PROGRAMACIÓN DINÁMICA CON NÚMEROS *Z*[1]

LUISA L. LAZZARI - PATRICIA I. MOULIA
CIMBAGE-IADCOM-Facultad de Ciencias Económicas-Universidad de Buenos Aires
luisalazzari@cimbage.com.ar - patriciamoulia@cimbage.com.ar

Fecha recepción: Octubre 2015 - Fecha aprobación: Mayo 2016

RESUMEN

La programación dinámica es un método de optimización de sistemas o de su representación matemática, donde se opera por fases, es decir que las decisiones se toman en forma secuencial. Permite resolver problemas que contienen diversas alternativas que se establecen en un proceso de múltiples etapas. El punto de partida es el principio de optimalidad de Bellman, que establece que cualquier decisión final óptima solo puede estar formada por decisiones anteriores óptimas.

Al encarar el estudio de problemas del mundo real con información imprecisa se debe considerar la borrosidad de la misma y además, su fiabilidad. Zadeh definió en 2011 los números *Z*, que proporcionan una valuación borrosa y una idea de su confiabilidad. Su empleo permite incorporar ambos conceptos en todo modelo que utilice información incierta.

En este trabajo se presenta una metodología para utilizar optimización dinámica discreta cuando la información está dada por números *Z* y se la aplica para resolver un problema de inversión agropecuaria en el que los beneficios correspondientes a los procesos productivos están expresados mediante estos números. Dadas las características de la información disponible, asignarles valores ciertos significaría una simplificación que no responde a la realidad.

PALABRAS CLAVE: Programación dinámica – Incertidumbre – Fiabilidad – Número *Z.*

ABSTRACT

Dynamic programming is a method of system optimization or its mathematical representation, which operates in phases; decisions are taken sequentially. It solves problems containing various alternatives which are established in a multistage process. The starting point is Bellman's principle of optimality, which establishes that any final optimal decision can only be formed by previous optimal decisions.

[1] Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto UBACyT 20020130100083BA *Enfoques alternativos para problemas clásicos y actuales de las Ciencias Económicas* II de la Programación Científica 2014-2017 de la Universidad de Buenos Aires.

When studying real world problems with imprecise information, its fuzziness and reliability has to be accounted for. Zadeh defined Z-number in 2011, which allows for a fuzzy valuation and an idea of this reliability. Its use permits incorporating both concepts in any model operating with uncertain information.

In this paper we present a methodology to employ discrete dynamic optimization when the information is given by Z numbers and it is applied to solve a problem of investment in agriculture, where production process profits are expressed through Z-numbers. Given the characteristics of the information available, assigning precise values would be a simplification that does not respond to reality.

KEY WORDS: Dynamic Programming – Uncertainty – Reliability – Z-number.

1. INTRODUCCIÓN

La programación dinámica es un método de optimización de sistemas o de su representación matemática donde se opera por fases, es decir que las decisiones se toman en forma secuencial. Permite resolver problemas que contienen diversas alternativas que se establecen en un proceso de múltiples etapas. Esta técnica fue presentada por el matemático Richard Bellman, aproximadamente en el año 1954, y se basa en el principio de optimalidad, el cual establece que cualquier decisión final óptima sólo puede estar formada por decisiones intermedias o anteriores óptimas. El interés de este instrumento rebasa el dominio de la economía y puede estimarse como igualmente valioso para la investigación en ingeniería, física o en matemática (Kaufmann, 1967).

Lotfi A. Zadeh introduce en 1965 el concepto de conjunto borroso a los efectos de proveer una herramienta para representar y razonar con la información disponible de una manera similar a la forma en que los individuos expresan su conocimiento. Rompe la dicotomía “pertenece - no pertenece” de la teoría clásica de conjuntos a la que incluye como caso particular y permite construir una estructura matemática con la cual es posible manipular datos inciertos o vagos.

Al encarar el estudio de problemas del mundo real con información imprecisa se debe considerar la borrosidad de la misma y además, su fiabilidad. Zadeh (2011) definió los números *Z*, que proporcionan una valuación borrosa y una idea de su confiabilidad. Su empleo permite incorporar ambos conceptos en todo modelo que utilice información incierta (Pal, Banerjee, Dutta y Sarma, 2013).

Las fuentes de incertidumbre en el sector agropecuario son numerosas. Al sembrar un lote de un determinado cultivo, el productor no puede determinar con precisión cuál será su rendimiento, ni el precio de su venta, y por lo tanto, no puede saber con exactitud su resultado económico. También puede existir vaguedad en el precio y en las cantidades disponibles de ciertos insumos críticos, además de la incertidumbre relacionada con las políticas gubernamentales relativas al sector en materia de financiamiento, retenciones a las exportaciones, subsidios, impuestos, tipo de cambio y regulaciones ambientales (Pena De Ladaga y Berger, 2006; Vicién, Pena De Ladaga y Petri, 2009).

En este trabajo se presenta una metodología para aplicar optimización dinámica discreta cuando la información está dada por números *Z* y se la aplica para resolver un problema de inversión en tres zonas del este de la provincia de La Pampa, los beneficios correspondientes a los distintos montos de inversión en procesos productivos agrícolas en las diferentes zonas están expresados mediante números *Z*. Dadas las características de la información disponible, asignarles valores ciertos significaría una simplificación que no responde a la realidad.

Está estructurado del siguiente modo. En la sección 2 se presentan los elementos teóricos necesarios para la metodología que se aplicará; en la 3 se exponen conceptos básicos de programación dinámica; en la 4 se desarrolla la metodología para utilizar programación dinámica cuando la información está expresada por números Z; en la 5 se desarrolla un caso de aplicación y en la 6 se formulan algunas conclusiones.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Conjuntos borrosos

Dado un conjunto universal *E*, continuo o discreto, se define *conjunto borroso (fuzzy set*) $\tilde{A}$ como una función $\mu_{\tilde{A}} : E \to [0;1]$ que asigna a cada elemento del conjunto *E* un valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo $[0;1]$, llamado grado o nivel de pertenencia de x a $\tilde{A}$ (Lazzari, 2010).

Se llama α*-corte o conjunto de nivel* α de $\tilde{A}$ al conjunto nítido $A_\alpha = \{x \in E \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0;1]$. Si $\alpha = 0$, el α-corte es la clausura[2] de la unión de los A_α, con $0 < \alpha < 1$ (Buckley, 1992). Todo conjunto borroso puede expresarse mediante sus α-cortes.

