Orígenes de la trigonometría griega

La composición de la tabla de cuerdas de Ptolomeo

Gonzalo Luis Recio[1]

Recibido: 23 de febrero de 2021
Aceptado: 22 de mayo de 2021

Resumen. El artículo explica detalladamente los algoritmos propuestos por Ptolomeo en su *Almagesto* para la composición de la tabla de cuerdas. Esta tabla es la más antigua tabla trigonométrica que ha llegado hasta nosotros.

Palabras clave: Ptolomeo, *Almagesto*, trigonometría griega, historia de la astronomía.

Title: Origins of Greek trigonometry: The composition of Ptolemy's table of chords

Abstract: The article explains in full detail the algorithms proposed by Ptolemy in his *Almagest* for the composition of the table of chords. This table is the most ancient trigonometric table available in our times.

Keywords: Ptolemy, *Almagest*, Greek trigonometry, history of astronomy.

1. Introducción

En su tratado *Acerca de los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna*, Aristarco de Samos calcula la proporción entre las distancias desde la Tierra a la Luna, y al Sol. Para ello supone que en los momentos de cuadratura, cuando la Luna se encuentra iluminada en la mitad de su cara visible para un observador terrestre, los tres cuerpos forman un triángulo rectángulo, con la Luna funcionando como vértice del ángulo recto. Si a eso se le incorpora el valor observado del ángulo con vértice en la Tierra, se tienen todos los datos para conocer la proporción entre los lados. Es decir, toda esa sección de la obra, que constituye la mitad del tratado, no es otra cosa que un único cálculo trigonométrico. En la edición crítica castellana, sin embargo, el desarrollo supone 45 páginas.[2] ¿Por qué Aristarco tuvo que llevar adelante un cálculo tan largo para llegar a un resultado que nos parece tan sencillo? La respuesta es simple: no poseía la herramienta de una trigonometría robusta. Si Aristarco hubiera trabajado un siglo y medio después en Alejandría, luego de la composición de las tablas trigonométricas de Hiparco, toda esa sección de su obra hubiera ocupado no más de unas pocas líneas. En lugar de llevar adelante un procedimiento *ad hoc* para la situación de su problema geométrico particular, sólo hubiera tenido que consultar una tabla trigonométrica, y buscar el valor de la cuerda para el ángulo cuyo valor había obtenido por observación.

---

[1] Universidad Nacional de Quilmes (UNQ) | CONICET. Buenos Aires, Argentina.

[2] Aristarco (trad. 2020, pp. 154-199). La edición es a doble columna, una en el original griego, la otra en castellano.

✉ gonzalorecio@hotmail.com | iD 0000-0002-9633-0009

Recio, Gonzalo Luis (2021). Orígenes de la trigonometría griega: La composición de la tabla de cuerdas de Ptolomeo. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, *6*(1), 105–138..
https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/article/view/32258

La incorporación de las tablas trigonométricas al acervo de herramientas que un matemático antiguo tenía a su disposición supuso, entonces, un adelanto radical en las posibilidades que tenía para entender matemáticamente la realidad natural. La facilidad con la que cualquiera podía aprovechar su utilidad está testimoniada por el hecho de que se siguieron usando sin modificaciones sustanciales hasta la llegada de la calculadora portátil hace pocas décadas. La astronomía, como una de las ciencias matematizadas por excelencia en el mundo antiguo, encontró allí un potencial de desarrollo notable. El *Almagesto* es un clarísimo ejemplo: si Ptolomeo hubiera tenido que llevar adelante sus cálculos trigonométricos con las herramientas que tenía Hiparco, el *Almagesto* sería una obra que ocuparía una biblioteca entera. Ptolomeo, por su parte, hubiera debido vivir algunas décadas más para poder llevar a cabo todos los cálculos necesarios. Es decir, la astronomía helenística, y su enorme influencia en la ciencia medieval y moderna, no hubiera sido posible sin la existencia de las tablas trigonométricas que estudiaremos en el presente artículo.

La tabla trigonométrica que encontramos en el *Almagesto* de Ptolomeo es la más antigua que ha llegado hasta nosotros. Si bien Hiparco de Nicea había compuesto una tabla más rudimentaria unos tres siglos antes, ésta no ha llegado hasta nosotros. En el décimo capítulo del libro primero de la obra ptolemaica nos encontramos con dos secciones diversas e íntimamente conectadas: en primer lugar, una explicación sucinta –y por momento fragmentaria– de los algoritmos que se deben seguir para obtener los valores de las cuerdas buscadas para diversos arcos, y en segundo lugar una tabla completa, el invaluable resultado de innumerables y repetitivas ejecuciones de esos algoritmos.

En la primera sección del artículo hago una breve explicación de la noción de cuerda, que es la función trigonométrica utilizada por Ptolomeo en el *Almagesto*. La segunda sección explica la estructura de la tabla de cuerdas que Ptolomeo presenta en la obra. La tercera sección, que es la parte central, consiste en la explicación detallada de los algoritmos que Ptolomeo propone la composición de una tabla de cuerdas. Dado que el cálculo de la mayoría de los valores de la tabla está apoyado en al menos un valor obtenido anteriormente, la tercera sección está subdividida en seis subsecciones: la primera indica cómo obtener los primeros valores conocidos de la tabla, la segunda obtiene nuevos valores a partir de los anteriores, y así.

La comprensión de la composición y funcionamiento de la tabla de cuerdas de Ptolomeo no sólo constituye un interesantísimo capítulo en la historia de los orígenes de la trigonometría, sino que también supone un paso necesario para entender las particularidades técnicas que encontramos en el propio desarrollo de las teorías astronómicas de Ptolomeo y sus sucesores.

