CONOCIMIENTOS PREVIOS SOBRE PROPIEDADES DE OPERACIONES CON NÚMEROS REALES DE INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD. SU ANÁLISIS USANDO ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO

MARÍA E. MENDOZA - LILIANA N. CAPUTO – EUDARDO A. PORCEL – PAULA D. BORDÓN
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA)
Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
mat.mendoza2812@gmail.com - proflcaputo@gmail.com - esteporcel@gmail.com - paulabordon85@gmail.com

Fecha recepción: Octubre 2018 Fecha aprobación: Septiembre 2019

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo determinar los conocimientos de los ingresantes universitarios respecto a las propiedades de operaciones con números reales (suma, multiplicación, potenciación y radicación) y qué relaciones establecen entre los saberes que al respecto han construido en su formación preuniversitaria. Para cumplir los objetivos propuestos, se analizaron, utilizando Análisis Estadístico Implicativo (ASI), las respuestas al tercer ítem de la prueba de diagnóstico de conocimientos previos de números reales, suministrada a ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas de la UNNE, al inicio del ciclo lectivo 2017. ASI es una técnica de análisis multivariado que permite establecer relaciones del tipo “si p, entonces, casi siempre q” (cuasi-implicaciones o reglas) entre variables (las respuestas al ítem de evaluación citado). Estas relaciones permiten explorar las relaciones conceptuales establecidas por el sujeto evaluado y detectar las dificultades cognitivas que dichos conceptos les ofrecen. Los resultados se presentan y visualizan mediante un “grafo implicativo” y posteriormente se construyen árboles de similaridad y árboles cohesitivos que permiten establecer R-reglas (cuasi implicaciones que relacionan variables con reglas o reglas entre sí). Se observaron saberes y relaciones conceptuales establecidas por los alumnos que dan cuenta de su escasa evolución desde el pensamiento aritmético al algebraico.

PALABRAS CLAVE: Análisis Estadístico Implicativo - Cuasi-Implicaciones -Operaciones con Números Reales – Evaluación de ingresantes.

ABSTRACT

This work’s objective is to determine how knowledgeable new university students are regarding the properties of operations with real numbers (addition, multiplication, exponentiation and nth root) and what relations they establish between the knowledge that they have acquired in their pre-university education. In order to accomplish the planned objectives, in this work, via use of Statistical Implicative Analysis (SIA), the answers provided to a questionnaire found in a test of previous real numbers knowledge that was taken by new students of Facultad de Ciencias Exactas–UNNE (at the beginning of the academic year of 2017)were analyzed. SIA is a multivariate analysis technique that allows relations of type “if p, then, almost q” (quasi-implications or rules) between variables (the answers provided to the previously-mentioned question) to be established. These relations allow for exploration of the conceptual relations established by the analyzed subject and detect the cognitive difficulties that said concepts offer. The results are represented and visualized by use of an “implicative graph” and later bysimilarity and cohesitive trees that make possible the establishment of R-rules (quasi-implications that relate variables and rules or rules between each other). By observing the knowledge and conceptual relations established by the students, their lacking evolution from arithmetic thinking to algebraic is brought to light.

KEYWORDS: Statistical Implicative Analysis -Quasi-Implications - Operations with Real Numbers – Freshman´s Evaluation.

1. INTRODUCCIÓN

Es usual que los docentes y autoridades de las Instituciones de Educación Superior vinculen los elevados niveles de fracaso de sus alumnos de primer año con deficiencias de la formación de los jóvenes en los niveles educativos previos. Esta problemática se acentúa aún más en el caso de estudiantes de carreras técnicas o científicas relacionadas con las ciencias exactas, que requieren de una sólida formación matemática para un mejor desempeño en sus estudios.

Por lo general, los docentes afirman que estas insuficiencias de conocimientos conducen a que los estudiantes de los cursos iniciales de Matemática cometan errores que les impiden superar con éxito las instancias de evaluación requeridas para la acreditación de dichos cursos. Existen numerosas investigaciones que dan cuenta de los errores cometidos por ingresantes a la universidad al ser indagados respecto a sus conocimientos matemáticos, antes de iniciar sus estudios superiores. Por ejemplo, Abrate, Pochulu y Vargas (2006) al analizar los resultados de un examen de diagnóstico de ingresantes a carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Villa María (Córdoba, Argentina) concluyen que los estudiantes cometen numerosos errores vinculados con un pensamiento inductivo que los conduce a generalizaciones abusivas y otros errores que son consecuencia, principalmente, de los hábitos escolares adquiridos en la formación matemática previa.