Un conjunto borroso $\tilde{A} \subseteq \Re$, es *normal* si y sólo si, $\forall x \in E, \max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, y es *convexo* si y sólo si, $\forall x \in [x_1; x_2] \subseteq \Re$ se verifica que $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min \{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ (Tanaka, 1997).

[2] La clausura de un conjunto *A* es el menor subconjunto cerrado contenido en *A* (Yin-Ming y Mao-Kang, 1997).

2.2 Números borrosos

Un número borroso es un conjunto borroso de los números reales, convexo y normal. Es continuo si su función de pertenencia es continua. Se puede expresar a través de sus α-cortes de manera única $A_\alpha = [\, a_1(\alpha) \,; a_2(\alpha) \,] \; \forall \alpha \in [\, 0 ; 1 \,]$, o mediante su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\forall x \in \Re$ (Kaufmann y Gupta, 1985).

Número borroso triangular (NBT) es un número borroso real, continuo, determinado de manera única por tres números reales a_1, a_2 y a_3, tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, se representa $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ (FIGURA 1). Sus α-cortes son $A_\alpha = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1 \;;\; (a_2 - a_3)\,\alpha + a_3]$.

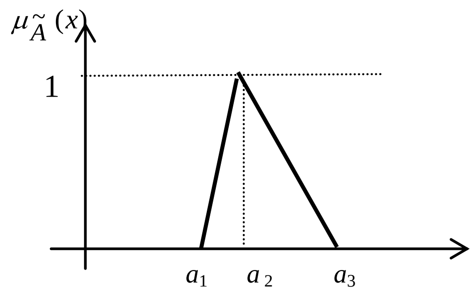

FIGURA 1. NBT.

2.2.1 Operaciones aritméticas con números borrosos

Dado que los α-cortes de un número borroso real continuo son intervalos cerrados de $\Re$, las operaciones entre números borrosos se pueden definir como una generalización de las operaciones entre intervalos aritméticos (Kaufmann y Gupta, 1985).

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ números borrosos continuos de $\Re$, expresados por sus α-cortes $A_\alpha = [a_1(\alpha) \;;\; a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha) \;;\; b_2(\alpha)]$ para $\alpha \in [0;1]$ (Lazzari, 2010).

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(+)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha (+) B_\alpha$

$$A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha) \,; a_2(\alpha) + b_2(\alpha)] \tag{1}$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(-)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha (-) B_\alpha$

$$A_\alpha (-) B_\alpha = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha) \,; a_2(\alpha) - b_1(\alpha)] \tag{2}$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(.)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha (.) B_\alpha$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha (.) B_\alpha = [a_1(\alpha) \,.\, b_1(\alpha) \;;\; a_2(\alpha) \,.\, b_2(\alpha)] \tag{3}$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(:)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(:)B_\alpha$

  Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}; \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}\right], \; b_1(\alpha) > 0, \; \forall\alpha \in [0;1] \qquad (4)$$

2.2.2 Clasificación de los números borrosos

El orden lineal de los números reales no puede ser extendido a los números borrosos, por este motivo es necesario establecer criterios que permitan obtener un orden en el conjunto $\tilde{\Re}$, de los números borrosos reales.

Existe gran cantidad de métodos para lograr este objetivo, muchos de ellos han sido analizados y comparados por diferentes autores utilizando variados criterios (entre otros Bortolan y Degani, 1993; Wang y Kerre, 1996, 2001a, 2001b; Chu y Tsao, 2002; Lazzari, 2010). Los métodos de orden analizados han sido aplicados a numerosos ejemplos, resultando muchos de ellos adecuados para los casos simples. En los casos “difíciles”, donde la decisión debe ser tomada teniendo en cuenta el contexto donde se desarrolla, se presentan diferencias significativas.

Algunos de estos métodos son computacionalmente complejos y difíciles de implementar, mientras otros no discriminan adecuadamente, es decir que pueden considerar equivalentes números borrosos distintos. Además, muchos de ellos proporcionan diferentes soluciones para un mismo problema de orden (Chu y Tsao, 2002).

En este trabajo se usará el criterio de orden propuesto por Yager (1981), expresado en (5).

$$Y_2\left(\tilde{A}_i\right) = \int_0^{h\left(\tilde{A}_i\right)} M\left(A_{i\alpha}\right) d\alpha \qquad (5)$$

donde $h\left(\tilde{A}_i\right) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}_i}(x)$ y $M\left(A_{i\alpha}\right) = \frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2}$.

El orden obtenido es: $\tilde{A}_i \succeq \tilde{A}_j$ por Y_2 si y solo si $Y_2\left(\tilde{A}_i\right) \geq Y_2\left(\tilde{A}_j\right)$. Los resultados que se obtienen con su aplicación pueden considerarse coherentes con lo que un decisor racional haría (Lazzari, 2010).

2.3 Variable lingüística

El enfoque lingüístico se aplica cuando las variables que intervienen en un problema son de carácter cualitativo. Una variable lingüística se diferencia de una numérica en que sus valores no son números, sino palabras u oraciones del lenguaje natural, o de un lenguaje artificial (Zadeh, 1975).

Con este enfoque se logra modelar de forma más directa y apropiada gran cantidad de problemas de la realidad, pues permite representar las afirmaciones de los individuos de una manera más aproximada, que se asemeja a su forma de expresarse.

Las palabras son menos precisas que los números, por lo que las variables lingüísticas son de utilidad en el caso de ser necesario otorgar un significado aproximado a la caracterización de fenómenos complejos o aquellos que están definidos de forma vaga dado que por la información existente o por las características del problema no pueden ser definidas de manera exacta. Y es más conveniente describirlos mediante valores cualitativos.

Cuando se emplea un modelo lingüístico se asume la existencia de un conjunto apropiado de términos o etiquetas, de acuerdo con el dominio del problema, sobre la base del cual los individuos expresan sus opiniones.

Se debe acordar acerca del nivel de distinción al que se quiere expresar la incertidumbre, o la granularidad del conjunto de etiquetas y sobre la semántica de las etiquetas, es decir qué tipo de funciones de pertenencia usar para caracterizar los valores lingüísticos. La granularidad corresponde a la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usados para expresar la información (Zadeh, 1975).

