, Buenos Aires, Argentina.
pf.ruiz.lezcano@gmail.com

la discretitud de los enteros, la densidad de los racionales y la completitud de los reales? En otras palabras, ¿por qué a -2; $3/5$; $\log 7$; $\sqrt{3}$ o $-6 + 3i$ los llamamos números?

El presente artículo tiene un doble objetivo. En primer lugar, analizar algunas definiciones o elucidaciones de número que fueron dadas a lo largo de la historia de la matemática; y, en segundo lugar, señalar que la herramienta conceptual *semejanza de familia* que ofrece el filósofo Wittgenstein es adecuada para pensar la naturaleza de dicho concepto.

Análisis de algunas definiciones de número

Una posible forma de abordar la pregunta *qué es x* es indicando un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la aplicación del concepto definido [*definiendum*]. Esta tradición, llamada *esencialismo*, se origina en Sócrates y es el modelo que guió la búsqueda de definiciones en toda la historia de la filosofía hasta mediado del siglo XX (Arroyo, 2019). Estos intentos definicionales están presentes en la actividad matemática y se ilustra fácilmente en conceptos como el de número primo o circunferencia. Por ejemplo, el número primo es aquel entero que es divisible por sí mismo y por la unidad, solamente. En este caso, "número primo" es el *definiendum*[1] y las condiciones necesarias y suficientes son "ser entero", "divisible por sí mismo" y "divisible por la unidad", que forman parte del *definiens*.[2] La misma se puede representar como:

$$(x)(Px \leftrightarrow (Ex \land Dx \land Ux))$$

donde:

Px = *x es primo;*
Ex = *x es entero*
Dx = *es divisible por sí mismo y;*
Ux = *x es divisible por la unidad.*

El argumento que sostiene este enfoque se puede visualizar en varios diálogos platónicos. Sócrates intenta buscar lo común en todos los objetos que llevan el mismo nombre. Por lo tanto, el hecho de que designemos a un elemento con un único nombre es la evidencia de que debe haber un rasgo (o conjuntos de rasgos) compartidos por todas las cosas que caen

[1] Objeto que se define.
[2] Parte de la definición en la que se anuncia las condiciones.

bajo el mismo concepto (Arroyo, 2019). En consecuencia, para esta tradición, la definición es señalar aquellos rasgos comunes que comparten los miembros de una clase.

Distintas corrientes de la filosofía de la matemática o algunos filósofos/ matemáticos de renombre han desarrollado, dentro del paradigma señalado, una ardua tarea en la búsqueda de una definición o elucidación de número. A continuación, presentaremos algunas de ellas.

Euclides, en su famoso libro llamado *Los elementos,* afirma que "un número es una pluralidad compuesta de unidades" (trad. 2015, p. 284). Dicha definición es una de las muchas de la antigüedad. Por ejemplo, Nicómaco combina varias definiciones entonces en boga, al afirmar que es "una pluralidad definida" (igual que Eudoxo) o un "conjunto de unidades". Teón, por su parte, dijo que un número es "una colección de unidades"; mientras que Jámblico que la colección de unidades es aplicada a la unidad, es decir, al número.

Ya en la modernidad, Kant (1781/2014) sostiene que los números están ligados a nuestra intuición del tiempo, siendo este, igual que el espacio, una de las formas de sensibilidad pura ("estructuras" a priori). El número es, por lo tanto, una pluralidad conocida de manera determinada mediante el acto de contar, añadiendo sucesivamente una unidad a una unidad; es el resultado de desplegar en el tiempo el concepto puro de cantidad.

A partir de la mitad del siglo XIX, cuando comienza la carrera de la axiomatización de la aritmética con Dedekind y Peano, se busca un sistema de postulados capaz de deducir la aritmética de los números a la aritmética de los números naturales. En la obra *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método,* Peano propone un sistema empleando una lógica inspirada en Russell y como primitivos al "0" (cero),[3] "número natural"[4] y "sucesor".[5] Es a partir de esta base que Frege comienza la tarea de la fundamentación de la Matemática, ya que para él los axiomas que había postulado Peano no eran realmente primeros principios, en otras palabras, no eran evidentes y, por lo tanto, necesitaban ser probados. Por otro lado, Frege rechaza la intuición como fundamento del conocimiento. Es así que el matemático y lógico alemán funda el proyecto logicista, con el propósito de reducir la aritmética a la lógica y erradicar a la intuición como fun-

[3] La categoría de *cero* es la de *constante individual.*

[4] Se aplica a una determinada clase de individuos

[5] Es un término para una operación que aplicada a un individuo origina otro al cual llamamos sucesor de él. Por ejemplo, "1" se define como el "sucesor de 0". De esta forma define a todos los números naturales a partir del "1".

damento del conocimiento. En *Los fundamentos de la aritmética*, luego de criticar las definiciones de Mill, Newton, Hankel, Scröder, Schloelmilch, Hilbert y, en particular, Kant, propone una definición lógica.

