EMPLEO DE NÚMEROS Z EN DECISIÓN MULTICRITERIO[13]
CASO DE APLICACIÓN EN SELECCIÓN DE OFERTAS

LUISA L. LAZZARI - PATRICIA I. MOULIA
Facultad de Ciencias Económicas – CIMBAGE – IADCOM - Universidad de Buenos Aires
luisalazzari@cimbage.com.ar - patriciamoulia@cimbage.com.ar

Fecha Recepción: Junio 2014 - Fecha Aceptación: Abril 2015

RESUMEN

Los métodos de toma de decisión multicriterio han alcanzado gran madurez y ofrecen posibilidades de utilización para la resolución de diferentes problemas reales. Comprenden un conjunto de técnicas para modelar las preferencias del sujeto decisor. Aportan durante todo el proceso rigor científico y colaboran en la adopción de decisiones transparentes.

Existen varias dificultades en el diseño de modelos para la toma de decisiones. Entre otras, se pueden mencionar: i) variables de carácter cualitativo, ii) información disponible vaga e imprecisa, iii) criterios de elección en conflicto y iv) distintas unidades de medida de las diferentes variables de decisión. El empleo de métodos *fuzzy* tiene un potencial que puede contribuir a resolver estos problemas.

A efectos de formalizar la notable habilidad humana para tomar decisiones racionales en entornos de incerteza e imprecisión, Zadeh definió los números *Z*, que proporcionan una valuación borrosa y una idea de su confiabilidad. Estos números pueden usarse para modelar incertidumbre del mundo real.

En este trabajo se expone un modelo de toma de decisión multicriterio que emplea números *Z* que fuera presentado en la Reunión Científica XXVII ENDIO – XXV EPIO (Lazzari y Moulia, 2014) y se lo aplica a un caso de selección de ofertas competitivas en edificación.

PALABRAS CLAVE: Decisión multicriterio – Número *Z* – Incertidumbre – Confiabilidad.

ABSTRACT

Multicriteria decision-making methods have reached great maturity and offer possibilities of use for solving different real problems. They include a set of techniques for modeling the preferences of the decision-maker. They provide scientific rigor during the entire process and collaborate in making transparent decisions.

[13] Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto UBACyT 20020100100025 de la programación Científica 2011-2014 de la Universidad de Buenos Aires.

There are several difficulties in the design of decision-making models. Among others, it can be mentioned: i) qualitative variables, ii) vague and imprecise information available, iii) election criteria in conflict and iv) different measurement units of the different decision variables. Fuzzy methods have a potential that can contribute to solving these problems.

In order to formalize the human ability to make rational decisions in an environment of uncertainty and imprecision, Zadeh defined the *Z*-numbers, which provide a fuzzy valuation and an idea of their reliability. These numbers can be used for modeling uncertainty of the real world.

In this paper we present a multicriteria decision-making model that uses *Z* numbers which was presented at the XXVII ENDIO - XXV EPIO Scientific Meeting (Lazzari & Moulia, 2014) and is applied to a case of selection of competitive offerings in construction.

KEYWORDS: Multi Criteria Decision **–** *Z*-number **–** Uncertainty **–** Reliability.

1. INTRODUCCIÓN

Decidir presupone una acción humana que, enfrentada a un suceso externo (información), debe identificar los futuros estados de ese suceso y establecer los posibles cursos de acción que respondan al cumplimiento de la meta establecida (Pérez, 1981). Los términos que intervienen en esta clásica definición, como acción humana, información, futuro son subjetivos, inciertos e imprecisos.

La toma de decisión multiobjetivo ha alcanzado gran madurez y es clara su potencial utilidad en el análisis económico y la gestión (Barba Romero, 1987). Este análisis comprende un conjunto de técnicas para modelar las preferencias del sujeto decisor y analizar responsablemente la complejidad inherente a los problemas reales de decisión. Sus técnicas constituyen una buena opción para tratar ventajosamente varias limitaciones del análisis costo-beneficio, pues pueden manejar criterios cualitativos e intangibles, preferencias mal definidas, conocimiento ambiguo e impreciso y condiciones de veto (Fernandez González, López Cervantes, Navarro Castillo y Vega López*,* 2011). Estos mismos autores consideran que son preferibles formas simples de modelación, aunque imprecisas, si es que se puede acotar y manejar la imprecisión que se introduce.

Existen varios problemas que dificultan el diseño de modelos para la toma de decisiones. Entre otros, se pueden mencionar: i) intervienen variables de carácter cualitativo, ii) la información disponible puede ser vaga e imprecisa, iii) algunos de los criterios de elección están en conflicto y iv) las unidades de medida de las diferentes variables de decisión son distintas. Los métodos *fuzzy* tienen un potencial que puede contribuir a resolver estos problemas (Dunn, Keller, Marks, Ikerd, Gader y Godsey, 1995).