A diferencia de los trabajos antes mencionados, en éste interesa conocer cuáles son los saberes de los ingresantes con respecto a las propiedades de las operaciones con números reales y qué relaciones establecen entre ellos.

Para alcanzar los objetivos propuestos, se utilizó el Análisis Estadístico Implicativo (ASI, sigla de su nombre en francés *Analyse Statistique Implicative*) para analizar las respuestas a un ítem de la evaluación de diagnóstico de conocimientos matemáticos previos referida a números reales. La misma fue suministrada en 2017 a los ingresantes a las carreras Ingeniería Eléctrica, en Agrimensura y en Electrónica, Licenciatura en Ciencias Químicas, en Ciencias Físicas y Profesorado en Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) que asistieron a la primera clase práctica de Álgebra y Geometría Analítica, previo al tratamiento didáctico del tema en el marco de la asignatura.

El presente trabajo, consiste en el análisis implicativo de las respuestas de los estudiantes al tercer ítem de la prueba. Asimismo, se ha restringido el análisis a los valores de verdad de las 10 proposiciones dadas, puesto que los alumnos no han utilizado contraejemplos en los casos que dichas afirmaciones son falsas, utilizando sí – en muchos casos – ejemplos numéricos para justificar que las proposiciones son verdaderas. Así pues, resulta imposible vincular los conocimientos sobre las propiedades de las operaciones que han construido, con las acciones que podrían llevar a cabo para justificar afirmaciones.

2. DESARROLLO

2.1. Metodología

ASI es un método de Estadística Multivariada que fue creado por Régis Gras y sus colaboradores de la Universidad de Nantes (Francia) a partir de la hipótesis: "*si un ejercicio es más complejo que otro, entonces todo alumno que resuelve el primero debería resolver también el segundo*" (Régnier, 2013) para establecer relaciones del tipo "si a, entonces, casi siempre b" (llamadas cuasi-implicaciones o reglas) entre las respuestas a ítems de evaluación. Se diferencia de los métodos clásicos de asociación de variables (los cuales identifican relaciones simétricas) en que las relaciones que detecta el ASI entre las variables son, de alguna manera, de tipo causa-efecto.

Para la aplicación de ASI se hace necesario contar con un conjunto finito de variables V, variables que en este caso se consideran dicotómicas y que son tantas como ítems y/o subítems de evaluación contenga la prueba analizada. Además, es preciso contar con un conjunto, también finito, formado por los individuos evaluados, al que denotaremos con E (al número de elementos o cardinal de E se lo denotará con #(E)). Entonces, la variable $v_{ax} = 1$ si el individuo x respondió correctamente el ítem a del examen, mientras que si la respondió incorrectamente o no la respondió, $v_{ax}= 0$.

Se sabe que en la lógica bivalente, si p es una proposición verdadera, $p \Rightarrow q$ lo es sólo si también q es verdadera; es probable que al analizar las respuestas de los alumnos suceda que dados $x \in E$, v_a, $v_b \in V$, $v_{ax} = 1$ y $v_{ax} = 0$. Eso, sin embargo, no significa que conocer v_a no es suficiente para conocer v_b y es por eso que ASI establece cuasi-implicaciones: "si el alumno responde correctamente v_a, casi siempre responde correctamente v_b"; para determinar la existencia o no de la regla $v_a \Rightarrow v_b$ es necesario relativizar el peso de los contraejemplos es decir, de los casos de aquellos sujetos x tales que $v_{ax}= 1$ y $v_{bx}= 0$.

Así pues, sean v_a, $v_b \in V$, $A = \{x \in E \,/\, v_{ax} = 1\}$ y $B = \{x \in E \,/\, v_{bx} = 1\}$. Resulta evidente que, en el sentido clásico, para que $v_a \Rightarrow v_b$ sea verdadera, debe ocurrir que $A \subset B$, pero ya se ha dicho que, en la práctica, esto no sucede, por lo cual $A – B \neq \phi$.

