

## SELECCION DE *PORTFOLIO* DE CULTIVOS DE CICLO CORTO MEDIANTE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA MODELO MEDIA - VARIANZA Y FUNCIÓN DE UTILIDAD EXPONENCIAL

FABIÁN ANDRÉS FERREIRA<sup>1</sup> - ANDRÉS REDCHUK<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Rey Juan Carlos. ESPAÑA.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad Autónoma de Chile. CHILE.  
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Lomas de Zamora. ARGENTINA.  
*andres.redchuk@gmail.com - sferreirab@gmail.com; andres.redchuk@gmail.com*

*Fecha Recepción: Setiembre 2012 - Fecha Aceptación: Noviembre 2013*

### RESUMEN

En este trabajo se construye un modelo de selección de *portfolio* de cultivos de ciclo corto de fácil uso y robusto en cuanto a sus resultados. Mediante este modelo se logra maximizar los ingresos para distintos niveles de aversión al riesgo. Una consecuencia, es la optimización del uso de los recursos financieros de la pequeña explotación agrícola; concentrándose en aquellos cultivos más rentables y cuantificando los niveles de riesgo asociados. Un modelo media-varianza ha sido implantado en R.

**PALABRAS CLAVE:** Programación Cuadrática - Software R - Modelo Media-Varianza - Gestión de Riesgos.

### ABSTRACT

In this work we build a portfolio selection model of short-cycle crops easy to use and robust in their results. This model is able to maximize revenues for different levels of risk aversion. One consequence is the optimal use of financial resources of the small farms, focusing on more profitable crops and quantifying the associated risk levels. A mean-variance model have been implemented in R.

**KEYWORDS:** Quadratic Programming - Software R - Mean-Variance Mode - Risk Management.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la Optimización bajo incertidumbre, las distintas técnicas de programación estocástica buscan solucionar problemas de asignación de recursos, donde uno o varios parámetros son desconocidos. Un trabajo pionero en la teoría de selección de carteras, fue el que presentó Markowitz (1952), hablamos del Modelo de Media-Varianza de Markowitz, que busca determinar aquella composición del *portfolio* que maximice la rentabilidad para un determinado nivel de riesgo, o minimice el riesgo para una rentabilidad dada.

En el modelo citado se usa como medida de la rentabilidad la esperanza matemática de la rentabilidad del *portfolio*, y como medida del riesgo la varianza de la misma (Wets, 1974, Wets, 1983).

Se parte de los siguientes supuestos:

- se conoce la distribución de probabilidad de la rentabilidad del *portfolio*,
- se toma la esperanza matemática de la misma como medida de la rentabilidad de la inversión.

Como medida del riesgo tenemos la varianza de la variable aleatoria que describe la rentabilidad. La racionalidad del inversor, hace que elija aquel *portfolio* que maximice la rentabilidad y minimice el riesgo (Birge *et al*, 2010; Kall *et al*, 2010).

En un primer paso, se determina el conjunto de *portfolios* que generan la máxima ganancia para los distintos niveles de riesgo (medido por la varianza); o el mínimo riesgo según aumentan los beneficios (esperanza matemática).

Finalmente se selecciona aquel *portfolio* que genera la mayor rentabilidad, para el nivel de riesgo asumible por el inversor.

Se busca por tanto, determinar la combinación adecuada de activos financieros; tal que se maximice el beneficio esperado para un determinado nivel de riesgo, o alternativamente minimizar el riesgo para un determinado nivel de beneficio esperado (Almaraz, *et al* 2012). Es posible de esta forma determinar la frontera eficiente, que une las distintas combinaciones para las cuales se obtiene el máximo beneficio; según va aumentando el nivel de riesgo (Konis, 2011).

## 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Para abordar el problema que nos ocupa, definimos un modelo de programación cuadrática; donde se busca minimizar la varianza del margen de beneficio, definido por:

$$V = \sum_j \sum_k X_j X_k \sigma_{jk}$$

Donde  $X_j$  es la superficie dedicada al cultivo  $j$  y  $\sigma_{jk}$  la covarianza de los márgenes de beneficio entre los cultivos  $j, k$ .