El tema fue tratado en algunas obras de categoría. La obra más moderna donde encuentro un tratamiento del tema es (Van Brummelen, 2009, pp. 68-77). Allí podemos encontrar un tratamiento profundo y contextualizado de la trionometría ptolemaica. La exposición, sin embargo, es sumamente resumida, y está “traducida” para un lector habituado a las matemáticas modernas. Algo similar se puede decir de (Pedersen, 2010, pp. 56-65), aunque allí la explicación es un poco más técnica. Si bien su manera de exponer el tema tiene la ventaja de mostrar con total claridad la relación entre la trigonometría de Ptolomeo y nuestras modernas funciones, en el camino es pierde mucho del sabor de los métodos originales del astrónomo. El lector puede incluso dirigirse a (Neugebauer, 1975, pp. 20-30). La exposición es sumamente técnica, y evita el seguimiento paso a paso del argumento ptolemaico. Cuenta, sin embargo, con la ventaja de mostrar con claridad algunas aplicaciones prácticas en el desarrollo teórico del *Almagesto*.

Este artículo consiste en la explicación detallada de cada uno de los algoritmos propuestos de manera más o menos clara por Ptolomeo. En ese sentido, no realiza un aporte original a la literatura sobre matemática antigua. Es mi esperanza, sin embargo, que sirva como recurso a futuros estudiantes de historia de las ciencias matemáticas, para una mejor y más sencilla comprensión de este texto absolutamente fundamental en la historia de la disciplina. Éste es, hasta donde llega mi conocimiento, el único texto en lengua castellana que aborda la cuestión de manera minuciosa.

El texto no supone ningún conocimiento particularmente profundo en geometría. Como se verá, se hace frecuente referencia a los *Elementos* (Euclides, 1991). En ese sentido, aunque la mayoría de las referencias a esa obra pueden obviarse, en algunas ocasiones puede ser de ayuda consultarla para tener una mejor comprensión del argumento. En general he optado por no simplificar las expresiones algebraicas, para que de ese modo quede más clara la conexión entre los diversos pasos en la explicación. Tal decisión está fundada en la previsión de que un lector más alejado de las áreas matemáticas puede encontrar que no comprende la conexión entre dos pasos del cálculo, simplemente porque una simplificación de la expresión ha sido realizada sin ninguna clase de advertencia. Un lector entrenado, sin embargo, aunque puede encontrar esta modalidad un tanto incómoda, será capaz de simplificar las expresiones con facilidad.

2. La noción de cuerda

Cuando Ptolomeo habla del valor de la cuerda de un arco, se refiere a la longitud del segmento determinado por la intersección de los dos segmentos que determinan a ese arco con una circunferencia cuyo centro es el vértice de ese arco.

Ver Figura 1. En este caso, si tomamos $\text{arc}\, BGC$ como el arco cuya cuerda queremos obtener. Dicho arco está determinado por los lados CG y BG. Si el vértice G es

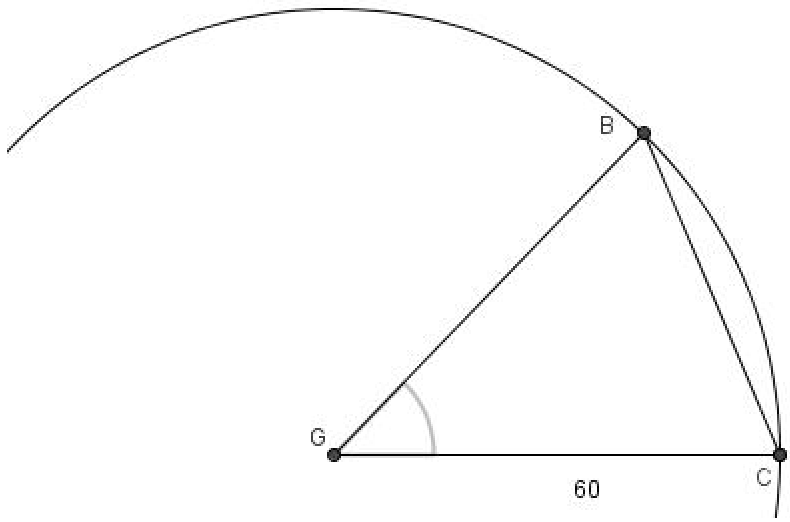

Figura 1. Relación de la cuerda con su arco correspondiente

el centro de una circunferencia, ésta interseca ambos lados en los puntos C y B, respectivamente. La cuerda de arc BGC queda así definida como el segmento BC. El valor de la misma dependerá de a) el valor de arc BGC y b) el valor del radio de la circunferencia, que es por definición igual a GB y GC. En sus tablas, y por una cuestión de practicidad para el cómputo, Ptolomeo asume un valor de 120 partes para el diámetro de la circunferencia, o 60 para el radio.

La composición de una tabla de cuerdas consiste, entonces, en determinar el valor de la cuerda correspondiente a diversos valores del arco con vértice en el centro de la circunferencia, dado un radio arbitrario. En (Recio, 2018, pp. 36-39) puede verse la manera en que Ptolomeo utiliza la tabla de cuerdas en la resolución de triángulos rectángulos, y a través de ellos, de problemas geométricos ligados a sus modelos.

En la siguiente sección, entonces, veremos cuál es la estructura general de la tabla de cuerdas ptolemaica.

3. La estructura de la tabla de cuerdas

La tabla de cuerdas es el instrumento matemático más utilizado en todo el *Almagesto*. Ptolomeo reduce los problemas de los movimientos de los objetos celestes a problemas geométricos. En esa tarea, en prácticamente cada página de la obra aparecen problemas ligados a cálculo de arcos y lados de triángulos rectángulos. Dada la omnipresencia de esta clase de argumentos, Ptolomeo indica, al inicio mismo del *Almagesto*, que construirá una tabla de cuerdas con intervalos de ½° (I, 10; H1 31; 48).[3]

La tabla ptolemaica está calculada sobre una base de 120, notada en sistema sexagesimal, y consta de tres columnas. En la primera anota el valor del arco para el cual se calcula la cuerda. Como dije, este valor está tabulado con intervalos de ½°. La segunda columna anota el valor de la cuerda para el arco correspondiente. La tercera columna indica "[...] la treinteava parte del incremento en la cuerda para cada intervalo" (I, 10; H1 47; 56). Este último valor está anotado omitiendo las partes enteras, ya que en todos los casos ésta es igual a 0.