Sean X e Y dos subconjuntos de E equipotentes con A y B, respectivamente (ésto es $\#(X) = \#(A)$ y $\#(Y) = \#(B)$), de los cuales se ignora *a priori* si están vinculados entre sí. Entonces, Gras y Kuntz (2009) afirman que la implicación $v_a \Rightarrow v_b$ es admisible a un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ si, y sólo si,

$$\Pr[\#(X – Y) \leq \#(A – B)] \leq \alpha$$

Estas probabilidades pueden calcularse utilizando las distribuciones Hipergeométrica, Binomial o de Poisson, según sea el tipo de población (finita o infinita) y el tamaño de muestra (fijo o indeterminado) (Bodin; 1995). Ahora bien, cuando el tamaño de la población (N) tiende a infinito, la Hipergeométrica tiende a la Binomial de parámetros n y p (siendo n el tamaño de muestra y p el cociente entre el número de casos favorables al suceso de interés y N), con p constante; pero – a su vez – cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito, la Binomial converge a la ley de Poisson de parámetro $\lambda = \frac{\#(A).\#(E- B)}{\#(E)}$ (Caputo, Jorge, Espinoza, Porcel & Romero, 2016).

Por otra parte, se define el índice de implicación $v_a \Rightarrow v_{\neg b}$ como:

$$q(v_a, v_{\neg b}) = \frac{\#(A-B) - \frac{\#(A).\#(E-B)}{\#(E)}}{\sqrt{\frac{\#(A).\#(E-B)}{\#(E)}}}$$

que estima la diferencia entre $\#(A – B)$ y el valor que éste habría tomado si v_a y v_b fueran independientes (diferencia que se denota con $Q(v_a,v_{\neg b})$).

Bajo determinadas condiciones $Q(v_a, v_{\neg b})$ se aproxima a la distribución Normal (0,1), por lo que - a partir de $q(v_a, v_{\neg b})$ - se define la intensidad de implicación, que mide la calidad inductiva de v_a sobre v_b, como sigue:

$$\varphi(v_a, v_b) = \begin{cases} 1 - \Pr[Q(v_a, v_{\neg b}) \leq q(v_a, v_{\neg b})] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{q(v_a, v\neg b)}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}}dt & \text{si } \#(B) \neq \#(E) \\ 0 & \text{si } \#(B) = \#(E) \end{cases}$$

Entonces, se puede redefinir la admisibilidad de la implicación $v_a \Rightarrow v_b$ al nivel de confianza $(1 - \alpha)$, diciendo que la misma es admisible a dicho nivel si $\varphi(v_a, v_b) \geq (1 - \alpha)$.

Bodin (1995) señala que una muestra de más de 100 individuos puede considerarse una muestra de gran tamaño al aplicar ASI; por su parte, Gras y Kuntz (2009) afirman que, si #(E) es muy grande, es necesario introducir el concepto de entropía de Shannon y definir un índice que dé cuentas de la admisibilidad de la implicación y de su contrarrecíproca, a partir de un número pequeño de contraejemplos de ambas.

Definimos la entropía de v_b habiéndose dado v_a, como sigue:

$$h_1(t) = \begin{cases} -(1 - t\alpha^{-1})\log_2(1 - t\alpha^{-1}) - t\alpha^{-1}\log_2(t\alpha^{-1}) & \text{si } t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right[\\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \end{cases}, \quad \text{con}$$

$\alpha = \frac{\#(A)}{\#(E)}$, y $t = \frac{\#(A-B)}{\#(E)}$.

De la misma manera, la entropía de $v_{\neg a}$, si no se verifica v_b es:

$$h_2(t) = \begin{cases} -(1 - t\overline{\beta}^{-1})\log_2\left(1 - t\overline{\beta}^{-1}\right) - t\overline{\beta}^{-1}\log_2\left(t\overline{\beta}^{-1}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{\overline{\beta}}{2}\right[\\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\overline{\beta}}{2}, \overline{\beta}\right] \end{cases} \quad \text{con}$$

$\overline{\beta} = \frac{\#(E-B)}{\#(E)}$ y $t = \frac{\#(A-B)}{\#(E)}$

Así pues, el índice que da cuentas de la admisibilidad de $v_a \Rightarrow v_b$ y de su contrarrecíproca se define como:

$$i(v_a, v_b) = \sqrt[4]{\left(1 - h_1^2(t)\right)\left(1 - h_2^2(t)\right)}.$$

La intensidad entrópica de $v_a \Rightarrow v_b$, en cambio, se define como:

$$\psi(v_a, v_b) = \sqrt{i(v_a, v_b).\,\varphi(v_a, v_b)}.$$

La Ley del Silogismo Hipotético $((v_a \Rightarrow v_b \wedge v_b \Rightarrow v_c) \Rightarrow (v_a \Rightarrow v_b))$ es la tautología que fundamenta, en general, las demostraciones matemáticas. Pero, cuando se trabaja con cuasi-implicaciones de variables v_a, v_b, v_c no es necesariamente una ley de inferencia. Por ello, se considera que se cumple dicha ley si, y sólo si, $\psi(v_b, v_c) \geq 0{,}5$ (Gras y Kuntz; 2009).