En este trabajo se utilizará un conjunto de etiquetas del intervalo $[0{,}1]$, $L=\{\,l_i\},i\in H=\{0,\ldots,t\}$, de cardinal impar, finito y totalmente ordenado (Zadeh, 1979; Delgado, Verdegay y Vila, 1993). Su semántica estará dada por números borrosos triangulares.

Cualquier etiqueta l_i representa un valor posible de una variable lingüística, es decir, una restricción o propiedad borrosa definida en $[0{,}1]$. La etiqueta intermedia $l_{t/2}$ representa indiferencia y las demás se distribuyen a su alrededor en forma simétrica.

El conjunto de etiquetas satisface las siguientes propiedades (Herrera y Herrera-Viedma, 2000):

i) Es ordenado: $l_i \geq l_j$ si $i \geq j$.

ii) Existe un operador de negación: $\mathrm{Neg}(l_i)=l_j$, tal que $j=t-i$ ($t+1$ es la cardinalidad).

2.4 Número Z

La información del mundo real es imperfecta y se expresa generalmente en lenguaje natural. Además, a menudo es parcialmente confiable y su grado de fiabilidad se expresa también en lenguaje natural. En vista de esto, el concepto de número Z, introducido por Zadeh en 2011, es muy adecuado para la descripción de este tipo de información (Aliev *et al.*, 2015).

Un número Z, asociado a una variable incierta V, es un par ordenado de números borrosos ($\tilde{A}, \tilde{B}$), cuya primera componente $\tilde{A}$ es un número borroso del dominio X de la variable V, que representa un valor de ésta y $\tilde{B}$

da una idea de la certeza o fiabilidad del mismo. La tripleta ordenada (V, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$) se denomina valuación Z (Zadeh, 2011).

En general, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ se pueden expresar en un lenguaje natural mediante el empleo de variables lingüísticas. Estos números pueden usarse para modelar incertidumbre del mundo real.

Algunos ejemplos de valuaciones Z, son:

(grado de contaminación del agua, alto, muy posible),

(lluvias en el próximo período de siembra, moderadas, posible).

3. CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Un *proceso de decisión* de *n* etapas es el que puede separarse en cierto número de pasos secuenciales o *fases*, los cuales pueden completarse en una o más formas. Las opciones para completar las etapas se denominan *decisiones*. Una *política* es una secuencia de decisiones, una para cada etapa del proceso y una “subpolítica” es una serie de decisiones unitivas que forman parte de una política (Bronson, 1996).

La condición del proceso en una etapa dada se denomina *estado* en esa etapa; cada decisión produce una transición del estado actual a un estado asociado con la siguiente etapa. Un proceso de decisión de *n* etapas es *finito* si hay solamente un número finito de estados asociados a cada etapa.

Muchos procesos de decisión de *n* fases tienen rendimientos asociados a cada decisión, pueden ser costos o beneficios, y estos rendimientos pueden variar tanto con la etapa como con el estado del proceso. El objetivo de analizar tales procesos es determinar una *política óptima* que dé como resultado el mejor rendimiento total.

De todas las técnicas de investigación operativa, la programación dinámica es la que emplea conceptos más simples y sin embargo es la más difícil de aplicar. Una de las dificultades que presenta su aplicación es la carencia de una formulación definida y de algoritmos de solución. Por lo tanto, la formulación de cada problema requiere decisiones básicas. La programación dinámica es la técnica más apropiada para resolver problemas que requieren decisiones interrelacionadas, decisiones que se deben tomar en forma secuencial y las cuales influyen en las decisiones futuras de esa secuencia (Shamblin y Steven, 1974).

La programación dinámica es una forma de enfoque de los procesos de decisión de optimización de *n* etapas que se basa en el siguiente principio.

Principio de optimalidad de Bellman: Sea un sistema discreto que puede cambiar de estado en cada fase por una decisión, donde el número de estados en cada fase es k (k = 0, 1, 2,…, n) finito o no, pero numerable. Si se define una función objetivo relativa a los cambios de estado y se desea optimizar esta función entonces una política óptima solo puede estar formada por subpolíticas óptimas (Kaufmann, 1967).

De acuerdo con Bellman (1957) una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado particular en una determinada etapa, las decisiones restantes deben constituir también una política óptima para abandonar ese estado.

El problema puede formularse del siguiente modo:

Optimizar $T = f_1(x_1) + f_2(x_2) ... + f_n(x_n)$

Sujeto a $x_1 + ... + x_n \leq m$

Todas las variables son enteras y no negativas, y se observa que el problema puede ser no lineal según sea la naturaleza de las funciones $f_i\,(x_i)$.

4. EMPLEO DE NÚMEROS *Z* EN PROGRAMACIÓN DINÁMICA

En este ítem se presenta una metodología que permite aplicar programación dinámica discreta en problemas con información incierta, expresada mediante números *Z*.

La primera componente de cada número *Z* es un NBT, que indica la valuación de la magnitud considerada y la segunda es una variable lingüística que expresa su confiabilidad y pertenece a un conjunto previamente definido.

Se distinguen las siguientes etapas:

Etapa 1. Se selecciona un conjunto de etiquetas lingüísticas (de acuerdo con 2.4) para expresar la confiabilidad de la valuación *Z*.

$$L = \{ l_1, \cdots, l_k \},\ l_1 \leq \cdots \leq l_k$$

Etapa 2. Se confecciona una matriz de datos con la información disponible expresada mediante números *Z*.

Etapa 3. Se obtiene el número borroso $\tilde{V}$ asociado a cada número *Z* de la matriz de la Etapa 2 mediante la multiplicación de los NBT correspondientes a la valuación de cada magnitud por el NBT asociado a la etiqueta lingüística que indica su confiabilidad (Kang, Wei, Li y Deng, 2012).

Sea el número Z ($\tilde{A}, \tilde{B}$) tal que $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces $\tilde{V} = \tilde{A}(.)\tilde{B}$.