Por ejemplo, en la primera fila de la tabla del *Almagesto*, vemos[4]

½°	0;31,25	1,2,50

Esto significa que para un arco de ½° el valor de la cuerda correspondiente es 0;31,25, en las mismas unidades del diámetro. Luego, por cada minuto de incremento al arco de la fila anterior hasta el arco de la correspondiente fila, debe incrementarse el valor de la cuerda por 0;1,2,50. Este último valor, como Ptolomeo dice, es el correspondiente a la treintava parte del incremento en la cuerda para el arco considerado. Dado que el valor de una cuerda para el valor de arco anterior, esto es, 0°, es naturalmente igual a 0, entonces el valor del incremento es calculado como $\frac{0;31,25-0}{30} = \frac{0;31,25}{30} = 0;1,2,50$. Si incorporamos la segunda fila, veremos

[3] Las citas al *Almagesto* seguirán la siguiente notación: el número romano designa el número de libro, el siguiente arábigo, el número de capítulo en el libro. Luego indico el tomo y la página en la edición crítica de Heiberg, y por último la página en la traducción al inglés de Toomer. En este caso se refiere al libro primero, capítulo décimo; al tomo primero, página 31 de Heiberg; y a la página 48 en la traducción de Toomer.

[4] La notación de la segunda y tercera columnas indica la parte entera antes del ";", y separa las posiciones sexagesimales con una ",".

½°	0;31,25	1,2,50
1	1;2,50	1,2,50

Aquí las primeras dos columnas tienen el mismo significado, y la tercera indica que, por cada minuto de incremento en el valor del arco, la cuerda debe incrementarse en $0;1,2,50$. Aquí, nuevamente, el valor está calculado como $\frac{1;2,50-0;31,25}{30}=0;1,2,50$. Si bien en las dos primeras filas el valor de incremento proporcional es idéntico, esto es únicamente por el redondeo que Ptolomeo realiza.

Además, el lector atento habrá notado quizá que, de hecho, el valor de incremento por cada minuto adicionado al arco debe variar no cada 30 minutos como la tabla indica, sino que se trata de un cambio continuo. Ptolomeo, por supuesto, es consciente de ello, y advierte que este modo de calcular sólo nos indica el valor promedio de incremento por minuto en cada intervalo de ½°. Un resultado final así calculado, no obstante, "[...] no será sensiblemente distinto al incremento verdadero" (I, 10; H1 47; 56).

La próxima sección, que es el corazón del artículo, consiste en la explicación detallada de los algoritmos que Ptolomeo propone para la construcción de su tabla de cuerdas.

4. La composición de la tabla de cuerdas

La construcción de una tabla de cuerdas implica una tarea compleja. A continuación veremos, paso a paso, los argumentos geométricos a través de los cuales Ptolomeo fue capaz de calcular el valor de una cuerda determinada a partir de un arco determinado. Esto quiere decir que en esta sección, con alguna excepción, no vamos a calcular los valores de las cuerdas, sino sólo mostrar los algoritmos que permitieron a Ptolomeo y sus contemporáneos hacerlo.

Primer nivel de valores.

Más allá de los valores triviales de crd[5] $(0°)=0$ y $crd\,(180°)=2R$, la obtención de valores de cuerdas no es siempre sencillo. No obstante ello, a partir de algunos teoremas de los *Elementos* de Euclides es posible conocer con cierta facilidad los valores de algunas cuerdas.

Crd (36°)

Ver Figura 2. Construir un círculo de radio R con centro en A, determinar el diámetro CB. Luego bisectar el radio AB con el punto E. A continuación determinar el radio AD, que debe ser perpendicular a CB. Determinar un círculo con centro en E y radio ED. Finalmente determinar el punto Z en la intersección entre el círculo con centro en E y el diámetro CB. Por último, unir DE.

Dada esta construcción, es posible calcular el valor de crd (36°) del siguiente modo:

gracias a *Elem.* II 6 sabemos que

(1) $BZ\times AZ+AE^2=EZ^2$

[5] Notación para "cuerda".