En 2011 Zadeh definió los números *Z*, que proporcionan una valuación borrosa y una idea de su confiabilidad, con el objetivo de mejorar la formalización de la notable habilidad humana para tomar decisiones racionales en entornos de incerteza e imprecisión.

En este trabajo se desarrolla un modelo de toma de decisión multicriterio que emplea números *Z* y, con el fin de mostrar la potencialidad de este enfoque para plantear y resolver problemas reales, se lo aplica al caso de seleccionar la oferta más conveniente para la construcción de un barrio para los empleados de una empresa en expansión.

Está estructurado del siguiente modo. En el apartado 2 se presentan nociones básicas sobre números borrosos, *Z* y variables lingüísticas; en el 3 se expone el modelo de decisión mencionado. En la sección 4 se desarrolla el caso de aplicación y, por último, se formulan algunos comentarios.

2. PRELIMINARES

Las nociones de subconjunto borroso y de medida de posibilidad surgen a partir de la necesidad de disponer de conjuntos para describir predicados o clases vagas, de fronteras imprecisas.

En 1965, Lotfi A. Zadeh, director del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California en Berkeley, publica el artículo *Fuzzy Sets*, que marca un hito histórico y proporciona el nombre a la disciplina. Introduce el concepto de conjunto borroso a los efectos de proveer una herramienta para representar y razonar con la información disponible de una manera similar a la forma en que los individuos expresan su conocimiento.

Los números borrosos son utilizados frecuentemente en los procesos de toma de decisión para interpretar fenómenos inciertos del mundo real, pero el problema de la fiabilidad de la información que proporcionan no ha sido considerado eficientemente. El tema de la fiabilidad es intrínsecamente complejo y no se presta a un análisis formal riguroso (Zadeh, 2011).

En su artículo *A note of Z-numbers*, Zadeh (2011) introduce el concepto de número *Z* como una herramienta para incorporar el concepto de la confiabilidad de la información incierta, y es un primer paso para encarar el tema. Considera que la computación con números *Z* puede ser vista como una generalización de las operaciones con números reales, intervalos, números borrosos y aleatorios. En un primer nivel se encuentra la computación con números e intervalos, en un segundo nivel está el cálculo con números borrosos o aleatorios, y en el tercero las operaciones con números *Z*.

Cuanto mayor sea el nivel de generalidad, mayor es la capacidad de construir modelos que representen más adecuadamente los sistemas reales, especialmente en el ámbito de la economía, análisis de decisión, evaluación de riesgos y planificación.

2.1 Números borrosos

En un determinado universo *E*, continuo o discreto, un *conjunto borroso* (en inglés *fuzzy set*) $\widetilde{A}$ es una función $\mu_{\widetilde{A}} : E \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada elemento del conjunto *E* un valor $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo [0,1], que es el grado o nivel de pertenencia de *x* a $\widetilde{A}$.

Se llama α-*corte o conjunto de nivel* α de $\widetilde{A}$ al conjunto clásico o nítido $A_\alpha = \{x \in E / \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0,1]$ (Lazzari, 2010). Si $\alpha = 0$, se define el α-corte como la clausura[14] de la unión de los A_α, con $0 < \alpha \leq 1$ (Buckley, 1992).

Un *número borroso* (NB) es un conjunto borroso de los números reales, *convexo* y *normal* (Lazzari y Moulia, 2014), que se puede expresar a través de sus α-cortes, $A_\alpha = [\,a_1(\alpha)\,,\,a_2(\alpha)\,]\ \forall \alpha \in [\,0,1\,]$, o mediante su función de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}(x), \forall x \in \Re$ (Kaufmann y Gupta, 1985).

Se denomina *número borroso triangular* (NBT) al número borroso real y continuo $\widetilde{A} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ (Lazzari y Moulia, 2014), determinado por tres números reales, tales que $a_1 \leq\ a_2\ \leq\ a_3$.

Sus α-cortes son $A_\alpha = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1\,,\ (a_2 - a_3)\,\alpha + a_3]\,, \forall \alpha \in [0,1]$.

Dado que los α-cortes de un número borroso real continuo son intervalos cerrados de $\Re$, las operaciones entre números borrosos se pueden definir como una generalización de las operaciones entre intervalos aritméticos (Kaufmann y Gupta, 1985, Buckley, Eslami y Feuring, 2010). En Lazzari y Moulia (2014) y en Lazzari (2010) se pueden encontrar las definiciones de suma, resta, multiplicación y división de números borrosos continuos de $\Re$, expresados mediante sus α-cortes.

2.2 Elección de un criterio para ordenar números borrosos

En todo problema de toma de decisión en que se empleen cantidades borrosas, se hace necesario ordenarlas en algún momento del proceso.