Para multiplicar los NBT es necesario expresarlos por sus α-cortes:

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1\ ;\ (a_2 - a_3)\,\alpha + a_3] \qquad B_\alpha = [(b_2 - b_1)\,\alpha + b_1\ ;\ (b_2 - b_3)\,\alpha + b_3]$$

$$V_\alpha = A_\alpha(.)B_\alpha$$

Como ambos NBT son no negativos, se aplica (3).

$$V_\alpha = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1\ ;\ (a_2 - a_3)\,\alpha + a_3](.)\left[(b_2 - b_1)\alpha + b_1 ; (b_2 - b_3)\alpha + b_3\right]$$

$$V_\alpha = [(a_2 - a_1)\left(b_2 - b_1\right)\alpha^2 + \left(a_1\left(b_2 - b_1\right) + (a_2 - a_1)b_1\right)\alpha + a_1 b_1 ;$$

$$(a_2 - a_3)\left(b_2 - b_3\right)\alpha^2 + \left(a_3(b_2 - b_3) + (a_2 - a_3)b_3\right)\alpha + a_3 b_3]$$

Etapa 4. Para obtener la política óptima se trata el problema mediante programación dinámica.

Se realiza una optimización secuencial con los valores de los números borrosos asociados a cada número Z, obtenidos en la Etapa 3. Se emplean las operaciones entre números borrosos presentadas en 2.2.1 y el criterio de orden expuesto en 2.2.2. Una vez obtenida la política óptima se calcula el valor de la función objetivo con la información primaria.

5. CASO DE ESTUDIO

Se desea invertir en diferentes actividades agrícolas como el cultivo de sorgo, maíz, soja y girasol en tres zonas de la provincia de La Pampa (FIGURA 2) para cada una de las cuales se conoce el beneficio correspondiente a distintos montos de inversión. Cada beneficio es incierto y está expresado por un número *Z*. Se dispone de un presupuesto de $5.000.000 para invertir en esas tres zonas. Se desea optimizar la distribución de las inversiones para obtener el máximo beneficio. Las inversiones tienen la restricción de ser múltiplos enteros de $1.000.000, valor que puede considerarse la unidad.

Sean $x_1, x_2 \text{ y } x_3$ las inversiones en millones de pesos en las zonas 1, 2 y 3 respectivamente. Se asume que estas variables sólo pueden tomar los valores enteros 0, 1, 2, 3, 4 y 5 y que $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

La formulación matemática del problema discreto y no lineal es:

Maximizar $T = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$

Sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

Las variables son enteras y no negativas.

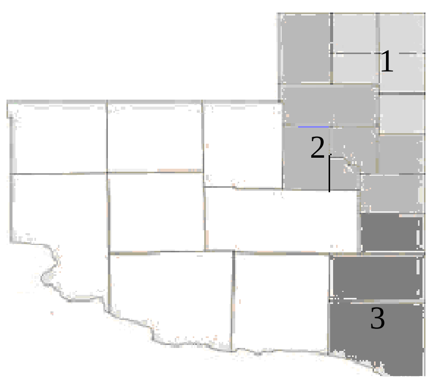

FIGURA 2. Zonas a invertir.

5.1 Etapa 1: Elección del conjunto de términos lingüísticos

Se selecciona el conjunto *L* para expresar por un término lingüístico del mismo la fiabilidad de cada beneficio incierto, dado por un NBT.

L = { l_0 = muy baja (MB); l_1 = baja (B); l_2 = media (M); l_3 = alta (A); l_4 = muy alta (MA)}

La semántica de las etiquetas lingüísticas está dada por los NBT del intervalo [0,1] de la TABLA 1 y representados en la FIGURA 3.

TABLA 1. Etiquetas lingüísticas con su semántica

	Etiqueta lingüística	Semántica
l_4	muy alta	(0.75, 1.00, 1.00)
l_3	alta	(0.50, 0.75, 1.00)
l_2	media	(0.25, 0.50, 0.75)
l_1	baja	(0.00, 0.25, 0.50)
l_0	muy baja	(0.00, 0.00, 0.25)

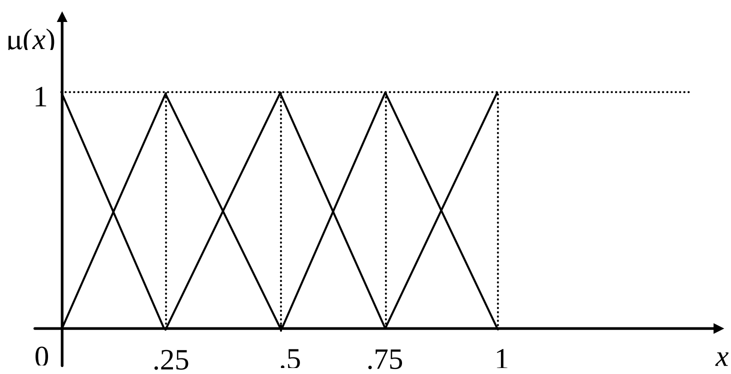

FIGURA 3. Etiquetas lingüísticas.

5.2 Etapa 2: Confección de la matriz de datos

Los beneficios estimados mediante números Z correspondientes a cada zona para cada monto de inversión están dados en la TABLA 2. Los números borrosos son triangulares y la segunda componente es un elemento del conjunto L. Esta información está basada en los informes de INTA (2011).

TABLA 2. Beneficios por zonas expresados por números *Z*

Inversiones en millones de $	Beneficio Zona 1	Beneficio Zona 2	Beneficio Zona 3
0	((0,0,0), MA)	((0,0,0), MA)	((0,0,0), MA)
1	((0.77,0.80,0.82), M)	((0.76,0.78,0.81), A)	((0.69,0.72,0.74), A)
2	((1.12 ,1.15,1.18), M)	((1.05,1.07,1.10), A)	((1.54,1.61,1.64), A)
3	((1.75,1.78,1.80), M)	((1.53,1.58,1.62), A)	((1.80,1.83,1.85), M)
4	((2.20,2.24,2.30), A)	((1.97,2.02,2.08), M)	((2.12,2.30,2.35), A)
5	((2.45,2.59,2.70), A)	((2.73,2.80,2.88), M)	((2.80,2.88,3.00), M)

5.3 Etapa 3: Cálculo de los números borrosos asociados a los números Z

En la TABLA 3 se presentan los números borrosos asociados a cada número Z de la matriz de la etapa anterior. Para su cómputo se utilizó una planilla de cálculo.