Dibujando conjuntamente la función de utilidad del decisor, para el nivel de aversión o afición al riesgo; se puede obtener la solución óptima al problema de selección de *portfolios*, en el punto donde se cortan las dos gráficas.

Un campo donde la popularización del uso de este tipo de herramientas financieras, puede tener un efecto mayor es el agrícola; donde la asignación de los recursos muchas veces sigue criterios subóptimos, fuera de las grandes explotaciones (Urlach y Weingessel, 2012).

Se busca mediante este trabajo, construir un modelo de selección de *portfolio* de cultivos de ciclo corto (al menos dos cosechas por año) de fácil uso; y robusto en cuanto a sus resultados, tal que se logre maximizar los ingresos; para distintos niveles de aversión al riesgo.

Una consecuencia inmediata, es la Optimización del uso de los recursos financieros al interior de la pequeña explotación agrícola; concentrándose en aquellos cultivos más rentables, y cuantificando los niveles de riesgo asociados.

Se hace necesario por tanto planificar adecuadamente, mediante el diseño de un modelo matemático; las proporciones de superficie cultivable a cubrir con cada cosecha, teniendo en cuenta las fluctuaciones esperadas de su precio.

Entre las ventajas que traería la implantación, de este tipo de herramientas de planificación financiera; por parte de los pequeños productores agrícolas, tenemos:

- La mejora del acceso al crédito, por la disminución del riesgo asociado; y la posibilidad de poder elaborar y presentar un plan de negocio estructurado, basado en los resultados que arroja el modelo.
- El aumento del nivel de ahorro, que les permitiría invertir en mejoras técnicas; para dar un salto importante en la productividad de sus explotaciones.

- Contar con la posibilidad de ofrecer como garantía a instituciones microfinancieras, los ingresos futuros por la venta de las cosechas (“*securitization*”).
- La presentación de un plan financiero detallado, puede agilizar la consecución de ayudas estatales.
- Cuando se cuente con una cantidad importante de productores, se puede pensar en establecer una bolsa de *comodities* agrícolas; y establecer un mercado de futuros, y así diversificar las fuentes de financiamiento de los pequeños productores.

## 2. APLICACIÓN

Veremos la aplicación de la metodología mediante un ejemplo, buscando dentro del *portfolio* de cultivos disponibles; aquella combinación que maximice los beneficios, para un nivel de riesgo determinado. El óptimo se alcanza en aquel punto donde la frontera eficiente riesgo-beneficio, se corta con la curva de indiferencia más alta; según la función de utilidad que describe la aversión - afición al riesgo del decisor. Partimos de un registro histórico de precios, de los cultivos incluidos en nuestro *portfolio* (ver Tabla 1):

	Broc	Cila	Coli	Lech	Repo	Zana
01/03/09	1705	1500	747	813	456	456
01/04/09	1500	2033	773	944	454	472
01/05/09	1641	2283	717	717	435	643
01/06/09	1475	1375	631	427	365	687
01/07/09	1364	1511	593	500	299	545
01/08/09	1105	1233	481	604	352	620
01/09/09	1522	1483	408	771	313	696
01/10/09	1269	2444	586	900	335	633
01/11/09	1169	1275	1013	948	250	627
01/12/09	1329	1140	930	725	283	553
01/01/10	1454	1075	950	646	271	988
01/02/10	1936	1650	1000	844	313	1063
01/03/10	1350	1480	990	975	333	700
01/04/10	1042	1125	925	1104	292	754
01/05/10	1002	1125	938	1167	333	1338
01/06/10	1139	1675	988	1042	417	1375
01/07/10	1024	1180	1130	1075	403	677
01/08/10	1080	1100	1125	1069	583	541
01/09/10	748	1075	988	910	472	424
01/10/10	546	1000	630	650	415	392
01/11/10	502	1150	488	625	338	418
01/12/10	571	2680	788	958	342	527
01/01/11	972	1675	938	1052	348	561
01/02/11	1333	1550	1275	1115	375	686
01/03/11	1067	1725	1138	979	406	550