De esta manera, vemos que pueden modelizarse reglas que implican otras reglas (llamadas meta-reglas o R - reglas) y pueden darse las siguientes posibilidades:

a) Que $a \Rightarrow b$ (donde a y b pueden ser variables o reglas) implique una variable v_c. Es decir que $(a \Rightarrow b) \Rightarrow v_c$.

b) Que una variable v_a implique una regla $b \Rightarrow c$ (donde c y b pueden ser variables o reglas). Es decir, la meta-regla es $v_a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$. Debe recordarse que la implicación antes mencionada es equivalente a: $(v_a \wedge b) \Rightarrow c$.

c) Que una regla implique a otra es decir, $(v_a \Rightarrow v_b) \Rightarrow (v_d \Rightarrow v_c)$.

Así pues, la estructura que deviene de la combinación de estas posibilidades es jerárquica y supone una perspectiva dinámica y no estática, como es la de una simple tipología.

Para describir esta estructura jerárquica se hace necesario introducir el concepto de cohesión que supone la definición de un orden parcial entre clases de variables. Para ello se definen:

La cohesión de la clase (a, b) se define como:

$$\mathrm{c(a,b)} = \begin{cases} 1 & si\ \psi(\mathrm{a,b}) = 1 \\ 0 & si\ \psi(\mathrm{a,b}) = 0{,}5 \\ \sqrt{1-\mathrm{H}^2} & si\ \psi(\mathrm{a,b}) = \mathrm{p}\ \wedge \mathrm{H} = -\mathrm{p}.\log_2\mathrm{p} - (1-\mathrm{p}).\log_2(1-\mathrm{p}) \end{cases}$$

De igual manera, la cohesión de la clase ordenada A = (a_1, …,a_r) es la media geométrica de las cohesiones de parejas a_i y a_j (con i, j variando de 1 a r e i ≠ j), que se anula – únicamente - cuando es nula alguna de dichas cohesiones.

Para obtener los resultados, se utiliza el software *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* (CHIC), creado también por el grupo de investigación de Régis Gras. CHIC presenta los resultados mediante una tabla de doble entrada con la intensidad de todas las posibles cuasi-implicaciones y, para una mejor interpretación de los resultados, un digrafo ponderado llamado “grafo implicativo” (Couturier; 2009) en el cual el peso de cada arco representa la intensidad de la correspondiente cuasi-implicación (clásica o entrópica): por medio de arcos verdes se representan las cuasi-implicaciones que tienen una intensidad de 0,85 y con arcos rojos las cuasi-implicaciones que tienen intensidad de 0,95.

Para determinar las clases de variables e interpretar las R – reglas surgidas al analizar un conjunto de datos con ASI, CHIC proporciona gráficos (similares a los dendogramas) que se llaman árbol de similaridad y árbol cohesitivo, respectivamente (Couturier; 2009).

2.2. Uso de ASI para el análisis de un ítem de evaluación

Como se dijo en 1. y en 2.1., la prueba de diagnóstico fue suministrada a los 185 ingresantes de las carreras ya mencionadas que asistieron a la primera clase práctica de la asignatura (de 2 horas reloj de duración), razón por la cual el tamaño de muestra resultó indeterminado (Bodin, 1995). Dicha prueba estaba constituida por tres ítems en los cuales se solicitaba:

1. Identificar si 10 números son reales o no y, en el caso de serlo, consignar a qué subconjunto numérico de $\mathbb{R}$ pertenece cada uno de ellos.
2. Representar en la recta real 5 de los reales dados en 1.
3. Determinar el valor de verdad de 10 proposiciones referidas a definición y propiedades de las operaciones con números reales, justificando la respuesta mediante un contraejemplo si alguna fuera falsa, o citando las definiciones y/o propiedades que justifiquen que es verdadera, en caso contrario (no se exigió demostraciones formales de las proposiciones verdaderas, dado que la evaluación se implementó en la primera clase de la asignatura, cuando aún no se habían presentado métodos de demostración de proposiciones).