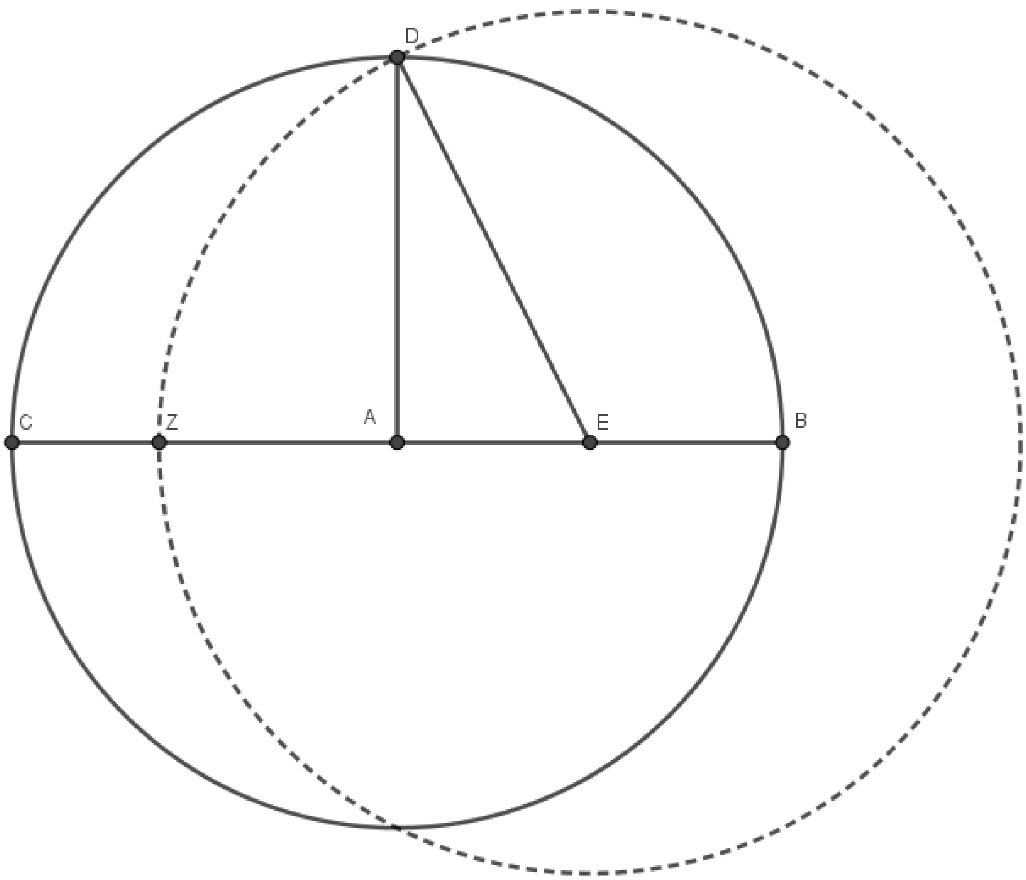

Figura 2. Construcción para iniciar el cálculo del primer nivel de cuerdas.

pero por construcción sabemos que

(2) $EZ = ED$

por lo tanto, por (1) y (2) sabemos que

(3) $BZ \times AZ + AE^2 = ED^2$.

Por construcción sabemos que el triángulo EDA es un triángulo rectángulo. Por lo tanto, gracias a *Elem.* I 47 sabemos que

(4) $ED^2 = AE^2 + AD^2$.

Además, por construcción sabemos que

(5) $AD = AB$.

Entonces, por (4) y (5) obtenemos que

(6) $ED^2 = AE^2 + AB^2$

y por (3) y (6) obtenemos que

(7) $BZ \times AZ + AE^2 = AE^2 + AB^2$

desde donde llegamos a

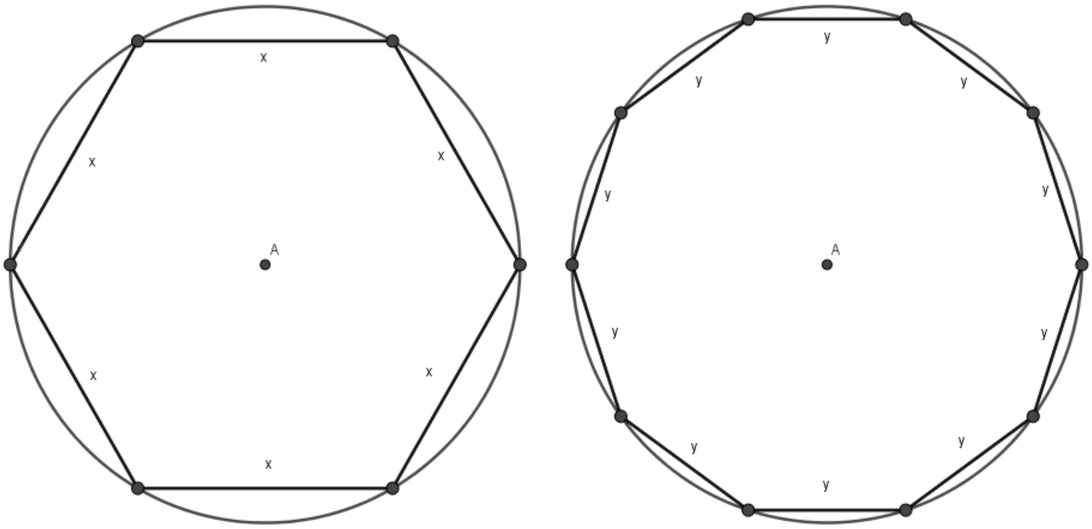

Figura 3. Hexágono y decágono regulares. Ptolomeo utiliza dos teoremas de los Elementos que se refieren a estas figuras para continuar el cálculo del primer nivel de cuerdas.

(8) $BZ \times AZ = AB^2 = AB \times AB.$

De aquí se deduce que

(9) $\frac{AB}{ZB} = \frac{ZA}{AB}$

Por *Elem.* VI def. 3 esto significa que

(10) el segmento ZB ha sido cortado en sus razones medias y extremas, donde AB es media, y ZB y ZA son las extremas.[6]

Pero por construcción sabemos que

(11) $ZB = ZA + AB.$

Por lo tanto, por (9) y (11) obtenemos que

(12) $\frac{AB}{ZA+AB} = \frac{ZA}{AB}$

Ahora hace falta recurrir a dos nuevos teoremas de los *Elementos*. Por construcción sabemos que

(13) el radio del círculo con centro en A es AB.

Por lo tanto, gracias a *Elem.* IV 15 sabemos que

(14) los lados de un hexágono regular inscrito en el círculo con centro en A son iguales a AB.

Para continuar adoptaremos la siguiente notación, para exponer otro teorema de los *Elementos*. Ver Figura 3. Denotaremos con x el valor de los lados de un hexágono

[6] Es decir, que entre los segmentos ZB, AB y AZ se da la proporción áurea.

regular inscrito en un círculo dado, y con y el valor de los lados de un decágono regular inscrito en el mismo círculo dado.