TABLA 1. Serie bianual de precios mayoristas por artículo (\$/kg)

Contamos también con unos parámetros técnicos (que se asumen constantes durante el periodo de estudio), que nos permiten determinar los costes y el nivel de producción; por unidad de superficie para cada cultivo:

	<b>Broc</b>	<b>Cila</b>	<b>Coli</b>	<b>Lech</b>	<b>Repo</b>	<b>Zana</b>
Coste/kg	458	726	460	444	347	209
kg/Ha	23032	7835	29747	21939	32148	19675
<b>Coste(Mill/Ha)</b>	<b>10548656</b>	<b>5688210</b>	<b>13683620</b>	<b>9740916</b>	<b>11155356</b>	<b>4112075</b>

**TABLA 2. Costes y producción por hectárea cultivada**

Obtenemos ahora un histórico de rendimientos de la siguiente forma, se resta al precio en cada periodo el coste por kilogramo; la cantidad resultante se multiplica por la producción por hectárea para cada cultivo, posteriormente se hace un ajuste por inflación (se asume del 5% anual) para obtener precios constantes; finalmente calculamos la media durante el periodo:

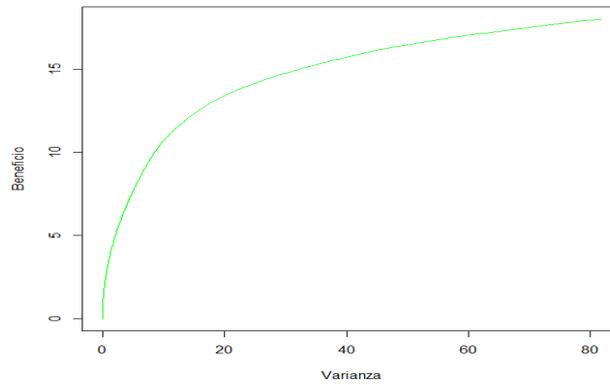
	<b>Broc</b>	<b>Cila</b>	<b>Coli</b>	<b>Lech</b>	<b>Repo</b>	<b>Zana</b>
01/03/09	31867143	6191687	8537389	8095491	3504132	4859725
01/04/09	26517867	10240345	9310811	10969500	3439836	5174525
01/05/09	29981256	12199095	7644979	5989347	2829024	8538950
01/06/09	25667302	5084915	5086737	-372963	578664	9404650
01/07/09	22770977	6150475	3956351	1228584	-1543104	6610800
01/08/09	16193919	3972345	624687	3510240	160740	8086425
01/09/09	26520609	5931095	-1546844	7174053	-1093032	9581725
01/10/09	20130609	13460530	3748122	10004184	-385776	8342200
01/11/09	17575183	4301415	16450091	11057256	-3118356	8224150
01/12/09	21440881	3243690	13981090	6164859	-2057472	6768200
01/01/10	24416196	2734415	14576030	4431678	-2443248	15326825
01/02/10	36081725	7239540	16063380	8775600	-1093032	16802450
01/03/10	21685624	5907590	15765910	11649609	-450072	9660425
01/04/10	14138851	3126165	13832355	14479740	-1768140	10722875
01/05/10	13115787	3126165	14219066	15861897	-450072	22213075
01/06/10	16350716	7435415	15706416	13119522	2250360	22941050
01/07/10	13533193	3557090	19930490	13843509	1800288	9207900
01/08/10	14810456	2930290	19781755	13711875	7586928	6532100
01/09/10	6876544	2734415	15706416	10223574	4018500	4230125
01/10/10	2078017	2146790	5056990	4519434	2186064	3600525
01/11/10	1034697	3322040	832916	3970959	-289332	4112075
01/12/10	2646265	15309590	9757016	11276646	-160740	6256650
01/01/11	11987046	7435415	14219066	13338912	32148	6925600
01/02/11	20321292	6456040	24243805	14721069	900144	9384975
01/03/11	14084932	7827165	20168466	11737365	1896732	6709175
<b>Mean(Mill/Ha)</b>	<b>18073084</b>	<b>6082549</b>	<b>11506140</b>	<b>9179278</b>	<b>653247</b>	<b>9208687</b>

**TABLA 3. Rendimiento medio por hectárea para cada cultivo**

Tenemos con esto toda la información necesaria, aplicamos ahora un modelo de programación cuadrática (media – varianza); para obtener de esta forma la frontera eficiente de las combinaciones óptimas, según qué proporciones de cada cultivo minimizan el riesgo; para cada nivel de beneficios estimados.