En la Tabla 1 se presentan las proposiciones de las cuales los alumnos debían determinar el valor de verdad y se identifica el nombre de las variables en estudio.

Seguidamente, se harán algunas consideraciones necesarias para, *a posteriori*, presentar los resultados del análisis:

Se denota con I_{ij}, con $1 \leq i \leq 10$, a las variables consignadas en las columnas 1 y 3 de la Tabla 1. En consecuencia, se tiene 10 variables en estudio (una por cada proposición dada). Es importante señalar que I_{ij} = 1 si el valor de verdad dado por el estudiante j al ítem i es correcto. En caso contrario (si el alumno j respondió incorrectamente o no respondió dicho ítem), I_{ij} = 0.

I_{1j}	$\frac{ab^2-1}{10m-1}=\frac{ab^2}{10m}$	I_{6j}	$(a.b)^3=a^3.b^3$
I_{2j}	$\frac{3a}{n}-\frac{10b^5+3}{m}=\frac{3am-10nb^5-3n}{n.m}$	I_{7j}	$(a^n)^m=a^{n.m}$
I_{3j}	$\frac{ac^2+2b}{c^2}=a+\frac{2b}{c^2}$	I_{8j}	$a^n.a^m=(a^2)^{m+n}$
I_{4j}	$a^2-b^2=(a-b).(a+b)$	I_{9j}	$+\sqrt{a^2}=a$
I_{5j}	$a^0=1$	I_{10j}	$\frac{m}{\sqrt{m}}=\sqrt{m}$

Observación: a, b, c son números reales, mientras que m, n son naturales

TABLA 1. Variables en estudio.

Las proposiciones correspondientes a las variables I_{2j}, I_{4j}, I_{6j}, I_{7j} e I_{10j} son verdaderas y las restantes falsas. En efecto:

Se observa que si a = b = m = 1, se tiene que:

$$\frac{ab^2-1}{10m-1}=\frac{1-1}{10-1}=0\neq\frac{1}{10}=\frac{ab^2}{10m}$$

luego, la proposición asociada a I_1 es FALSA.

En cambio, la correspondiente a I_2 es VERDADERA. Pues si a, b son números reales, m y son números naturales, resulta:

$$\frac{3a}{n}-\frac{10b^5+3}{m}=\frac{3am}{nm}-\frac{n(10b^5+3)}{nm}=\frac{3am-\ n(10b^5+3)}{nm}=\frac{3am-10mb^5-3n}{nm}$$

Se observa que si c = 0, aun cuando a y b sean números reales, no puede calcularse la suma $a+\frac{2b}{c^2}$ utilizando la operatoria habitual en $\mathbb{R}$, puesto que $\frac{2b}{c^2}\notin\mathbb{R}$. En consecuencia, la proposición dada (variable I_3) es FALSA.

Dados a, b $\in\mathbb{R}$, cualesquiera, se tiene que

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2+ab-ab-b^2=a^2+0-b^2=a^2-b^2$$

Es decir, la proposición asociada a I_4 es VERDADERA.

Si $Si\ a=0, a^0=0^0\notin\mathbb{R}\ \text{y, por lo tanto,}\ a^0\neq 1$ es decir, la igualdad correspondiente a I_5 es FALSA.

Las proposiciones correspondientes a las variables I_6 e I_7 son VERDADERAS, puesto que corresponden a propiedades de la potenciación válidas para todos a, b $\in\mathbb{R}$ y para todos m, n $\in\mathbb{N}$ que se pueden demostrar fácilmente por inducción sobre n. Estas propiedades se conocen como ley distributiva de la potenciación con respecto al producto (I_6) y potencia de potencia (I_7).

La igualdad identificada por la variable I_8, en cambio, es FALSA. En efecto, sean a = n = 2 y m = 3, entonces:

$$a^n.a^m=2^2.2^3=4.8=32=2^5\neq 2^{10}=2^{2.5}=(2^2)^5=(2^2)^{2+3}=(a^2)^{n+m}$$

También es FALSA la proposición asociada a I_9. Contraejemplo:

$$\text{Si } a=-8, +\sqrt{a^2}=+\sqrt{(-8)^2}=+\sqrt{64}=8\neq -8=a$$

Finalmente, la proposición correspondiente a la variable I_{10} es VERDADERA. En efecto, si m es un número natural, $\sqrt{m} \in \mathbb{R} - \{0\}$; luego, $\frac{m}{\sqrt{m}} \in \mathbb{R}$ y, además:

$$\frac{m}{\sqrt{m}} = \frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m}\sqrt{m}} = \frac{m\sqrt{m}}{\left(\sqrt{m}\right)^2} = \frac{m\sqrt{m}}{|m|} = \frac{m\sqrt{m}}{m} = \sqrt{m}$$