El orden lineal de los números reales no puede ser extendido a los números borrosos, pero es posible definir algún criterio para obtener un orden lineal en el conjunto $\widetilde{\Re}$ de los números borrosos reales (Lazzari, 2010).

En este trabajo se opta por el empleo del criterio de orden propuesto por Yager (1981), expresado en (1).

$$Y_2\left(\widetilde{A}_i\right) = \int_0^{h\left(\widetilde{A}_i\right)} M\left(A_{i\alpha}\right) \mathrm{d}\alpha \tag{1}$$

donde $h\left(\widetilde{A}_i\right) = \sup\limits_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}_i}(x)$ y $M\left(A_{i\alpha}\right) = \dfrac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2}$.

[14] La clausura de un conjunto *A* es el menor subconjunto cerrado que contiene a *A,* es decir, es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a *A* (Ying-Ming y Mao-Kang, 1997).

El orden obtenido es: $\tilde{A}_i \succeq \tilde{A}_j$ por Y_2 si y solo si $Y_2(\tilde{A}_i) \geq Y_2(\tilde{A}_j)$. Los resultados que se obtienen con su aplicación pueden considerarse coherentes con lo que un decisor racional haría (Lazzari, 2010).

2.3 Número *Z*

Un número *Z*, asociado a una variable incierta *V*, es un par ordenado de números borrosos ($\tilde{A}$, $\tilde{B}$), cuya primera componente $\tilde{A}$ es un número borroso del dominio *X* de la variable *V*, que representa un valor de ésta y $\tilde{B}$ da una idea de la certeza o confiabilidad del mismo. Zadeh (2011) denomina a la tripleta ordenada ($V, \tilde{A}, \tilde{B}$) valuación *Z*. En general, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ se expresan en un lenguaje natural mediante el empleo de variables lingüísticas. Estos números pueden usarse para modelar información incierta del mundo real.

Algunos ejemplos de valuaciones *Z* son:
(tiempo de construcción de una obra, entre 6 y 8 meses, casi seguro);
(calidad de la construcción, muy buena, seguro);
(consumo de agua, moderado, muy posible).

2.4 Variable lingüística

La existencia de variables cualitativas, inherentes al comportamiento humano, o de elementos del ambiente externo de difícil cuantificación objetiva, hace que a los individuos les resulte más adecuado expresar sus opiniones sobre un concepto vago o impreciso por medio de términos lingüísticos en lugar de utilizar valores numéricos exactos.

Una variable lingüística se diferencia de una numérica en que sus valores no son números, sino palabras u oraciones del lenguaje natural, o de un lenguaje artificial (Zadeh, 1975).

Cuando se emplea un modelo lingüístico se asume la existencia de un conjunto apropiado de términos o etiquetas, de acuerdo con el dominio del problema, sobre la base del cual los individuos expresan sus opiniones.

Se debe acordar acerca del nivel de distinción al que se quiere expresar la incertidumbre, o la granularidad del conjunto de etiquetas (Zadeh, 1975) y sobre la semántica de las etiquetas, es decir qué tipo de funciones de pertenencia usar para caracterizar los valores lingüísticos.

La granularidad corresponde a la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usados para expresar la información (Lazzari y Moulia, 2014).

La semántica del conjunto de términos suele estar dada por números borrosos del intervalo [0,1] definidos por medio de sus funciones de pertenencia. Zadeh (1975, 1979) considera que las funciones de pertenencia triangulares o trapeciales son lo suficientemente adecuadas para capturar la vaguedad de las estimaciones, ya que obtener valores más exactos puede resultar una tarea inútil o imposible.

En este trabajo se utilizarán conjuntos de etiquetas del intervalo $[0,1]$, $L=\{l_i\}, i \in H=\{0,\ldots,t\}$, de cardinal impar, finitos y totalmente ordenados en el sentido usual (Zadeh, 1979; Bonissone y Decker, 1986; Delgado, Verdegay y Vila, 1993). La etiqueta intermedia $l_{t/2}$ representa indiferencia y las demás se distribuyen a su alrededor en forma simétrica.

Cualquier etiqueta l_i representa un valor posible de una variable lingüística, es decir, una restricción o propiedad borrosa definida en $[0,1]$. Además, el conjunto de etiquetas satisface las siguientes propiedades (Herrera y Herrera-Viedma, 2000):

i) Es ordenado: $l_i \geq l_j$ si $i \geq j$.

ii) Existe un operador de negación: $\mathrm{Neg}(l_i)=l_j$, tal que $j=t-i$ ($t+1$ es la cardinalidad).

Por ejemplo, para evaluar *la calidad de la construcción de una vivienda*, el conjunto de términos *L* puede ser definido del siguiente modo:

$$L=\{l_0=\text{muy baja},\ l_1=\text{baja},\ l_2=\text{media},\ l_3=\text{alta},\ l_4=\text{muy alta}\}$$

El uso de un enfoque lingüístico *fuzzy* implica la necesidad de operar con palabras[15] (*computing with words*). En este trabajo, las operaciones se realizarán sobre los NBT que soportan la semántica de los términos lingüísticos (Lazzari, 2010; Lazzari y Moulia, 2014).