Según Frege (1884/1973), Mill considera que el número es una propiedad como el color o la dureza; en cambio, para Scröder es una copia de la realidad: "es sacado de ella, por medio de la representación de las unidades mediante unos" (Frege, 1884/1972, p. 47). Por otro lado, Newton propone entender al número en un sentido amplio[6]: como una relación abstracta de cada una de las magnitudes con otra de la misma clase, que se toma como unidad. Asimismo, el psicologismo (Schloelmilch) afirma que los números son productos de la abstracción, esto es, representaciones mentales de objetos concretos.[7] Mientras que el formalismo (Hilbert) considera que son signos sin contenido expreso y que no precisa definición alguna. No contento con ambas definiciones y luego de haber argumentado en contra de las mismas, Frege sostiene que los números son objetos lógicos que caen bajo determinados conceptos. Por ejemplo: una clase C tiene el número 2 si existen objetos, x e y que están en C, tal que $x \neq y$; y si z está en C entonces o bien $z = x$ o bien $z = y$.

Las definiciones mencionadas son insatisfactorias, pues: o bien son de naturaleza circular, o bien sus condiciones no son suficientes o necesarias. La primera característica se evidencia en las propuestas de Euclides, Nicómaco, Eudoxo, Teón y Jámblico puesto que apelan a la idea de unidad, igual que Scröder; mientras que Kant, a la noción de cantidad, y Newton, a la de magnitud. En cambio, las definiciones de Mill, Schloelmilch y Hilbert tienen un *definiens* cuyas características no son necesarias o suficientes. Mientras que Frege, fiel a su propósito logicista, solo define a los números naturales. Consideramos que si el resto de los conjuntos numéricos se definen a partir de la noción de número natural, entonces el concepto número pierde sentido o no debería existir para el resto de los conjuntos, de la misma manera que la palabra mamífero es utilizada (entre otras) para definir perro. De esta forma, a cada conjunto se lo deberían llamar como "los enteros", "los racionales", "los reales", etc. Sin embargo, esto no ocurre, dado que a tales conjuntos se los llama como "los números enteros", "los números racionales", "los números reales", etc.

En consecuencia, no se ha ofrecido hasta ahora una definición aceptable de "número", la razón tal vez sea que esa definición no es posible.

[6] Incluye a los racionales e irracionales.

[7] Como si fuera una imagen.

El hecho de que aún no haya sido encontrada la definición no implica, claro está, su imposibilidad; pero cuando se han realizados varios intentos para dar con este problema y todos han sido insatisfactorios, tal vez pueda tomarse como un indicio de que la pregunta por la definición de número está mal planteada.

***Semejanza de familia*: abordaje wittgensteiniano del concepto de número**

Entre los parágrafos 65 a 68 de *Investigaciones filosóficas* (*IF* en adelante), Wittgenstein (1954/2008) cuestiona el presupuesto que se esconde en las definiciones esencialistas. En conformidad a su postura sobre la Filosofía y sobre la naturaleza de los problemas filosóficos, el filósofo critica el impulso a la búsqueda de un elemento (o conjuntos de elementos) en común; o sea, a la noción de esencia:

> en vez de indicar algo que sea común a todo lo que llamamos lenguaje, digo que no hay nada en absoluto común a estos fenómenos por lo cual empleamos la misma palabra para todos—sino que están *emparentados* entre sí de muchas maneras diferentes. Y a causa de este parentesco, o de estos parentescos, los llamamos a todos "lenguaje". (Wittgenstein, 1954/2008, p. 87 [§65])

A diferencia de lo que afirmaba en el *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein sostiene aquí que no hay un rasgo común (o conjunto de rasgos) a todos los fenómenos que llamamos lenguaje. El concepto "lenguaje" puede ser construido de forma análoga a lo que Wittgenstein hace con el concepto de "juego":

> Considera, por ejemplo, los procesos que llamamos "juegos". Me refiero a juegos de tablero, juegos de cartas, juegos de pelota, juegos de lucha, etc. ¿Qué hay común a todos ellos? —No digas: "Tiene que haber algo común a ellos o no los llamaríamos 'juegos'"—sino *mira* si hay algo común a todos ellos. —Pues si los miras no verás por cierto algo común a *todos,* sino que verás semejanzas, parentescos y por cierto toda una serie de ellos. Como se ha dicho: ¡no pienses, sino mira! [...] Podemos ver como los parecidos surgen y desaparecen. [...] Y el resultado de este examen reza así: vemos una complicada red de parecido que se superponen y entrecruzan. (Wittgenstein, 1954/2008, p. 87 [§66])