TABLA 3. Números borrosos asociados a los números *Z* expresados por sus α -cortes

Inv. millo-nes de $	NB asociado a beneficios Zona 1	NB asociado a beneficios Zona 2	NB asociado a beneficios Zona 3
0	$[0;0]$	$[0;0]$	$[0;0]$
1	$[0.0075\alpha^2+0.2\alpha+0.1925;$ $0.005\alpha^2-0.22\alpha+0.6150]$	$[0.005\alpha^2+0.195\alpha+0.19;$ $0.0075\alpha^2-0.225\alpha+0.6075]$	$[0.0075\alpha^2+0.1875\alpha+0.345;$ $0.005\alpha^2-0.205\alpha+0.74]$
2	$[0.0075\alpha^2+0.2875\alpha+0.28;$ $0.0075\alpha^2-0.3175\alpha+0.885]$	$[0.005\alpha^2+0.2725\alpha+0.5250;$ $0.0075\alpha^2-0.305\alpha+1.10]$	$[0.0175\alpha^2+0.42\alpha+0.77;$ $0.0075\alpha^2-0.44\alpha+1.64]$
3	$[0.0075\alpha^2+0.445\alpha+0.4375;$ $0.005\alpha^2-0.465\alpha+1.35]$	$[0.0125\alpha^2+0.4075\alpha+0.7650;$ $0.01\alpha^2-0.445\alpha+1.62]$	$[0.0075\alpha^2+0.4575\alpha+0.45;$ $0.005\alpha^2-0.4775\alpha+1.3875]$
4	$[0.01\alpha^2+0.57\alpha+1.1;$ $0.015\alpha^2-0.635\alpha+2.3]$	$[0.0125\alpha^2+0.505\alpha+0.4925;$ $0.015\alpha^2-0.565\alpha+1.56]$	$[0.045\alpha^2+0.62\alpha+1.06;$ $0.0125\alpha^2-0.6375\alpha+2.35]$
5	$[0.035\alpha^2+0.6825\alpha+1.225;$ $0.0275\alpha^2-0.785\alpha+2.7]$	$[0.0175\alpha^2+0.7\alpha+0.6825;$ $0.02\alpha^2-0.78\alpha+2.16]$	$[0.02\alpha^2+0.72\alpha+0.70;$ $0.03\alpha^2-0.84\alpha+2.25]$

5.4 Etapa 4: Obtención de la política óptima

Se aplica el *teorema de optimalidad* para obtener la política de distribución de la inversión que proporciona el beneficio total máximo, realizando un tratamiento secuencial del problema con los valores de los números borrosos asociados a los beneficios de cada zona según el monto invertido (TABLA 3).

Notaciones:

$\tilde{f}_i(x_i)$ Número borroso asociado a cada beneficio de la zona i, $i = 1,\ldots, 3$ y $0 \le x_i \le 5$.

$\tilde{F}_{1,2}(t)$ Número borroso correspondiente a la política óptima cuando se invierten $t = x_1 + x_2$ millones en las zonas 1 y 2.

$\tilde{F}_{1,2,3}(t)$ Número borroso correspondiente a la política óptima cuando se invierten $t = x_1 + x_2 + x_3$ millones en las zonas 1, 2 y 3.

5.4.1 <u>Búsqueda de la subpolítica óptima para las zonas 1 y 2</u>

Se calculan los distintos valores de $\tilde{F}_{1,2}(t)$ para t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, mediante la aplicación de la función:

$$\tilde{F}_{1,2}(t) = \max_{t=x_1+x_2} \left[\tilde{f}_1(x_1) + \tilde{f}_2(x_2)\right]$$

Se desarrolla un ejemplo ilustrativo para el caso de $t = 3$.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = \tilde{f}_1(0)(+)\,\tilde{f}_2(3) &= [0;0] + \left[0.0125\alpha^2 + 0.4075\alpha + 0.750\,;\, 0.01\alpha^2 - 0.445\alpha + 1.62\right] \\
&= \left[0.0125\alpha^2 + 0.4075\alpha + 0.750\,;\, 0.01\alpha^2 - 0.445\alpha + 1.62\right] \\
\tilde{B} = \tilde{f}_1(3)(+)\,\tilde{f}_2(0) &= \left[0.0075\alpha^2 + 0.445\alpha + 0.4375; 0.005\alpha^2 - 0.465\alpha + 1.35\right] + [0;0] \\
&= \left[0.0075\alpha^2 + 0.445\alpha + 0.4375; 0.005\alpha^2 - 0.465\alpha + 1.35\right] \\
\tilde{C} = \tilde{f}_1(2)(+)\,\tilde{f}_2(1) &= \left[0.0075\alpha^2 + 0.2875\alpha + 0.28\,;\, 0.0075\alpha^2 - 0.3175\alpha + 0.885\right] + \\
&+ \left[0.005\alpha^2 + 0.195\alpha + 0.19\,;\, 0.0075\alpha^2 - 0.225\alpha + 0.6075\right] \\
&= \left[0.0125\alpha^2 + 0.4825\alpha + 0.47; 0.015\alpha^2 - 0.5425\alpha + 1.4925\right] \\
\tilde{D} = \tilde{f}_1(1)(+)\,\tilde{f}_2(2) &= \left[0.0075\alpha^2 + 0.2\alpha + 0.1925\,;\, 0.005\alpha^2 - 0.22\alpha + 0.615\right] + \\
&+ \left[0.005\alpha^2 + 0.2725\alpha + 0.5250\,;\, 0.0075\alpha^2 - 0.305\alpha + 1.10\right] \\
&= \left[0.0125\alpha^2 + 0.4725\alpha + 0.7175; 0.0125\alpha^2 - 0.525\alpha + 1.715\right]
\end{aligned}$$

Para ordenar estos números borrosos se emplea el criterio dado por (5).

$$Y_2(\tilde{A}) = 1.1869\,; \quad Y_2(\tilde{B}) = 0.891; \quad Y_2(\tilde{C}) = 0.97083333; \quad Y_2(\tilde{D}) = 1.2072916$$

Como $\tilde{D} > \tilde{A} > \tilde{C} > \tilde{B} \Rightarrow$ la política óptima para tres millones consiste en invertir un millón en la zona 1 y dos millones en la zona 2, con un beneficio $\tilde{F}_{1,2}(3) = (1.82, 1.87, 1.92)$.