Dado que el número de sujetos evaluados es lo suficientemente grande (#(E) = 185 > 100), para calcular la admisibilidad e intensidad de las cuasi-implicaciones, se utilizó el enfoque entrópico y la ley de Poisson, de acuerdo a lo expuesto en 2.1 y lo afirmado por Bodin (1995, p.13) en su obra ya citada.

2.3. Resultados

A fin de facilitar la lectura y comprensión de los resultados, de aquí en adelante, a cada variable se la denotará sólo con I_i, con $1 \leq i \leq 10$, en vez de I_{ij}, como se las denotó anteriormente.

Luego del análisis con ASI, utilizando CHIC, se pudieron detectar 3 cuasi implicaciones (Figura 1) con una intensidad de implicación mayor a 0,85 (señaladas en verde) y 2 de intensidad 0,95 (marcadas en rojo).

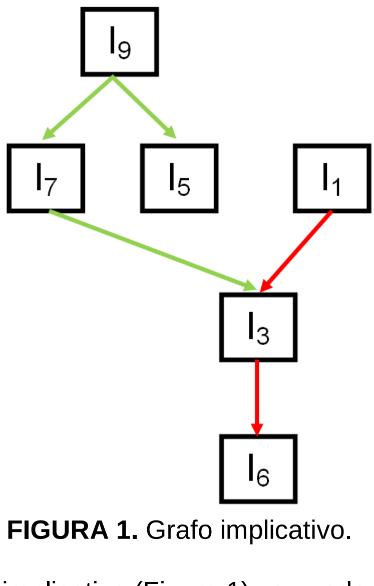

FIGURA 1. Grafo implicativo.

A partir del grafo implicativo (Figura 1) se puede observar:

- $I_1 \Rightarrow I_3$: El sentido de la implicación esta dado porque, al tener el mismo sumando tanto en el numerador como en el denominador, en I_1 la mayoría de los alumnos tiende a pensar que es posible simplificar estos términos, confundiendo así sumando con factor. Detectar que la proposición es falsa supone el conocimiento de que la igualdad de dos cocientes equivale a la de los productos cruzados, conocimiento que en este caso, requiere un pensamiento algebraico y no meramente aritmético. Todo esto sugiere una mayor complejidad cognitiva que la necesaria para detectar que el cero no es invertible y que, por ser una operación de cocientes cuyo divisor podría ser cero, las expresiones dadas pueden no ser números reales y, en consecuencia, no pueden operarse como tales.

- $I_3 \Rightarrow I_6$: El sentido de esta regla vuelve a mostrar la falta de construcción del pensamiento algebraico, ya que, generalmente, los alumnos tienen dificultad en identificar que en la igualdad asociada a I_3 el divisor puede ser nulo, mientras que en la proposición correspondiente a I_6 que uno de los factores sea nulo, no afecta su valor de verdad. De ahí el sentido de la implicación.

Luego encontramos otras implicaciones que dan cuenta de que:

- $I_9 \Rightarrow I_7$: Esta regla vincula la definición de valor absoluto con la propiedad de potencia de una potencia. Esta relación se debe a que en la definición mencionada subyace una especie de “potencia de potencia” que, obviamente, no es válida al ser una de dichas potencias un número racional no entero.
- $I_9 \Rightarrow I_5$: Para determinar que la proposición correspondiente a I_9 es falsa es necesario conocer las definiciones de valor absoluto, potenciación y radicación en $\mathbb{R}$, en cambio en I_5 es suficiente conocer de manera completa la definición de potenciación (es decir que $a^0 = 1$ si, y sólo si, $a \neq 0$) .
- $I_7 \Rightarrow I_3$: El sentido de la implicación está dado porque las propiedades de la potenciación, una de las cuales está asociada a I_7, demandan un nivel de conocimiento superior al que requiere la de I_3, que involucra sólo suma y producto de cocientes de números reales.