De esta forma, Wittgenstein piensa que no hay una característica común a todo lo que llamamos "lenguaje" o "juego". Pero esto no implica afirmar que los distintos significados de "juego" son independientes unos de otros, ya que los objetos que caen bajo la clase que denominamos "juegos" es por una relación de *semejanzas*: un conjunto de rasgos que no están presentes en todos los miembros, sino que se superponen y entrecruzan de la misma manera que se superponen y entrecruzan los rasgos físicos y psicológicos entre los miembros de una familia. A estas relaciones, Wittgenstein (1954/2008) las denomina *semejanzas (o parecidos) de familia.* Wittgenstein sostiene que la razón por la cual a dichos objetos los llamamos "juego" o "lenguaje" es la existencia de un "buen número" de características asociadas entre los miembros de esa clase (Arroyo, 2019). Hay sin duda algo en los fenómenos que llamamos "juego" o "lenguaje" que permite su reconocimiento, este es un "rango de aplicación que se va ampliando en función no de un elemento que esté presente en todos los casos, sino porque se van dando relaciones de semejanza entre los objetos de modo tal que nos permiten seguir aplicando el mismo término" (Bassols, 2014, p. 19), y son los hablantes, en base a consideraciones de orden práctico, quienes fijan hasta donde se da dicha semejanza, fijando una flexibilidad sin que sea arbitraria. Podría decirse que Wittgenstein inicia una nueva tradición en las teorías de las definiciones: el *antiesencialismo*.

El concepto de *semejanza de familia* es pertinente para comprender la noción de número. Es más, Wittgenstein (1954/2008) sostiene que estos conforman una familia: están unidos entre sí por relaciones de semejanzas, en donde hay propiedades que se entrecruzan, se superponen y, en algunos casos, no están presentes. ¿Cuáles podrían ser esas propiedades? Un libro clásico de matemática, *Calculus* de Spivak (1967/2014), nos puede ayudar sobre esta cuestión. Define a los números reales como aquellos que cumplen una serie de propiedades básicas, estas son:

1) Propiedad asociativa de la suma.
2) Elemento neutro de la suma.
3) Existencia del opuesto (o inverso aditivo).
4) Propiedad conmutativa de la suma.
5) Propiedad asociativa de la suma.
6) Elemento neutro de la multiplicación.
7) Existencia del inverso multiplicativo (excepto el cero).

8) Propiedad conmutativa de la multiplicación.

9) Propiedad distributiva.

10) Ley de tricotomía.

11) Si *a* y *b* pertenecen a P,[8] entonces $a + b$ pertenecen a P.

12) Si *a* y *b* pertenecen a P, entonces *a.b* pertenecen a P.

Si consideramos los otros conjuntos numéricos "clásicos" (Naturales, enteros, racionales y complejos) observamos que algunas de estas propiedades no están presentes en los mismos, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Propiedades	Naturales	Enteros	Racionales	Reales	Complejos
Asociatividad de la suma.	x	x	x	x	x
Elemento neutro de la suma.		x	x	x	x
Existencia del opuesto (o inverso aditivo).		x	x	x	x
Conmutativa de la suma.	x	x	x	x	x
Asociatividad de la multiplicación.	x	x	x	x	x
Elemento neutro de la multiplicación.	x	x	x	x	x
Existencia del inverso multiplicativo (excepto el cero).			x	x	x
Conmutatividad de la multiplicación.	x	x	x	x	x
Propiedad distributiva.	x	x	x	x	x
Ley de tricotomía.	x	x	x	x	
Si *a* y *b* pertenecen a P, entonces $a + b$ pertenecen a P.	x	x	x	x	
Si *a* y *b* pertenecen a P, entonces *a.b* pertenecen a P.	x	x	x	x	

[8] Conjunto de los números positivos.

Notemos que las propiedades mencionadas no son condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a los naturales, a los enteros y mucho menos a los complejos; es más, el cuadro se puede complejizar si tomamos otros "rasgos", como la discretitud, la densidad o la completitud. Los naturales, por ejemplo, no tienen un inverso aditivo; los enteros, en cambio, sí, pero no cuentan con un inverso multiplicativo. Los racionales, por su parte, cumplen todas las propiedades y encima es un conjunto denso en $\mathbb{R}$ cosa que no sucede con los enteros. Los reales cumplen las propiedades mencionadas y es completo: "rasgo" que no tiene los racionales. A su vez, los complejos son un conjunto completo, pero no satisfacen las propiedades de orden. Entonces, ¿basta que cumplan las propiedades de asociatividad y/o conmutatividad de la suma y/o multiplicación? La respuesta es "no": existen objetos matemáticos que satisfacen algunas de las mencionadas y no son números; ejemplo: sean A y B dos matrices de igual tamaño, entonces $A + B = B + A$. Asimismo, existen números que no la cumplen: los cuaterniones, por ejemplo.