Se procede en forma análoga para los valores de t restantes y se obtiene $\tilde{F}_{1,2}(t)$ para t = 0,…, 5 (Ver TABLA 4).

TABLA 4. Subpolíticas óptimas para las zonas 1 y 2

Inv. millo-nes $	$\tilde{f}_1(x_1)$	$\tilde{f}_2(x_2)$	$\tilde{F}_{1,2}(t)$	Política optima Z 1 y 2
0	[0;0]	[0;0]	[0;0]	(0,0)
1	$[0.0075\alpha^2 + 0.2\alpha + 0.1925;$ $0.005\alpha^2 - 0.22\alpha + 0.6150]$	$[0.005\alpha^2 + 0.195\alpha + 0.19;$ $0.0075\alpha^2 - 0.225\alpha + 0.6075]$	$[0.0075\alpha^2 + 0.2\alpha + 0.1925;$ $0.005\alpha^2 - 0.22\alpha + 0.6150]$	(1,0)
2	$[0.0075\alpha^2 + 0.2875\alpha + 0.28;$ $0.0075\alpha^2 - 0.3175\alpha + 0.885]$	$[0.005\alpha^2 + 0.2725\alpha + 0.5250;$ $0.0075\alpha^2 - 0.305\alpha + 1.10]$	$[0.005\alpha^2 + 0.2725\alpha + 0.5250;$ $0.0075\alpha^2 - 0.305\alpha + 1.10]$	(0,2)
3	$[0.0075\alpha^2 + 0.445\alpha + 0.4375;$ $0.005\alpha^2 - 0.465\alpha + 1.35]$	$[0.0125\alpha^2 + 0.4075\alpha + 0.7650;$ $0.01\alpha^2 - 0.445\alpha + 1.62]$	$[0.0125\alpha^2 + 0.4725\alpha + 0.7175;$ $0.0125\alpha^2 - 0.5250\alpha + 1.715]$	(1,2)

4	$[0.01\alpha^2+0.57\alpha+1.1;$ $0.015\alpha^2-0.635\alpha+2.3]$	$[0.0125\alpha^2+0.505\alpha+0.4925;$ $0.015\alpha^2-0.565\alpha+1.56]$	$[0.01\alpha^2+0.57\alpha+1.1;$ $0.015\alpha^2-0.635\alpha+2.3]$	(4,0)
5	$[0.035\alpha^2+0.6825\alpha+1.225;$ $0.0275\alpha^2-0.785\alpha+2.7]$	$[0.0175\alpha^2+0.7\alpha+0.6825;$ $0.02\alpha^2-0.78\alpha+2.16]$	$[0.015\alpha^2+0.765\alpha+1.29;$ $0.0225\alpha^2-0.86\alpha+2.907]$	(4,1)

5.4.2 Búsqueda de la subpolítica óptima para las zonas 1, 2 y 3

Para calcular los valores de $\tilde{F}_{1,2,3}(t)$ para *t* = 0, 1, 2, 3, 4, 5 se considera:

$$\tilde{F}_{1,2,3}(t)=\max_{t=x_1+x_2+x_3}\left[\tilde{F}_{1,2}(x_1+x_2)+\tilde{f}_3(x_3)\right]$$

A modo de ejemplo se muestra el cálculo para $t=3$.

$$\tilde{A}=\tilde{F}_{1,2}(0)(+)\,\tilde{f}_3(3)=[0,0]+\left[0.0075\alpha^2+0.4575\alpha+0.45;0.005\alpha^2-0.4775\alpha+1.3875\right]$$
$$=\left[0.0075\alpha^2+0.4575\alpha+0.45;0.005\alpha^2-0.4775\alpha+1.3875\right]$$
$$\tilde{B}=\tilde{F}_{1,2}(3)(+)\,\tilde{f}_3(0)=\left[0.0125\alpha^2+0.4725\alpha+0.7175;\,0.0125\alpha^2-0.525\alpha+1.715\right]+[0;0]$$
$$=\left[0.0125\alpha^2+0.4725\alpha+0.7175;\,0.0125\alpha^2-0.525\alpha+1.715\right]$$
$$\tilde{C}=\tilde{F}_{1,2}(2)(+)\,\tilde{f}_3(1)=\left[0.005\alpha^2+0.2725\alpha+0.5250;\,0.0075\alpha^2-0.305\alpha+1.10\right]+$$
$$+\left[0.0075\alpha^2+0.1875\alpha+0.345;\,0.005\alpha^2-0.205\alpha+0.74\right]$$
$$=\left[0.0125\alpha^2+0.46\alpha+0.87;\,0.0125\alpha^2-0.51\alpha+1.84\right]$$
$$\tilde{D}=\tilde{F}_{1,2}(1)(+)\,\tilde{f}_3(2)=\left[0.0075\alpha^2+0.2\alpha+0.1925;\,0.005\alpha^2-0.22\alpha+0.6150\right]+$$
$$+\left[0.0175\alpha^2+0.42\alpha+0.77;\,0.0075\alpha^2-0.44\alpha+1.64\right]$$
$$=\left[0.025\alpha^2+0.62\alpha+0.9625\,;\,0.0125\alpha^2-0.66\alpha+2.255\right]$$

Se ordenar estos números borrosos de acuerdo con el criterio dado por (5).

$$Y_2(\tilde{A})=0.9158\,;\quad Y_2(\tilde{B})=1.20729167\,;\quad Y_2(\tilde{C})=1.34666667\,;Y_2(\tilde{D})=1.605$$

Como $\tilde{D}>\tilde{C}>\tilde{B}>\tilde{A}\Rightarrow$ la política óptima para tres millones consiste en invertir un millón para la zona 1 y dos millones en la zona 3, con un beneficio $\tilde{F}_{1,2,3}(3)=(2.31,2.41,2.46)$.

Se obtiene $\tilde{F}_{1,2,3}(t)$ para los restantes valores de t procediendo de la misma manera que en el ejemplo (TABLA 5).