3. MODELO PARA LA TOMA DE DECISIÓN CON NÚMEROS *Z*

En este apartado se desarrolla un modelo innovador de toma de decisión multicriterio donde la valuación de las alternativas para cada criterio está dada por un número *Z,* cuya primera componente es un NBT o una variable lingüística, que indica la valuación de la alternativa considerada con respecto a un determinado criterio y la segunda es una variable lingüística, que pertenece a un conjunto previamente definido, y expresa la confiabilidad de la valuación asignada.

Paso 1. Elección de los conjuntos de términos lingüísticos

Los expertos deben fijar los conjuntos de etiquetas que cumplan con las características descriptas en 2.4, para expresar la valoración de una alternativa con respecto a un criterio determinado si se trata de una variable lingüística, la confiabilidad de la valuación *fuzzy* y la importancia de cada criterio. Estos conjuntos pueden coincidir.

$S=\{s_1,\cdots,s_h\},\ s_1 \leq \cdots \leq s_h$, $L=\{l_1,\cdots,l_k\},\ l_1 \leq \cdots \leq l_k$, $T=\{t_1,\cdots,t_d\},\ t_1 \leq \cdots \leq t_d$

Paso 2. Construcción de la matriz de valuaciones Z

[15] Diferentes métodos para operar con información lingüística se pueden encontrar en Bonissone y Decker, 1986; Delgado *et al.*, 1993 y Xu, 2008.

Dado un conjunto de alternativas $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y seleccionado un conjunto de criterios $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, que permitan evaluar los objetivos del problema a resolver, se deben establecer las valoraciones respectivas mediante consulta a expertos. En la FIGURA 1 se muestra la matriz de valuaciones *Z* (*m* filas y *n* columnas).

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ \ldots \\ a_i \\ \ldots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & \ldots & c_j & \ldots & c_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1j} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{i1} & v_{i2} & \ldots & v_{ij} & \ldots & v_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mj} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

FIGURA 1. Matriz de valuaciones *Z*.

Los elementos de esta matriz son números *Z* del tipo

$$v_{ij} = \left(\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{B}_{ij}\right) \tag{2}$$

La primera componente es un NBT o una variable lingüística que toma sus valores en un conjunto *S* dependiente del dominio, que indica la valoración de la alternativa considerada con respecto a un determinado criterio; y la segunda es un término lingüístico de un conjunto *L* que describe el grado de confianza o fiabilidad de cada valuación.

Paso 3. Determinación del grado de importancia de cada criterio

El individuo que se enfrenta a una situación de decisión con objetivos múltiples necesita poder incluir en el análisis alguna medida para reflejar cuáles son los que más le interesa lograr, cuáles tienen una importancia menor para él y, en particular, cuánto más o menos importantes son.

Hay que destacar el aspecto subjetivo de las ponderaciones, dado que reflejan valores, creencias y preferencias de un sujeto o un grupo de sujetos decisores que enfrentan esa situación particular.

Según Pavesi (1997) “Dados dos o más objetivos en conflicto, la ponderación de cada uno de ellos mide su importancia relativa para el decisor, la fuerza de la preferencia del decisor con respecto a cada objetivo en relación con los demás”. Esto se ve reflejado en una ponderación que indica la importancia relativa asignada a cada criterio, mediante el cual se mide el correspondiente objetivo.

Para un criterio dado, su importancia se expresará por una variable lingüística de un conjunto T, cuya semántica estará dada por un NBT del intervalo $[0,1]$.

Si la semántica de la importancia asignada al criterio c_j está dada por $\widetilde{P}_j = (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3})$ el *grado de importancia* se calcula según (3).

$$p_j = \frac{p_{j1} + 2\,p_{j2} + p_{j3}}{4} \tag{3}$$

La ponderación correspondiente al criterio c_j se obtiene de acuerdo con (4).

$$w_j = \frac{p_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j},\ j = 1, \cdots, n \tag{4}$$

TABLA 1. Ponderación de los criterios

c_1	...	c_j	...	c_n
w_1	...	w_j	...	w_n

Se observa que $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Si todos los criterios tienen la misma importancia, las ponderaciones resultan iguales, $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \dfrac{1}{n}$.

Paso 4. Obtención de la valuación global de cada alternativa

Dado que las variables de decisión utilizadas en los problemas multicriterio pueden estar expresadas mediante diferentes tipos de unidades, es necesario normalizar la valuación de cada alternativa a_i para cada criterio c_j, a los efectos de obtener escalas homogéneas.

Los criterios pueden ser de dos tipos: de beneficio (tiene mayor preferencia el de mayor valor) y de costo (es preferido el de menor valor) (Kang, Wei, Li y Deng, 2012).