Aceptada esta notación, por *Elem.* XIII 9 sabemos que, para cualquier círculo dado, se da que

(15) $\frac{x}{y+x} = \frac{y}{x}$.[7]

Ahora bien, si suponemos que el círculo dado es nuestro círculo con centro en A, entonces es claro, por (14), que

(16) $x = AB$

de donde se deduce, por (15) y (16), que

(17) $\frac{AB}{y+AB} = \frac{y}{AB}$.

Luego, por (12) y (17) obtenemos que

(18) $y = ZA$.

Pero por construcción sabemos que

(19) y es igual a los lados de un decágono regular inscrito en el círculo con centro en A.

Por lo tanto, por (18) y (19) obtenemos que

(20) ZA es igual a los lados de un decágono regular inscrito en el círculo con centro en A.

Por construcción sabemos que

(21) $ZA = EZ - AE$

y por (2) y (21) obtenemos que

(22) $ZA = ED - AE$.

Luego, por (22),(21) y gracias a *Elem.* I 47, obtenemos que

(23) $ZA = \sqrt{AE^2 + AD^2} - AE$.

Pero por construcción sabemos que

(24) AD es igual al radio del círculo con centro en A

y que

(25) AE es igual a la mitad del radio con centro en A.

Por lo tanto, por (23), (24) y (25), obtenemos que

(26) $ZA = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}$.

[7] Es útil, para entender este paso, comparar el texto de los *Elementos* para este teorema con la proposición (10) de este artículo.

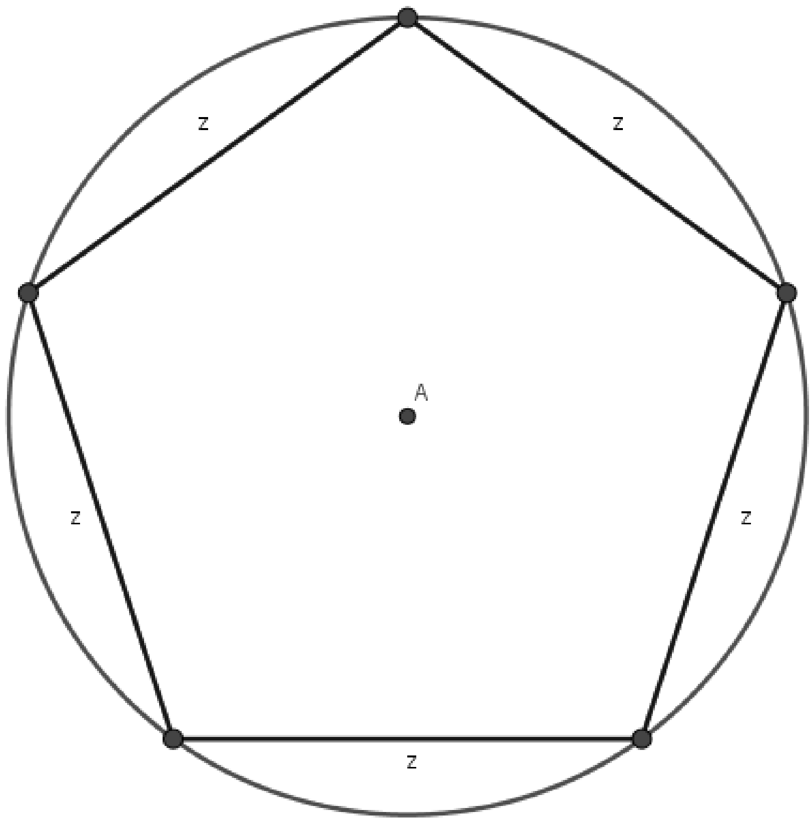

Figura 3. Pentágono regular que Ptolomeo utiliza para el cálculo del primer nivel de cuerdas.

Además, sabemos que

(27) los lados de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo son iguales a la cuerda del arco $\frac{360°}{n}$ en ese círculo.[8]

Por (20) y (27) obtenemos que

(28) ZA es igual a la cuerda de un arco $\frac{360°}{10}$ del círculo con centro en A.

Por último, a partir de (26) y (28) finalmente obtenemos que

(29) $\text{crd }(36°) = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}.$

Crd (72°)

Construir un círculo con centro en A, que inscriba a un pentágono regular con lados de valor z.

[8] Esto puede demostrarse fácilmente: primero, determinar el círculo en el cual el polígono está inscrito. Si se unen los vértices del polígono con su centro, entonces todos los triángulos determinados son necesariamente congruentes, ya que, dado que el polígono es regular, entonces todos tienen bases iguales, y además los restantes lados son también iguales, ya que todos son radios del círculo en el cual el polígono está inscrito. Si todos los triángulos son congruentes, entonces sus arcos correspondientes serán iguales. Por último, dado que a cada ángulo con vértice en el centro del polígono (que es también centro del círculo en el cual ese polígono está inscrito) le corresponde un lado del polígono, entonces el valor de los arcos con vértice en el centro del polígono puede obtenerse como $360°/\mathit{cantidad\ de\ lados\ del\ polígono}$.

Ver Figura 4. Siguiendo con la notación utilizada en (15), y añadiendo la variable z como valor del lado de un pentágono regular inscrito en un círculo dado, entonces por *Elem.* XIII 10 sabemos que

(30) $z^2 = x^2 + y^2.$

A partir de esto sabemos, por *Elem.* I 47, que los segmentos z, x, e y forman un triángulo rectángulo, donde z es la hipotenusa, y x e y son los catetos. Entonces, si asumimos nuevamente que el círculo dado es el círculo con centro en A, por (5), (16), (18) y (30) obtenemos que

(31) $z^2 = AB^2 + ZA^2$

y por (5) y (31) llegamos a

(32) $z^2 = AD^2 + ZA^2.$

Por lo tanto, para completar el triángulo rectángulo, hay que determinar el segmento DZ en la Figura 5, en la cual z es igual a DZ.[9]