TABLA 5. Subpolíticas óptimas para la zonas 1, 2 y 3

Inv. en millones de $	$\tilde{F}_{1,2}(x)$	$\tilde{f}_3(x_3)$	$\tilde{F}_{1,2,3}(t)$	Política óptima zonas 1, 2 y 3
0	[0;0]	[0;0]	[0;0]	(0,0,0)
1	$[0.0075\alpha^2+0.2\alpha+0.1925;$ $0.005\alpha^2-0.22\alpha+0.6150]$	$[0.0075\alpha^2+0.1875\alpha+0.345;$ $0.005\alpha^2-0.205\alpha+0.74]$	$[0.0075\alpha^2+0.1875\alpha+0.345;$ $0.005\alpha^2-0.205\alpha+0.74]$	(0,0,1)
2	$[0.005\alpha^2+0.272\alpha+0.525;$ $0.0075\alpha^2-0.305\alpha+1.10]$	$[0.0025\alpha^2+0.325\alpha+0.64;$ $0.005\alpha^2-0.3475\alpha+1.31]$	$[0.0175\alpha^2+0.42\alpha+0.77;$ $0.0075\alpha^2-0.44\alpha+1.64]$	(0,0,2)
3	$[0.0125\alpha^2+0.4725\alpha+0.7175;$ $0.0125\alpha^2-0.5250\alpha+1.715]$	$[0.0075\alpha^2+0.4575\alpha+0.45;$ $0.005\alpha^2-0.4775\alpha+1.3875]$	$[0.025\alpha^2+0.62\alpha+0.9625;$ $0.0125\alpha^2-0.66\alpha+2.255]$	(1,0,2)
4	$[0.01\alpha^2+0.57\alpha+1.1;$ $0.015\alpha^2-0.635\alpha+2.3]$	$[0.045\alpha^2+0.62\alpha+1.06;$ $0.0125\alpha^2-0.6375\alpha+2.35]$	$[0.0225\alpha^2+0.6925\alpha+1.295;$ $0.015\alpha^2-0.745\alpha+2.74]$	(0,2,2)
5	$[0.015\alpha^2+0.765\alpha+1.29;$ $0.0225\alpha^2-0.86\alpha+2.9075]$	$[0.02\alpha^2+0.72\alpha+0.70;$ $0.03\alpha^2-0.84\alpha+2.25]$	$[0.03\alpha^2+0.8925\alpha+1.4875;$ $0.02\alpha^2-0.965\alpha+3.355]$	(1,2,2)

5.4.3 Política óptima

TABLA 6. Beneficios y políticas óptimas

Inversión en millones de $	Beneficios óptimos	Política óptima Zonas 1, 2, y 3
0	(0,0,0)	(0,0,0)
1	(0.69, 0.72, 0.74)	(0,0,1)
2	(1.54, 1.61, 1.64)	(0,0,2)
3	(2.31, 2.41, 2.46)	(1,0,2)
4	(2.59, 2.68, 2.74)	(0,2,2)
5	(3.36, 3.48, 3.56)	(1,2,2)

En la última fila de la TABLA 6 se observa que la inversión óptima para 5 millones de pesos es de 1 millón en la zona 1, 2 millones en la 2 y 2 millones en la 3.

Se verifica además que las subpolíticas de (1, 2, 2) son óptimas:

$$\tilde{F}_{1,2,3}(5) = \tilde{F}_{1,2}(3) + \tilde{f}_3(2)$$
$$= \tilde{f}_1(1) + \tilde{f}_2(2) + \tilde{f}_3(2)$$

El beneficio óptimo estimado (FIGURA 4) resulta de sumar las primeras componentes de los números Z correspondientes (TABLA 2).

$$\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{23} = (0.77, 0.80, 0.82) + (1.05, 1.07, 1.10) + (1.54, 1.61, 1.64)$$
$$\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{23} = (3.36, 3.48, 3.56)$$

Este resultado indica que el beneficio óptimo de invertir 5 millones de pesos en las tres zonas no será menor que 3.36 millones ni mayor que 3.56 y lo más posible que alcance un valor de 3.48 millones. La confiabilidad de esta información puede considerarse comprendida entre media y alta, dado que, uno de los términos de esta suma tiene confiabilidad media y los otros dos alta (TABLA 2).

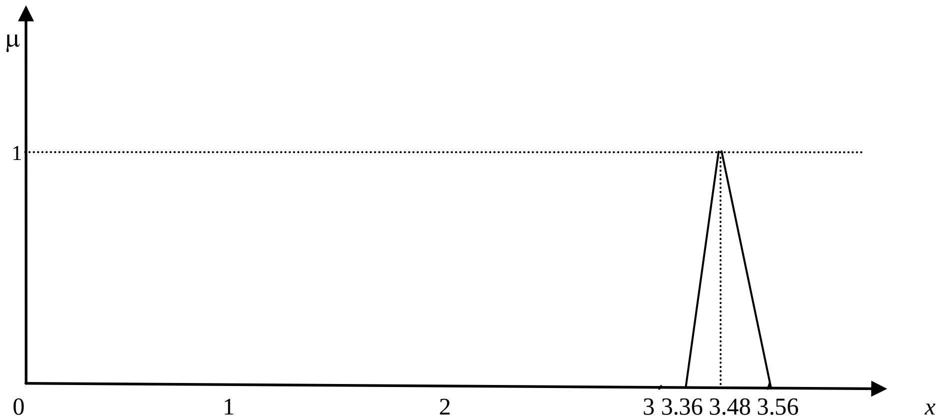

FIGURA 4. Beneficio óptimo estimado

6. CONCLUSIONES

El empleo de la metodología presentada es una instancia válida para aplicar en un proceso de decisión de *n* etapas, cuando existe información imprecisa asociada al menos con una decisión del proceso, que puede ser expresada mediante números Z.

Las componentes de los números Z pueden ser variables lingüísticas o números borrosos de acuerdo con las características de la información disponible.

En el caso presentado, el orden en el que se consideren las fases es indistinto, se llegaría al mismo resultado optimizando de acuerdo con otra secuencia.

Si bien el problema se refiere a la mejor inversión para 5 millones de pesos en las tres zonas, en la TABLA 6 también se muestran las políticas óptimas para invertir 1, 2, 3 o 4 millones en las tres zonas.

La aplicación de técnicas que contemplan la incertidumbre en la que están inmersos los problemas de decisión en el ámbito agropecuario permite al productor elegir y combinar alternativas con el objetivo de tomar decisiones más adecuadas.