Dado $\widetilde{A}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3)$ se procura obtener una valuación normalizada.

$$N(\widetilde{A}_{ij}) = \left(n(a_{ij}^1), n(a_{ij}^2), n(a_{ij}^3)\right)$$

Para un criterio de beneficio, $\widetilde{A}_{ij}$ se transforma de acuerdo con (5).

$$N_B\left(\widetilde{A}_{ij}\right)=\left(\frac{a_{ij}^1}{\max\limits_i a_{ij}^3},\frac{a_{ij}^2}{\max\limits_i a_{ij}^3},\frac{a_{ij}^3}{\max\limits_i a_{ij}^3}\right) \tag{5}$$

Si es un criterio de costo, se procede como en (6).

$$N_C\left(\widetilde{A}_{ij}\right)=\left(\frac{\min\limits_i a_{ij}^1}{a_{ij}^3},\frac{\min\limits_i a_{ij}^1}{a_{ij}^2},\frac{\min\limits_i a_{ij}^1}{a_{ij}^1}\right) \tag{6}$$

Por último, en (7) se obtiene la valuación global para cada alternativa.

$$\widetilde{V}_i=\sum_{j=1}^{n} w_j.\left[N\left(\widetilde{A}_{ij}\right).\widetilde{B}_{ij}\right], \quad i=1,\ldots,m \tag{7}$$

donde $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ es el vector de ponderación de los criterios y $v_{ij}=\left(\widetilde{A}_{ij},\widetilde{B}_{ij}\right)$ es la valuación *Z* de la alternativa a_i para el criterio c_j.

Paso 5. Elección de la alternativa más adecuada

Se ordenan los números borrosos obtenidos en el paso anterior, mediante el criterio establecido en 2.2, y se selecciona la alternativa cuya valuación global sea máxima.

$$\widetilde{V}^*=\max\left\{\widetilde{V}_i\right\},\ i=1,2,\ldots,m \tag{8}$$

4. CASO DE APLICACIÓN

En este apartado se muestra la aplicabilidad del enfoque planteado a la toma de decisión en edificación.

Una empresa que proyecta abrir una nueva planta en un polo industrial del sur del gran Buenos Aires planea la construcción de un barrio para sus empleados en un terreno de su propiedad. El mismo constará de 24 viviendas de aproximadamente 85 m^2 con cochera. Para su edificación se debe seleccionar una empresa constructora entre 4 ofertas diferentes.

El objetivo del problema consiste en realizar el proyecto en el menor tiempo y con la menor inversión posible, teniendo en cuenta criterios de calidad y sustentabilidad.

Se consideran cuatro alternativas (A I, A II, A III y A IV), que son evaluadas de acuerdo con siete criterios, dos de ellos se expresan por números borrosos triangulares y los restantes mediante variables lingüísticas.

Los criterios que se tendrán en cuenta en el momento de la adjudicación de la obra son los siguientes:

C_1: Tiempo de ejecución (en meses).

C_2: Costo total de la construcción (en millones de dólares).

C_3: Aprovechamiento del terreno (variable lingüística).
C_4: Calidad de la construcción (variable lingüística).
C_5: Calidad del sistema de calefacción/refrigeración ofrecido (variable lingüística).
C_6: Ahorro energético (variable lingüística).
C_7: Sustentabilidad en el desarrollo de sus acciones y cuidado del medio ambiente (variable lingüística).

Paso 1. Elección de los conjuntos de términos lingüísticos

Se seleccionó el conjunto *L* para expresar, mediante un término lingüístico del mismo, la fiabilidad de la valuación de cada alternativa considerada con respecto a cada criterio, así como la importancia de cada uno y la valuación de los criterios C_3, C_4, C_5, C_6 y C_7.

$$L = \{l_0 = \text{muy baja/o (MB)};\ l_1 = \text{baja/o (B)};\ l_2 = \text{media/o (M)};\ l_3 = \text{alta/o (A)};\ l_4 = \text{muy alta/o (MA)}\}$$

La semántica de las etiquetas lingüísticas está dada por los NBT del intervalo [0,1] de la TABLA 2, representados en la FIGURA 2.