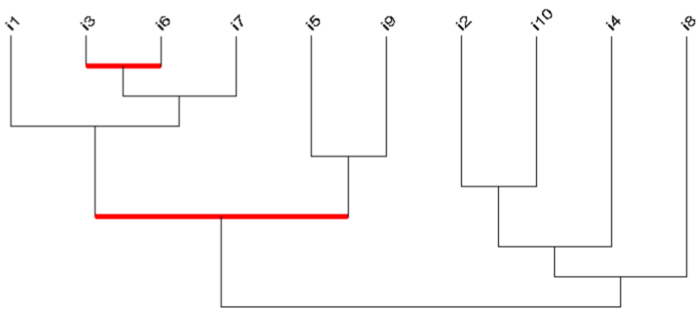

FIGURA 2. Árbol de similaridad.

Al analizar el árbol de similaridad (Figura 2) pueden observarse dos clases de cuasi-equivalencia: una que incluye las variables ya presentes en el grafo implicativo (I_1, I_3, I_5, I_6, I_7, I_5, e I_9) y la otra, al resto de las variables. La primera clase demuestra la existencia de cuasi equivalencia entre I_3 e I_6 y comportamientos fuertemente similares de las variables que las forman. La segunda de las clases incluye variables no presentes en el grafo implicativo, dado que las intensidades de las implicaciones y sus recíprocas son débiles (menores a 0,85) y, por lo tanto la similaridad entre ellas es mucho menor.

En cambio en el árbol cohesitivo (Figura 3) sólo se observan dos reglas y dos R – regla (una señalada en rojo) que ratifica lo ya observado en el grafo implicativo: la Figura 1 muestra que $I_1 \Rightarrow I_3 \wedge I_3 \Rightarrow I_6$ (con $\psi(I_3, I_6) = 0{,}95$) y, que $I_9 \Rightarrow I_7 \wedge I_7 \Rightarrow I_3$ (con $\psi(I_3, I_6) = 0{,}85$). Luego, utilizando el silogismo hipotético, puede afirmarse que: por un lado, los alumnos relacionan las condiciones para que dos cocientes sean iguales con la validez de la propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto (Regla señalada en rojo en la Figura 3), y por otro que el hecho de que no todo número real coincide con su valor absoluto se vincula con el hecho de que no todo cociente de números reales es un número real, como es el caso en que c = 0 ($I_9 \Rightarrow I_3$).

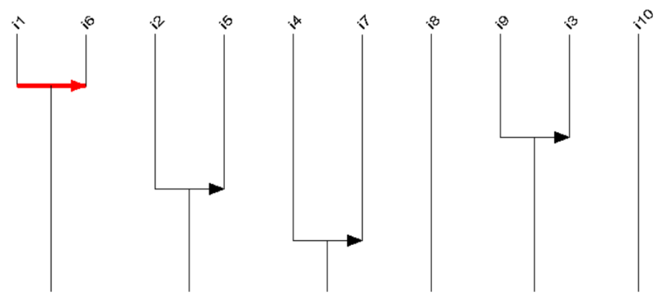

FIGURA 3. Árbol cohesitivo.

La primera de las reglas observadas ($I_2 \Rightarrow I_5$) debe su sentido a que si bien los alumnos, desde el Nivel Primario, operan con cocientes cuyos divisores son números naturales, en reconocer que la proposición correspondiente a la variable I_2 es verdadera subyacen saberes tales como que $-(a + b) = -1(a + b)=$ $= -1.a +(-1.b) = -a - b$, mientras que saber que no siempre a^0 es igual a 1, implica sólo conocer la definición de potencia entera de un número real.

$I_4 \Rightarrow I_7$ indica que el conocer como factorizar la diferencia de los cuadrados de dos números reales está relacionado con saber que se cumple la ley distributiva de la potenciación con respecto al producto. Esta implicación debe su sentido al hecho de que dicha factorización no es una propiedad vinculada sólo con la potenciación, sino que también involucra saberes tales como la validez de las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números reales y la existencia de opuesto de todo número real.

Sin embargo, cabe señalar que las intensidades de estas dos últimas reglas no son demasiado fuertes, razón por la cual no aparecen señaladas en el grafo implicativo.

3. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos puede concluirse que hay muy pocos alumnos que han logrado realizar el pasaje de la Aritmética al Álgebra, el cual es uno de los objetivos prioritarios de la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. Esta conclusión viene del hecho de que la poca intensidad de las implicaciones halladas sugiere que dichas relaciones son débiles y establecidas por pocos estudiantes.