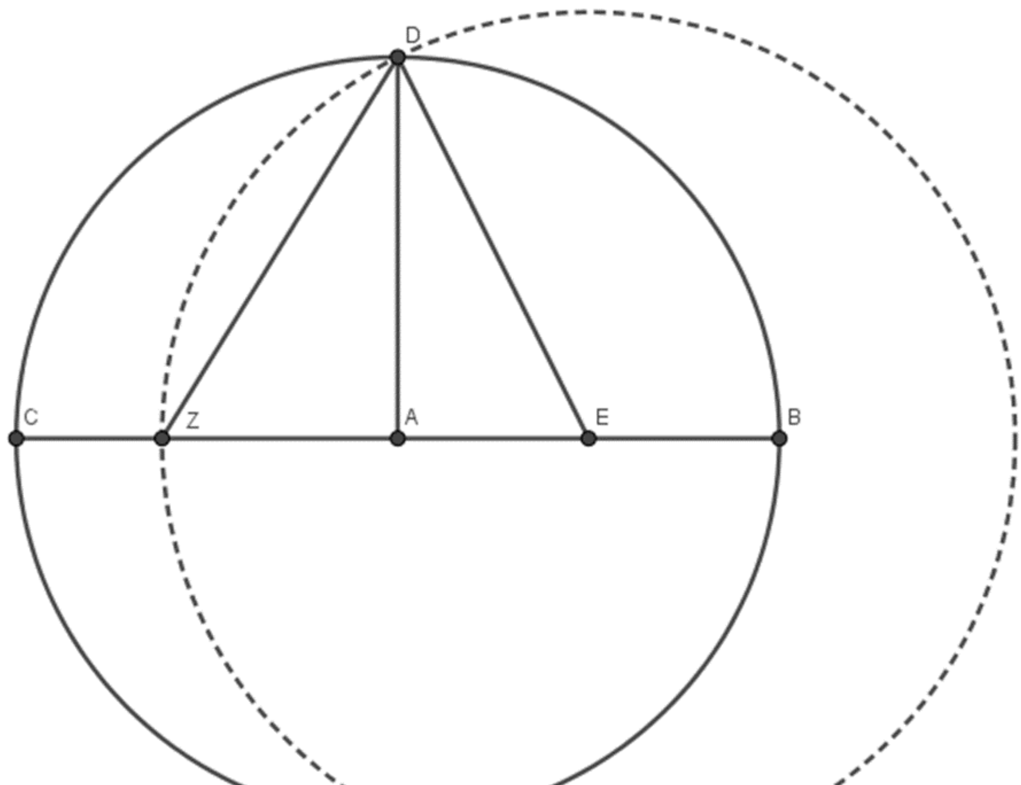

Figura 4. Desarrollo de la Figura 2 para finalizar el cálculo del primer nivel de la tabla.

[9] Por supuesto, para obtener el resultado buscado no es necesario construir el triángulo rectángulo, sino que sólo basta con considerar a z como una incógnita igual a la suma de los cuadrados de dos valores conocidos. Este modo de presentarlo busca, únicamente, mantener el espíritu geométrico de los antiguos griegos.

Ver Figura 5. Sabemos que

(33) DZ es igual a los lados de un pentágono regular inscrito en el círculo con centro en A

y también que

(34) $DZ = \sqrt{AD^2 + ZA^2}$.

Entonces, por (24), (26) y (34) obtenemos que

(35) $$DZ = \sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2}.$$

Luego, por (27) y (33) sabemos que

(36) DZ es igual a la cuerda de un arco $\frac{360°}{5}$ del círculo con centro en A.

Por último, a partir de (35) y (36) obtenemos que

(37) $$\text{crd } (72°) = \sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2}.$$

Crd (60°)

Ver Figura 6. Dado un círculo de radio R, y un arco α de 60° determinado por el vértice A y los puntos B y C sobre la circunferencia. Entonces es posible calcular el valor de crd (60°) del siguiente modo:

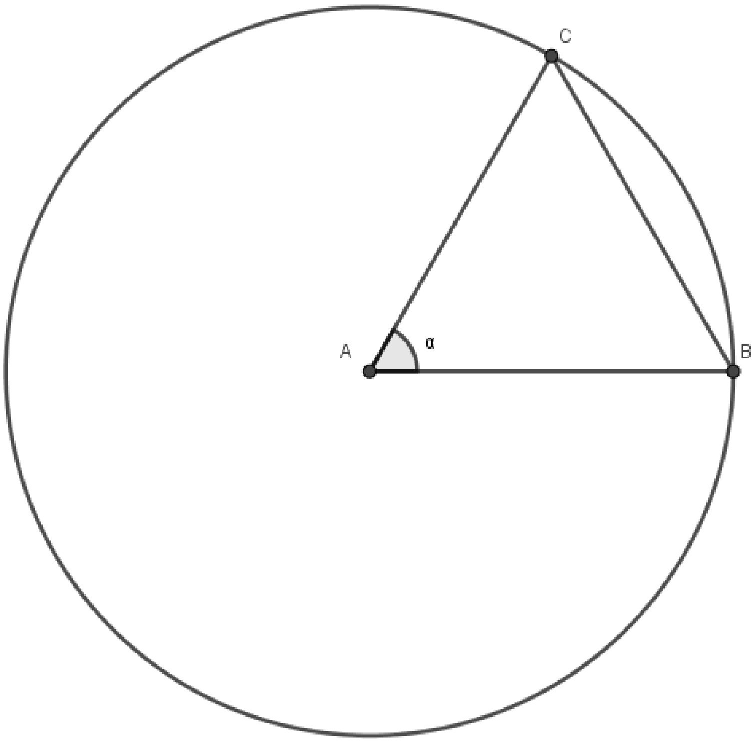

Figura 5. Diagrama para hallar la cuerda de 60°

Por construcción sabemos que

(38) $\alpha = 60°$.