TABLA 2. Etiquetas lingüísticas con su semántica

	Etiqueta lingüística	Semántica
l_4	muy alta	(0.75, 1.00, 1.00)
l_3	alta	(0.50, 0.75, 1.00)
l_2	media	(0.25, 0.50, 0.75)
l_1	baja	(0.00, 0.25, 0.50)
l_0	muy baja	(0.00, 0.00, 0.25)

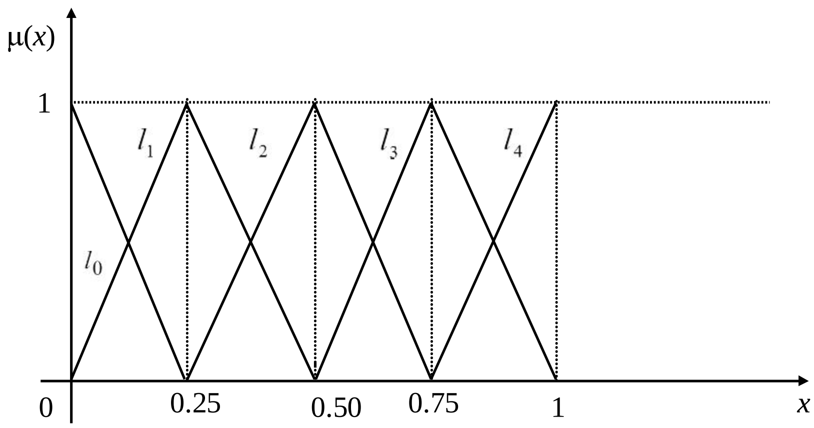

FIGURA 2. Etiquetas lingüísticas.

Paso 2. Construcción de la matriz de valuaciones con números Z

Una vez definidos los criterios y las alternativas a considerar, los directivos de la empresa y sus asesores proporcionaron las valuaciones *Z* que conforman la matriz de la FIGURA 3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} & \begin{pmatrix} \text{((19,21,22); M)} & \text{((47.2,48.3,49.8); M)} & \text{(MA;M)} & \text{(M, A)} & \text{(B; A)} & \text{(M;M)} & \text{(M; A)} \\ \text{((18,19,21; M)} & \text{((45,6,46.8,47.4); A)} & \text{(A; A)} & \text{(B, M)} & \text{(B; A)} & \text{(B; M)} & \text{(M; A)} \\ \text{((21,24,25); A)} & \text{((49.9,50.2,52.1); A)} & \text{(MA;M)} & \text{(MA;A)} & \text{(MA;M)} & \text{(MA;A)} & \text{(MA M)} \\ \text{((21,22,24);MA)} & \text{((48.3,49.5,51.3);MA)} & \text{(M; M)} & \text{(A; A)} & \text{(A; A)} & \text{(A; A)} & \text{(MA;A)} \end{pmatrix} \end{array}$$

FIGURA 3. Matriz de valuaciones *Z*.

Paso 3. Determinación del grado de importancia de cada criterio

Los directivos de la empresa expresaron en forma lingüística la importancia de cada criterio, según se muestra en la TABLA 3.

TABLA 3. Importancia de los criterios

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
media	muy alta	Media	media	alta	alta	muy alta

De acuerdo con la semántica de cada etiqueta del conjunto *L* (TABLA 2) y mediante la aplicación de (3) y (4) se obtiene la ponderación correspondiente a cada criterio (TABLA 4).

TABLA 4. Ponderación de los criterios

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
0.1026	0.1923	0.1026	0.1026	0.1538	0.1538	0.1923

Paso 4. Obtención de la valuación global de cada alternativa

En primer lugar, a los efectos de homogeneizar las escalas, se normaliza la primera componente del número *Z* correspondiente a la valuación de cada alternativa para los criterios *tiempo de ejecución* y *costo total de la construcción* mediante la fórmula (6) por ser de costo.

Luego, al aplicar la fórmula (7), se obtiene la valuación global de cada alternativa. En la TABLA 5 se observa que el producto de multiplicar números borrosos triangulares ha perdido su forma triangular, por este motivo están expresados mediante sus α-cortes.

TABLA 5. Valuación global de cada alternativa

Alternativa	Valuación global
A I	$V_{1\alpha} = \left[0.0464\alpha^2 + 0.1868\alpha + 0.1307\,,\, 0.0410\alpha^2 - 0.3509\alpha + 0.6738\right]$
A II	$V_{2\alpha} = \left[0.0253\alpha^2 + 0.1230\alpha + 0.1401\,,\, 0.0250\alpha^2 - 0.2237\alpha + 0.4872\right]$

A III	$V_{3\alpha} = \left[0.0464\alpha^2 + 0.2512\alpha + 0.2950\, ,\, 0.0094\alpha^2 - 0.2735\alpha + 0.8566\right]$
A IV	$V_{4\alpha} = \left[0.0257\alpha^2 + 0.2233\alpha + 0.3670\, ,\, 0.0441\alpha^2 - 0.3481\alpha + 0.9297\right]$

Paso 5. Elección de la alternativa más adecuada

Como $\widetilde{V}^* = \max\left\{\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_3, \widetilde{V}_4\right\}$, se aplica el criterio (1) para ordenar los números borrosos obtenidos en el paso anterior.