La falta de evolución del pensamiento matemático queda demostrado por el hecho de que los estudiantes, en su mayoría, no tienen en cuenta que si a y c son números reales, pueden ser ceros y - en consecuencia - ni su potencia 0 ni su inverso, respectivamente, están definidos en el conjunto de los números reales, dificultad atribuible a que cuando asignan valores a las letras para decidir el valor de verdad de las proposiciones, lo hacen sólo con números naturales. Los estudiantes dan por sentado que las expresiones algebraicas están formadas siempre por números naturales; es desde este conjunto numérico a partir del cual validan sus afirmaciones.

Un obstáculo similar se les presenta al momento de reconocer el valor absoluto de un número real a: es usual que los estudiantes piensen que $a \geq 0$ y $-a < 0$, por lo cual en la proposición asociada a I_9 consideran que a es no negativo lo que los lleva a afirmar que su valor absoluto es a.

Estos resultados constituyen un importante aporte para orientar las actividades de enseñanza de los docentes de la cátedra en que se realizó el estudio, en búsqueda de actividades de enseñanza tendientes a superar las insuficiencias de conocimientos señaladas y favorecer la evolución del pensamiento aritmético al algebraico de sus alumnos.

Asimismo, puede concluirse que ASI resulta una herramienta eficaz para determinar los saberes de los alumnos, así como las relaciones conceptuales que conforman sus redes de conocimientos. Vale destacar que esta metodología puede ser utilizada también para validar instrumentos de evaluación, usándola primero en un análisis *a priori* de los ítems de la prueba con el objetivo de establecer si los mismos realmente permiten detectar los saberes de los alumnos que se quieren evaluar y, si de las respuestas a los mismos, pueden o no establecerse las relaciones conceptuales que se espera que los estudiantes hayan construido.

4. REFERENCIAS

ABRATE, R.; POCHULU, M.; VARGAS, J. (2006). “ERRORES Y DIFICULTADES EN MATEMÁTICA. ANÁLISIS DE CAUSA Y SUGERENCIAS DE TRABAJO”. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. 198 páginas.ISBN-10: 987-98292-9-8; ISBN-13: 978-987-98292-9-5.

BODIN, A. (1995). “ANALYSE IMPLICATIVE: MODÈLES SOUS-JACENTS À L’ANALYSE IMPLICATIVE ET OUTILS COMPLÉMENTAIRES”. Publications de l’Institute de RechercheMathématiques de Rennes, fascicule 3 “FASCICULE DE DIDACTIQUE DE MATHÉMATIQUES l’E.I.A.O.” exp nº 3, pp 1 – 23.

CAPUTO, L.; JORGE, M.; ESPINOZA, R.; PORCEL, E.; ROMERO, J. (2016). “ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO DE LOS CONOCIMIENTOS

PREVIOS SOBRE NÚMEROS REALES DE INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD”. *Cadernos do IME – Série Estatística.*Volumen 42, p 30 – 44. Río de Janeiro, Brasil: Universidade do Estado do Rio de Janeiro. ISSN impreso 1413 – 9022. ISSN *on line* 2317 – 4535.

COUTURIER, R. (2009). “CHIC: UTILIZACIÓN Y FUNCIONALIDADES”. En TEORÍA Y APLICACIONES DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO. PRIMERA APROXIMACIÓN EN LENGUA HISPANA. Compiladores: Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Stgo de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 51 - 64.

GRAS, R.; KUNTZ, P. (2009). “EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO (ASI) EN RESPUESTA A PROBLEMAS QUE LE DIERON ORIGEN”. En TEORÍA Y APLICACIONES DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO. PRIMERA APROXIMACIÓN EN LENGUA HISPANA. Compiladores: Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Stgo. de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 3 – 50.

RÉGNIER J.C. (2013). Extracto de la obra “ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE. UNE MÉTHODE D'ANALYSE DE DONNÉES POUR LA RECHERCHE DE CAUSALITÉS”.Gras, R.; Régnier J.C.; Guillet F. (Eds) (2009).Web:http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es . Accedido:29/02/16.

SPAGNOLO, F.; GRAS, R.; RÉGNIER, J.C. (2009). “UNA MEDIDA COMPARATIVA DE LAS MATEMÁTICAS ENTRE EL ANÁLISIS A PRIORI Y LA CONTINGENCIA”. En TEORÍA Y APLICACIONES DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO. PRIMERA APROXIMACIÓN EN LENGUA HISPANA. Compiladores: Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Universitat Jaume I de Castellón (España) y Universidad de Oriente (Cuba). pp 143 – 158.