Gracias a la representación vectorial de los números complejos, el matemático Hamilton decidió crear un "estructura análoga" para representar vectores en el espacio, dando origen a los números cuaterniones en 1853. Un ejemplo es

$$3 + 2i + 7j - 6k,$$

donde i, j y k tienen un papel semejante al que juega i en los números complejos, asumiendo que se debe cumplir:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1;$$

$$i.j = -j.i = k;$$

$$j.k = -k.j = i;$$

$$k.i = -i.k = j$$

Hasta el momento, los números señalados (naturales, enteros, racionales, reales y complejos) cumplen la propiedad conmutativa de la multiplicación. Sin embargo, los cuaterniones no la obedecen. Por ejemplo, sean los números

$$3 + 2i + 7j - 6k$$

y

$$4 + 6i + 8j - 9k$$

Por lo tanto, si realizamos la distributiva y la asociatividad y conmutatividad de la suma, queda:

$$(3 + 2i + 7j - 6k).(4 + 6i + 8j + 9k) = -2 + 137i - 2j - 23k$$

y

$$(4 + 6i + 8j + 9k).(3 + 2i + 7j - 6k) = -2 - 85i + 106j + 29k$$

Así se concluye:

$$(4 + 6i + 8j + 9k).(3 + 2i + 7j - 6k) \neq (3 + 2i + 7j - 6k).(4 + 6i + 8j + 9k)$$

Hamilton debió ir en contra de la tendencia establecida por los algebristas, de la misma manera que los fundadores de las geometrías no euclídeas, Bolyai y Lobachevsky, al no considerar el quinto postulado de la geometría euclidiana. Al renunciar la propiedad conmutativa de la multiplicación, Hamilton da lugar a las nuevas álgebras, aquellas donde esta propiedad no es necesaria. Una década antes, John Thomas Graves llevó a cabo un estudio (aunque no lo publicó) sobre los octoniones (un álgebra 8-dimensional), donde el producto no satisfacía ni la propiedad conmutativa ni la propiedad asociativa (Sánchez Muñoz, 2011).

Los últimos párrafos son ejemplos de un aspecto que Wittgenstein resalta en *IF*:

> Y extendemos nuestro concepto de número como cuando al hilar trenzamos una madeja hilo a hilo. Y la robustez de la madeja no reside en que una fibra recorra toda su longitud, sino en que se superpongan muchas fibras. (Wittgenstein, 1954/2008, p. 89 [§67])

En esta cita el autor, fiel a su estilo metafórico, compara la cohesión entre los miembros de una clase con la manera en que se consigue la robustez de una madeja de hilo. La razón por la cual un objeto es incluido a una clase puede ser porque se *parece* a los objetos previamente incluidos. Asimismo, los hilos que se superponen corresponden a las propiedades que conectan entre sí a los individuos haciéndolos miembros de una clase. La robustez de la madeja corresponde a la racionalidad que guía la inclusión o exclusión de un individuo en una clase. De la misma manera que una madeja no pierde su robustez al perder un hilo, nuestra decisión no deja de ser racional por el hecho de que no exista un conjunto preestablecido de propiedades. Al incluir un miembro en una clase, ese trae consigo nuevas propiedades o, incluso, desaparecen (Arroyo, 2019). El concepto de número es, en consecuencia, un concepto abierto y no puede ser considerado como la suma lógica de los casos particulares:

> "Perfecto; así pues, el concepto de número se explica para ti como la suma lógica de estos conceptos individuales emparentados entre sí: número cardinal, número racional, número real, etc., y del mismo modo el concepto de juego sería la suma lógica de los correspondientes conceptos parciales" —No tiene por qué ser así. Pues *puedo* darles límites rígidos al concepto de "número" así, esto es, usando la palabra *número* como designación de un concepto rígidamente delimitado, pero también puedo usarla de modo que la extensión del concepto *no* esté cerrada por un límite. Y así es como empleamos de hecho la palabra "juego". ¿Pues de qué modo está cerrado el concepto de juego? ¿Qué es aún un juego y qué no lo es ya? ¿Puedes indicar el límite? No. Puede *trazar* uno: pues no hay aún ninguno trazado. (Pero eso nunca te ha incomodado cuando has aplicado la palabra "juego"). (Wittgenstein, 1954/2008, p. 89 [§68])