TABLA 6. Índice de orden de Yager para las alternativas

Alternativa	$Y_2\left(\widetilde{V}_i\right)$
A I	$Y_2\left(\widetilde{V}_1\right) = 0{,}3758$
A II	$Y_2\left(\widetilde{V}_2\right) = 0{,}2969$
A III	$Y_2\left(\widetilde{V}_3\right) = 0{,}5795$
A IV	$Y_2\left(\widetilde{V}_4\right) = 0{,}6288$

El orden total que resulta, de acuerdo con los valores de la segunda columna de la TABLA 6, es:

$$\text{A IV} \succ \text{AIII} \succ \text{AI} \succ \text{AII} \qquad (9)$$

Es decir que $\widetilde{V}^* = \widetilde{V}_4$, luego, la alternativa seleccionada es la IV.

La alternativa IV, que resulta primera, tiene mejor valuación *Z* que la III, que ocupa el segundo lugar, para los criterios de mayor importancia C_2 y C_7 (como se observa en la FIGURA 3). Ambas alternativas presentan valores que no son inferiores a *medio* en los criterios cualitativos.

El último lugar lo ocupa la alternativa II que es la más económica en cuanto al costo de construcción y tiene menor plazo de ejecución. Estos valores son similares a los de la alternativa I que ocupa el tercer lugar. En la valoración de los criterios cualitativos la última alternativa presenta tres valoraciones *bajas* mientras que un solo criterio de la I obtuvo este valor.

Cabe destacar que la información sobre las valuaciones de cada criterio para cada alternativa puede considerarse confiable, dado que la segunda componente de cada número *Z* de la matriz de valuación es *media*, *alta* o *muy alta*. La fiabilidad de la información borrosa incide en la obtención del orden total en el modelo de decisión aplicado.

5. CONCLUSIONES

La percepción de todo decisor ante un suceso que puede tomar distintos estados y sobre los que no puede ejercer ninguna influencia es incierta y subjetiva (Lazzari, Machado y Pérez, 1998), por lo que se puede afirmar que todo modelo de decisión presupone incertidumbre.

Los números *Z*, propuestos por Zadeh recientemente toman en cuenta una valuación imprecisa y su grado de confiabilidad, su empleo permite incorporar ambos conceptos en los procesos de adopción de decisiones con información incierta.

La primera componente desempeña el papel de una restricción difusa y la segunda indica la confiabilidad de la primera. Es un concepto nuevo que tiene gran poder para describir el conocimiento del ser humano y puede ser ampliamente utilizado en procesos que emplean información incierta o subjetiva; por lo tanto puede ser conceptualizado como una poderosa herramienta, dotada de un importante potencial para el diseño de sistemas orientados a la toma de decisiones y evaluación de riesgos en diferentes situaciones (Pal, Banerjee, Dutta y Sarma, 2013).

En este trabajo se ha mostrado que su empleo puede resultar de utilidad para resolver algunas de las dificultades ya mencionadas que se presentan en la resolución de problemas de decisión multicriterio, tales como disponer de información vaga, imprecisa o subjetiva, cualitativa o de criterios en conflicto.

El caso presentado muestra que el enfoque desarrollado que utiliza números Z resulta una buena opción para el planteo y resolución de problemas vinculados con la selección de ofertas competitivas en edificación.

Recurrir a variables lingüísticas para expresar la valoración de las alternativas para cada criterio puede resultar una buena opción respecto a la necesidad de “transformar” o “normalizar” las diferentes unidades de medida de las variables. La elección de una técnica de transformación puede tener efectos sobre el *ranking* obtenido y no es fácil ver las ventajas de un procedimiento sobre otro.

El uso de variables lingüísticas, números borrosos y números *Z* significa un avance en la comprensión y resolución de numerosos problemas. Un aporte del modelo presentado es que para ordenar las diferentes alternativas considera tres aspectos: la valoración de cada alternativa para cada criterio, la importancia de cada uno de ellos y la confiabilidad de la información.

Los cálculos se han realizado mediante el empleo de un *software* adecuado, por lo que la cantidad de alternativas y criterios de un problema no dificulta su resolución.

6. REFERENCIAS

BARBA-ROMERO, S. (1987): “PANORÁMICA ACTUAL DE LA DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETA”. Investigaciones Económicas - Vol. XI - pgs. 279, 308.

BONISSONE, P. P.; DECKER, K. S. (1986): “SELECTING UNCERTAINTY CALCULI AND GRANULARITY: AN EXPERIMENT IN TRADING-OFF

PRECISION AND COMPLEXITY". En KANAL, L.H.; LEMMER, J.F. (edits.) (1993). Uncertainty in Artificial Intelligence. North-Holland, Amsterdam, pgs. 217, 247.

BUCKLEY, J. J. (1992): "SOLVING FUZZY EQUATIONS IN ECONOMICS AND FINANCE". Fuzzy Sets and Systems - Vol. 48 - pgs. 289, 296.