Por lo tanto, por construcción se da que

(39) $crd\ (60°) = CB$.

Además, por (27) sabemos que

(40) los lados de un hexágono regular son iguales a crd (60°) en el círculo que lo inscribe.

Entonces, por (39) y (40) obtenemos que

(41) CB es igual a los lados de un hexágono regular del círculo con centro en A.

Así, por (41) y gracias a *Elem.* IV 15 obtenemos que

(42) $CB = R$.

Finalmente, por (39) y (42) obtenemos que

(43) $crd\ (60°) = R$.

Crd (90°).

Ver Figura 7. Dado un círculo de radio R, y un arco α de 90° determinado por el vértice A y los puntos B y C sobre la circunferencia. Entonces es posible calcular el valor de crd (90°) del siguiente modo:

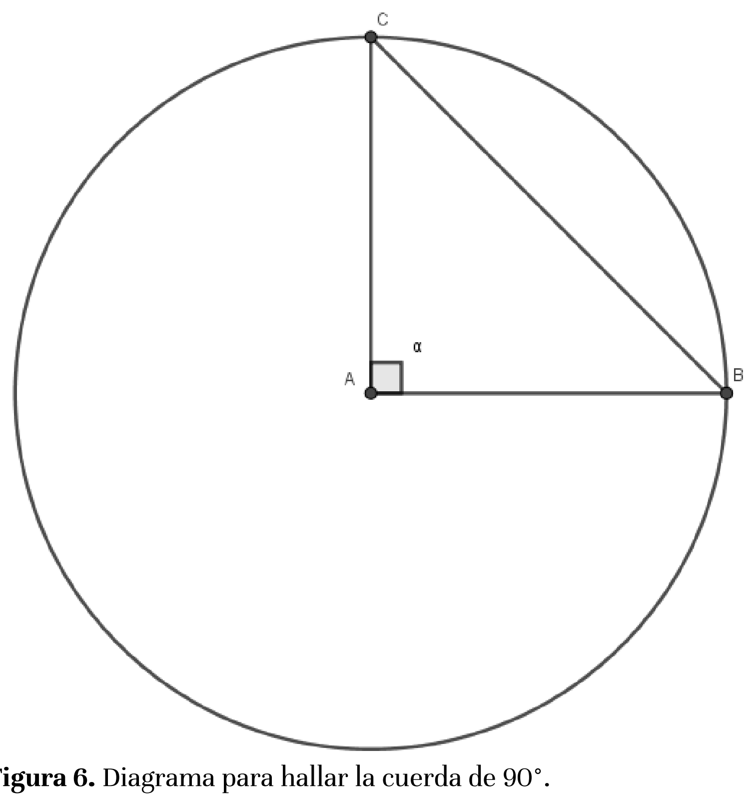

Figura 6. Diagrama para hallar la cuerda de 90°.

por construcción sabemos que

(44) $\alpha = 90°$

por lo que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo. Además, por construcción sabemos que

(45) $AB = AC = R$.

Entonces, por (45), y aplicando *Elem.* I 47, obtenemos que

(46) $BC = \sqrt{R^2 + R^2}$.

Entonces, por (46), obtenemos finalmente que

(47) $crd\ (90°) = \sqrt{2(R^2)}$.

Crd (120°)

La solución al problema de hallar la cuerda de 120° es similar al caso de la cuerda de 60°. Ver Figura 8. Construir un círculo con centro en A, y un arco α de 120° determinado por el vértice A y los puntos B y C sobre la circunferencia. Entonces es posible calcular el valor de crd (120°) del siguiente modo:
por construcción sabemos que

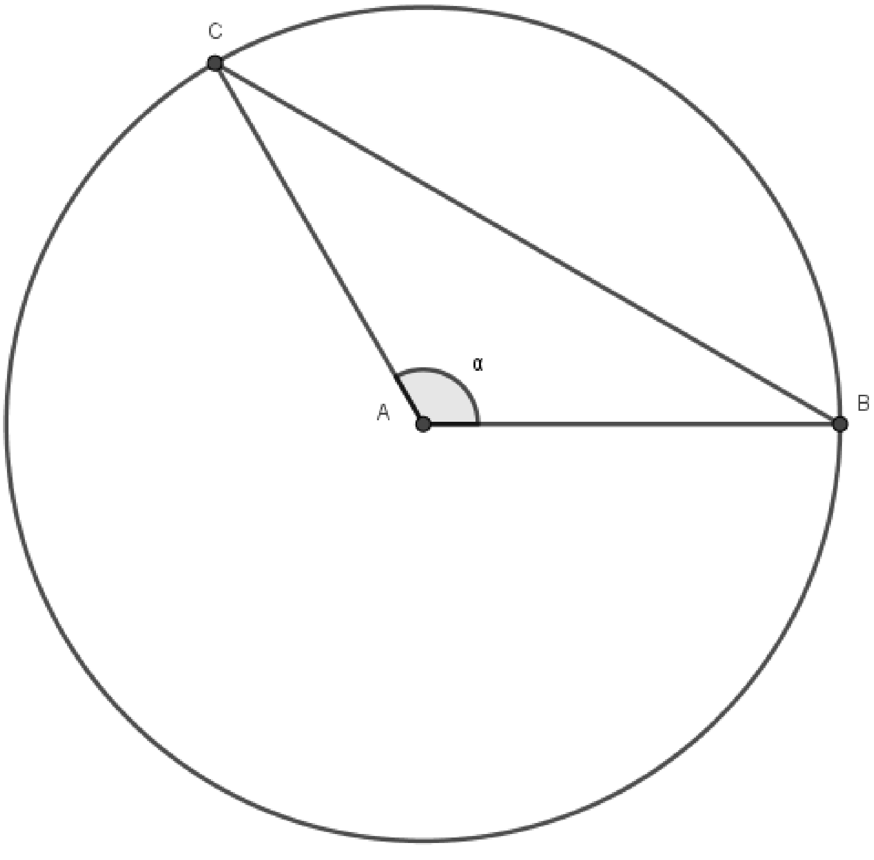

Figura 7. Diagrama para hallar la cuerda de 120°.