La programación dinámica también puede aplicarse a problemas que contienen variables continuas. Esto reduce considerablemente los cálculos pero generalmente conduce hacia una forma matemática más compleja.

7. BIBLIOGRAFÍA

ALIEV, R.A.; HUSEYNOV, O.H.; ALIYEV, R.R.; ALIZADEH, A.A. (2015): THE ARITHMETIC OF Z-NUMBERS. THEORY AND APPLICATIONS. World Scientific, Singapore – 301 pgs.

BUCKLEY, J.J. (1992): "SOLVING FUZZY EQUATIONS IN ECONOMICS AND FINANCE". Fuzzy Sets and Systems – Vol. 48 – pgs. 289,296.
BELLMAN, R. (1957): DYNAMIC PROGRAMING. Princeton University Press, New Jersey – 392 pgs.

BRONSON, R. (1996): INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. McGraw-Hill, Serie Schawn, México – 324 pgs.

BORTOLAN, G.; DEGANI, R. (1993): "A REVIEW OF SOME METHODS FOR RANKING FUZZY SUBSETS", en Dubois, D., Prade, H. y Yager, R.R. (edits.). FUZZY SETS FOR INTELLIGENT SYSTEMS. Morgan Kaufmann Publishers, Inc, San Mateo. pgs.149, 158.

CHU, T.C.; TSAO, C.T. (2002): "RANKING FUZZY NUMBERS WITH AN AREA BETWEEN THE CENTROIDE POINT AND ORIGINAL POINT". An International Journal Computers and Mathematics with Applications - Vol. 43 - pgs. 111,117.

INTA (2011): "COSTOS DE PRODUCCIÓN Y MÁRGENES BRUTOS DE LOS PRINCIPALES PRODUCTOS AGROPECUARIOS DE LA PROVINCIA DE LA PAMPA". Boletín Económico, La Pampa – 217 pgs.

HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. (2000): "LINGUISTIC DECISION ANALYSIS: STEPS FOR SOLVING DECISION PROBLEMS UNDER LINGUISTIC INFORMATION". Fuzzy Sets and Systems - Vol. 115 - pgs. 67, 82.

KANG, B.; WEI, D.; LI, Y.; DENG, Y. (2012): "DECISION MAKING USING Z-NUMBERS UNDER UNCERTAIN ENVIRONMENT". Journal of Computational Information Systems - Vol. 8 - pgs. 2807, 2814.

KAUFMANN, A. (1967): MÉTODOS Y MODELOS DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA, LAS MATEMÁTICAS DE LA EMPRESA. Compañía Editorial Continental S.A., México – 567 pgs.

KAUFMANN, A.; GUPTA, M. (1985): INTRODUCTION TO FUZZY ARITHMETIC. New York. Van Nostrand Reinhold Company – 361 pgs.

LAZZARI, L. (2010): EL COMPORTAMIENTO DEL CONSUMIDOR DESDE UNA PERSPECTIVA FUZZY. UNA APLICACIÓN AL TURISMO. Fondo

Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas – EDICON, CABA – 311 pgs.

PAL, S.K.; BANERJEE, R.; DUTTA, S.; SARMA, S.S. (2013): "AN INSIGHT INTO THE Z-NUMBER APPROACH TO CWW". Fundamenta Informaticae - Vol. 124 – pgs. 197, 229.

PENA DE LADAGA, S.; BERGER, A. (2006): TOMA DE DECISIONES EN EL SECTOR AGROPECUARIO. Editorial Facultad de Agronomía, UBA, Buenos Aires – 209 pgs.

SHAMBLIN, J. E.; STEVENS, G. T. Jr. (1974): INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. BOGOTÁ, MCGRAW-HILL – 423 pgs.

TANAKA, K. (1997): AN INTRODUCTION TO FUZZY LOGIC FOR PRACTICAL APPLICATIONS. Springer-Verlag, New York – 138 pgs.

VICIÉN, C.; PENA DE LADAGA, S.; PETRI, G. (eds.) (2009): MODELIZACIÓN ECONÓMICA EN EL SECTOR AGROPECUARIO. III TALLER INTERNACIONAL "LA MODELIZACIÓN EN EL SECTOR AGROPECUARIO". Orientación Gráfica Editora S.R.L., Buenos Aires – 234 pgs.

WANG, X.; KERRE, E. (1996): "ON THE CLASSIFICATION AND THE DEPENDENCIES OF THE ORDERING METHODS". D. Ran (ed.) Fuzzy logic foundation and industrial applications, International Series in Intelligent technologies, Kluwer Dordrecht - chapter 4 - pgs. 73, 90.

WANG, X.; KERRE, E. (2001a): "REASONABLE PROPERTIES FOR THE ORDERING OF FUZZY QUANTITIES (I)". Fuzzy sets and Systems – Vol. 118 - pgs. 375, 385.

WANG, X.; KERRE, E. (2001b): "REASONABLE PROPERTIES FOR THE ORDERING OF FUZZY QUANTITIES (II)". Fuzzy sets and Systems – Vol. 118 - pgs. 387, 405.

YAGER, R. (1981). "A PROCEDURE FOR ORDERING FUZZY SETS OF UNIT INTERVAL". Information Sciences - Vol. 24 - pgs. 143, 161.
YIN-MING, L.; MAO-KANG, L. (1997): FUZZY TOPOLOGY. World Scientific, Singapore – 353 pgs.

ZADEH, L. A. (1965): "FUZZY SETS". Information and Control – Vol. 8 - pgs. 338, 353.

ZADEH, L. A. (1975): "THE CONCEPT OF A LINGUISTIC VARIABLE AND ITS APPLICATIONS TO APPROXIMATE REASONING". PART I, Information

Sciences – Vol. 8 - pgs. 199, 249. Part II, Information Sciences – Vol. 8 - pgs. 301, 357. Part III, Information Sciences – Vol. 9 - pgs. 43, 80.

ZADEH, L.A. (1979): "FUZZY SETS AND INFORMATION GRANULARITY", en GUPTA, M.M.; RAGADE R.K.; YAGER R.R. (edits.). Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications. New York. North-Holland Publishing Company - pgs. 3, 18.

ZADEH L.A. (2011): "A NOTE ON Z-NUMBERS". Information Sciences - Vol. 181 - pgs. 2923, 2932.