BUCKLEY, J.; ESLAMI, E.; FEURING, T. (2010): "FUZZY MATHEMATICS IN ECONOMICS AND ENGINEERING". Physica-Verlag, Heidelberg - 272 pgs.

DELGADO, M.; VERDEGAY, J. L.; VILA, M. A. (1993): "ON AGGREGATION OPERATIONS OF LINGUISTIC LABELS". International Journal of Intelligent Systems - Vol. 8 - pgs. 351, 370.

DUNN, E. G.; KELLER, J. M.; MARKS, L. A.; IKERD, J. E.; GADER, P. D.; GODSEY, L. D. (1995): "EXTENDING THE APPLICATION OF FUZZY SETS TO THE PROBLEM OF AGRICULTURAL SUSTAINABILITY". Proceedings of ISUMA-NAFIPS '95. IEEE - pgs. 497, 502.

FERNANDEZ GONZÁLEZ, E.; LÓPEZ CERVANTES, E.; NAVARRO CASTILLO, J.; VEGA LÓPEZ, I. (2011): "APLICACIÓN DE METAHEURÍSTICAS MULTIOBJETIVO A LA SOLUCIÓN DE CARTERA DE PROYECTOS PÚBLICOS CON UNA VALORACIÓN MULTIDIMENSIONAL DE SU IMPACTO". Gestión y política pública - Vol. 20 - pgs. 381, 432.

HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. (2000): "LINGUISTIC DECISION ANALYSIS: STEPS FOR SOLVING DECISION PROBLEMS UNDER LINGUISTIC INFORMATION". Fuzzy Sets and Systems - Vol. 115 - pgs. 67, 82.

KANG, B.; WEI, D.; LI, Y.; DENG, Y. (2012): "DECISION MAKING USING Z-NUMBERS UNDER UNCERTAIN ENVIRONMENT". Journal of Computational Information Systems - Vol. 8 - pgs. 2807, 2814.

KAUFMANN, A.; GUPTA, M. (1985): INTRODUCTION TO FUZZY ARITHMETIC. Van Nostrand Reinhold Company, New York - 361 pgs.

LAZZARI, L. L.; MACHADO, E. A.; PÉREZ, R. (1998): "TEORÍA DE LA DECISIÓN FUZZY". Macchi, Buenos Aires - 228 pgs.

LAZZARI, L. L. (2010): "EL COMPORTAMIENTO DEL CONSUMIDOR DESDE UNA PERSPECTIVA FUZZY. UNA APLICACIÓN AL TURISMO". Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas (EDICON), Buenos Aires - 311 pgs.

LAZZARI, L. L.; MOULIA, P. I. (2014): "MODELO DE DECISIÓN MULTICRITERIO CON NÚMEROS Z". Actas XXVII ENDIO – XXV EPIO. 21 al

23 de mayo de 2014. Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional.

PAL, S. K.; BANERJEE, R.; DUTTA, S.; SARMA, S. S. (2013): "AN INSIGHT INTO THE Z-NUMBER APPROACH TO CWW". Fundamenta Informaticae - Vol. 124 – pgs. 197, 229.

PAVESI, P. (1997): "OBJETIVOS MÚLTIPLES Y EN CONFLICTO". Publicación N° 171. CECE - Facultad de Ciencias Económicas - UBA 35 pgs.

PÉREZ, R. (1981): CÓMO DECIDIR. Cangallo, Buenos Aires - 277 pgs.

XU, Z. (2008): "LINGUISTIC AGGREGATION OPERATORS: AN OVERVIEW". En H. BUSTINCE; F. HERRERA; J. MONTERO (Eds.), Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models. Springer-Verlag, Berlin - pgs.163, 181.

YAGER, R. (1981): "A PROCEDURE FOR ORDERING FUZZY SETS OF UNIT INTERVAL". Information Sciences - Vol. 24 - pgs.143, 161.

YING-MING, L.; MAO-KANG, L. (1997): "FUZZY TOPOLOGY". World Scientific, Singapore - 353 pgs.

ZADEH, L. A. (1965): L. A. (1965): "FUZZY SETS". Information and Control - Vol. 8 - pgs. 338, 353.

ZADEH, L. A. (1975): "THE CONCEPT OF A LINGUISTIC VARIABLE AND ITS APPLICATIONS TO APPROXIMATE REASONING". PART I, Information Sciences - Vol. 8 - pgs. 199, 249. PART II, Information Sciences - Vol. 8 - pgs. 301, 357. PART III, Information Sciences - Vol. 9 - pgs. 43, 80.

ZADEH, L. A. (1979): "FUZZY SETS AND INFORMATION GRANULARITY". En M. M. GUPTA; R. K. RAGADE; R. R. YAGER (Eds.) Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications. North-Holland Publishing Company, New York - pgs. 3, 18.

ZADEH, L. A. (2011): "A NOTE ON *Z*-NUMBERS". Information Sciences - Vol. 181 - pgs. 2923, 2932.