Conclusión

En primer lugar, consideramos que el concepto de número, igual que el de "juego", "lenguaje" e incluso el de "arte" (cf. Weitz, 1956), no puede ser definido en términos esencialistas, pero conforman una familia. En segundo lugar, si bien hay una imposibilidad de definirlos bajo una tradición socrática, esto no implica que no se pueda reconocerlos e incluso enseñarlos, la relación de semejanza que hay entre ellos es el motivo por el cual se puede dar el reconocimiento; así, llamamos $\aleph_0$ o $4 + 6i + 6j + 9k$ "número" porque entra en el juego del lenguaje de los matemáticos (Bassols, 2014). A su vez, el concepto de número no puede ser considerado cerrado ni como la suma lógica de todos los casos particulares y, por otro lado, la relación de semejanza entre ellos se torna más evidente si consideramos a otros conjuntos numéricos, tales como los p-ádicos o los hipercomplejos u otras estructuras. Por último, las definiciones de número que han sido dadas en las primeras páginas son, de una forma u otra, de carácter ontológico, mientras que el análisis que empleamos por medio de la herramienta *semejanza de familia* es de tipo algebraico; esta diferencia se dio porque no debemos pensar la noción número ignorando a la comunidad que trabaja con ellos. Los pasajes señalados de *IF* nos transmite la imposibilidad de concebir al "lenguaje" y al "juego" como actividades aisladas y separada del resto de actividades no-lingüísticas (Rivera, 2006). También nos dice que las afirmaciones filosóficas que se construyen alrededor de un concepto son incomprensiones del lenguaje e ignoran su carácter contextual: en la búsqueda de esencias inevitablemente se olvida la diversidad y los casos particulares. Por tal motivo es que consideramos los libros de matemática para comprender los rasgos de los números. Asimismo, si un concepto no puede ser definido en términos tradicionales no es algo problemático para Wittgenstein, el significado de un término, según él, no depende de un conjunto de propiedades sino del "uso" que le damos; es decir, la función que juega la palabra en un "juego de lenguaje" (Wittgenstein, 1954/2008, p. 309 [§432]). Teniendo en cuenta la categoría wittgensteiniana de *semejanza de familia* y su enfoque pragmático en *IF* y un enfoque histórico y fenomenológico para comprender la actividad matemática y sus objetos (Zalamea, 2009), entonces, se concluye que el concepto de "número" es abierto. Es, en palabras de Wittgenstein, "un concepto de bordes borrosos" (1954/2008, p. 91 [§71]). No hay un conjunto de propiedades preestablecidas para definir número, a diferencia de otros conceptos matemáticos; es más, al incluir un miembro este "trae" consigo nuevas propiedades o desaparecen otras. Este miembro se comprende a partir de la actividad matemática y cobra "vida" con su "uso". La inercia de los matemáticos (la necesidad de resolver problemas) es la que permite que el concepto de número se "amplíe", dando lugar, de esta forma, a "nuevos números".

Referencias

Arroyo, G. (2019). *Teoría de las definiciones: una introducción crítica*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Bassols A. T. (2014). La filosofía de las matemáticas del segundo Wittgenstein. *Praxis filosófica* (39), 11-40.

Euclides. (2015). *Elementos* (M. L.Puertas Castaños, trad.). Madrid. Gredos. (Obra original ca. 300 a.C.)

Frege G. (1973). *Los fundamentos de la aritmética* (U. Moulines, trad.). Barcelona: Laia. (Obra original de 1884)

Kant I. (2014) *Crítica de la razón pura* (2.ª ed., M. Caimi, trad.). Buenos

Aires: Colihue clásica. (Obra original de 1781)

Rivera, S. (2006). *Ludwig Wittgenstein. Entre paradojas y aporías.* Buenos Aires: Prometeo Libros.

Sánchez Muñoz, J. M. (2011). Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones. *Pensamiento Matemático, 1*(2), 1-27.

Spivak, M. (2014). *Calculus* (4.° ed., J. M. Oller Sala, trad.). Barcelona: Reverté. (Obra original de 1967)

Weitz, M. (1956). The role of theory in aesthetics. *The Journal of Aesthetics and Art Criticism, 15*(1), 27-35.

Wittgenstein, L. (2008) *Investigaciones filosóficas.* (4.ª ed., A. García Suarez & U. Moulines, trads.). Crítica, Barcelona. (Obra original de 1954)

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas.* Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.