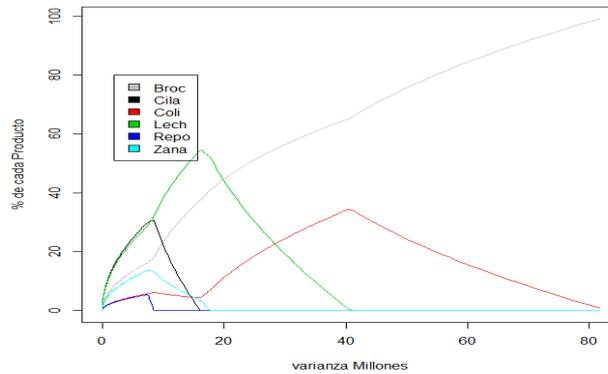
La función objetivo a minimizar es la matriz de covarianzas que se deriva de la tabla anterior, en cuanto a las restricciones; se incluye una que garantice que los beneficios esperados superen el nivel previsto, y otra que evite que los costos superen la cantidad disponible de fondos para invertir.

Obtenemos de esta forma la frontera eficiente del modelo media-varianza, que minimiza el riesgo para cada nivel de beneficios:



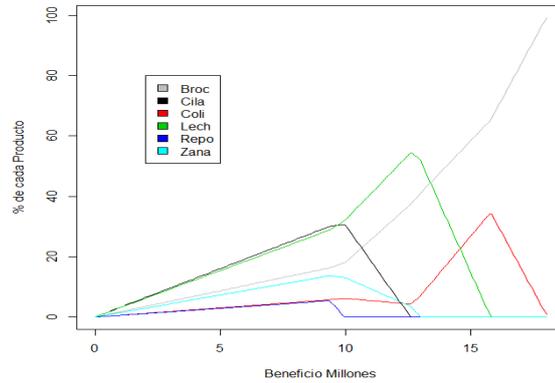
GRÁFICA 1 Frontera eficiente media-varianza

Obtenemos también la gráfica de las proporciones óptimas de cada cultivo, según el nivel de riesgo:



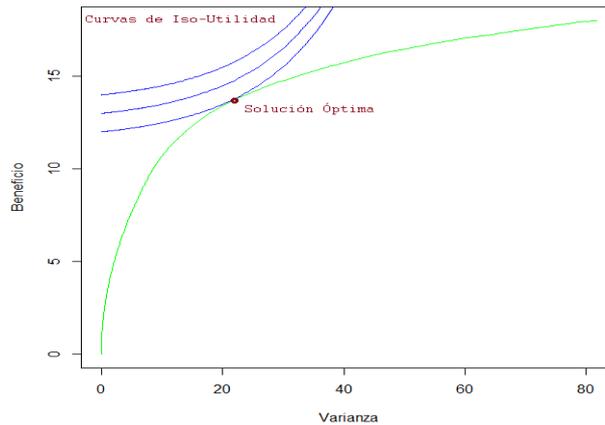
GRÁFICA 2 Proporciones de cada cultivo según nivel de riesgo asociado

Y según el nivel de beneficios:



**GRÁFICA 3** Proporciones de cada cultivo según nivel de beneficio

Definimos ahora la función de utilidad que describe, el nivel de aversión-afición al riesgo del decisor; y ubicamos el último punto donde se corta la curva de utilidad más alta, con la frontera eficiente; y obtener así la solución óptima al problema:

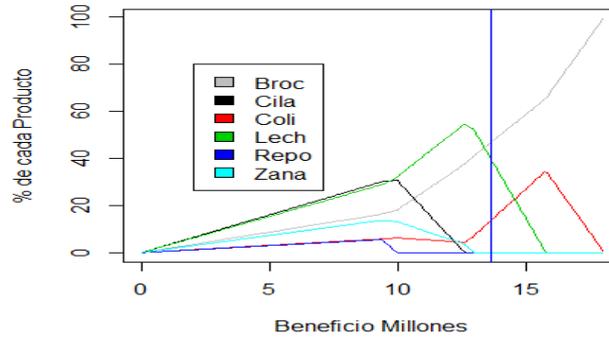


**GRÁFICA 4** Frontera eficiente, función de utilidad y solución óptima

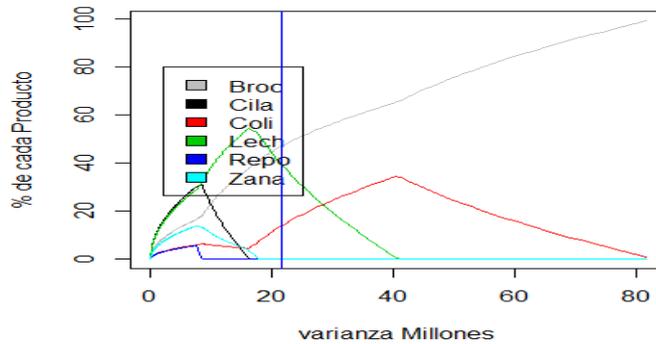
En dicho punto tenemos una probabilidad del 95% de obtener el máximo nivel de beneficios al mínimo riesgo.

Obtenemos como solución óptima, unos beneficios entre 4.38 y 22.95 millones; y se alcanza destinando un 46.85% de la superficie a BROC, 13.66% a COLI y 39.49% a LECH.

Lo podemos ver gráficamente:



GRÁFICA 5 Solución óptima-Proporciones según nivel de beneficio



GRÁFICA 6 Solución óptima-Proporciones según nivel de riesgo

#### 4. CONCLUSIONES

Mediante implementación de un modelo de Media-Varianza en el entorno estadístico R, hemos conseguido obtener la solución óptima de un problema de *portfolio* de cultivos; el mismo se enmarca dentro del conjunto general de problemas conocidos en la literatura especializada como “*Farm Model*”.

Construimos un modelo de programación cuadrática en R, que nos permitió definir la frontera eficiente de soluciones al mismo; mediante simulación de los parámetros estocásticos que intervienen en el modelo. Posteriormente el estudio de la función de utilidad del decisor, nos permite definir la solución óptima en aquel punto donde ésta se corta con la frontera eficiente de soluciones.

Brindamos amplio soporte gráfico durante todo el proceso, para así facilitar la comprensión de los conceptos aquí expuestos.

## 5. REFERENCIAS

- ALMARAZ LUENGO, E. ALMARAZ LUENGO, M. LUENGO Y DOS SANTOS (2012): "POSSIBILISTIC MEAN-VARIANCE (M-V) AND MEAN-SEMIVARIANCE (M-SV) MODELS FOR PORTFOLIO SELECTION".
- BIRGE, J, R, ET AL (2010): "Introduction to Stochastic Programming", John R. Birge, Francois Louveaux editors, 2nd\_Edition.
- KALL P. ET AL (2010): "Stochastic Linear Programming", Peter Kall/János Mayer editors, 2nd Edition.
- KONIS K., (2011): "R INTERFACE FOR LP\_SOLVE", version 5.5.2.0.
- MARKOWITZ H. (1952): "PORTFOLIO SELECTION". THE JOURNAL OF FINANCE, VOL. 7, NO. 1. PP. 77-91.
- URLACH B.A., WEINGESSEL A. (2012): "FUNCTIONS TO SOLVE QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEMS.PACKAGE 'QUADPROG'".
- WETS, R.J.B. (1974): "STOCHASTIC PROGRAMS WITH FIXED RECOURSE: THE EQUIVALENT DETERMINISTIC PROGRAM", SIAM REVIEW Vol. 16, No. 3, July 1974.
- WETS, R.J.B. (1983): "SOLVING STOCHASTIC PROGRAMS WITH FIXED RECOURSE", STOCHASTICS Vol. 1.