(48) $\alpha = 120°$.

Por lo tanto, por construcción se da que

(49) $\text{crd}\ (120°) = CB$.

Además, por (27) sabemos que

(50) los lados de un triángulo equilátero son iguales a crd (120°) en el círculo que lo inscribe.

Entonces, por (49) y (50) obtenemos que

(51) CB es igual a los lados de un triángulo equilátero inscrito en el círculo con centro en A.

Así, por (51) y gracias a *Elem.* XIII 12 obtenemos que

(52) $CB^2 = 3R^2$

y por lo tanto

(53) $CB = \sqrt{3R^2}$.

Finalmente, por (49) y (53) obtenemos que

(54) $crd\ (120°) = \sqrt{3R^2}$.

Segundo nivel de valores

A partir de los valores de crd (36°), y crd (72°) es posible, a través de una ingeniosa aplicación de *Elem.* I 47, conocer los valores de las cuerdas para dos arcos más.

Ver Figura 9. Construir un círculo de radio R con centro en A. Luego determina el diámetro CB, y un punto D sobre la circunferencia. Luego unir CD, DB y AD. Gracias a *Elem.* III 31 sabemos que el triángulo CBD es un triángulo rectángulo, donde CB es la hipotenusa, y CD y BD son los catetos. Por lo tanto, por *Elem.* I 47 sabemos que

(55) $CB^2 = CD^2 + DB^2$.

Por construcción sabemos que

(56) $CB = 2R$.

Es claro que

(57) el cateto CD es la cuerda del arco β

y que

(58) el cateto DB es la cuerda del arco α

y que

(59) β es el arco suplementario de α.

Entonces, por (55), (56), (57) y (58) obtenemos que

(60) $(2R)^2 = crd\ (\beta)^2 + crd\ (\alpha)^2$.

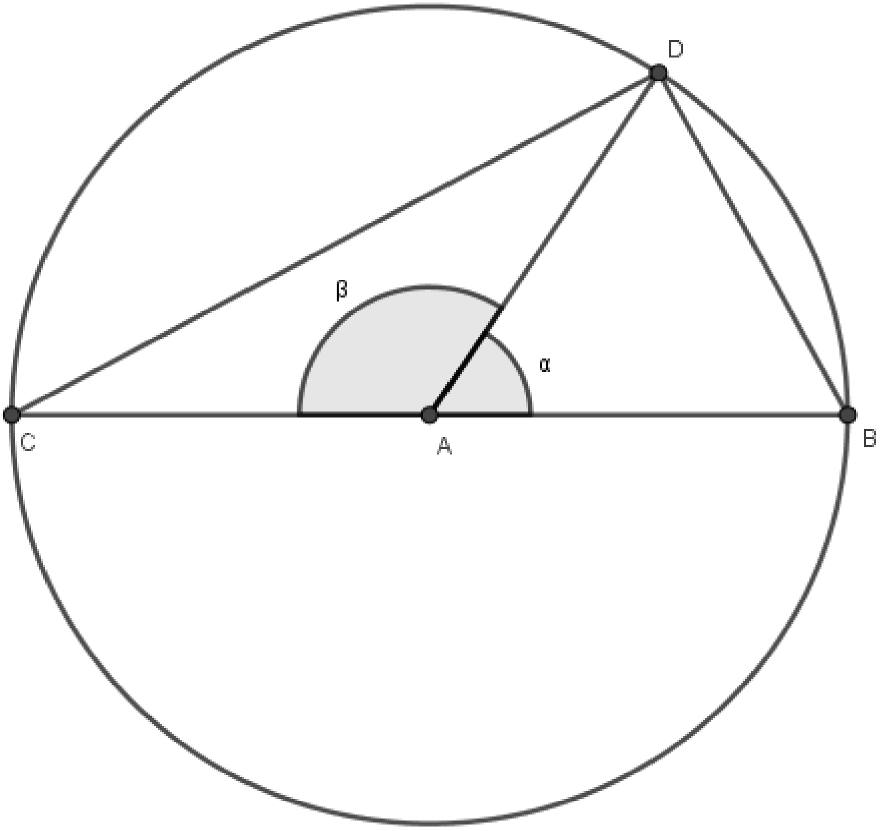

Figura 8. Diagrama para hallar las cuerdas de 108° y 144°.

Crd (108°)

Supongamos, en primer lugar, que

(61) $\beta = 108°.$

En ese caso, por (59), obtenemos que

(62) $\alpha = 72°.$

Así, por (60), (61) y (62) llegamos a

(63) $(2R)^2 = crd\ (108°)^2 + crd\ (72°)^2$

o lo que es lo mismo,

(64) $crd\ (108°)^2 = (2R)^2 - crd\ (72°)^2.$

Por último, por (37) y (64) obtenemos que

(65) $$crd\ (108°)^2 = (2R)^2 - \left(\sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2}\right)^2$$

para llegar finalmente a

$$(66) \qquad crd\ (108°) = \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2}\right)^2}.$$

Crd (144°)

De manera similar, supongamos, en segundo lugar, que

$$(67) \qquad \beta = 144°.$$

En ese caso, por (59), obtenemos que

$$(68) \qquad \alpha = 36°.$$

Así, por (60), (67) y (68) llegamos a

$$(69) \qquad (2R)^2 = crd\ (144°)^2 + crd\ (36°)^2$$

o lo que es lo mismo,

$$(70) \qquad crd\ (144°)^2 = (2R)^2 - crd\ (36°)^2.$$

Por último, por (29) y (70) obtenemos que

$$(71) \qquad crd\ (144°)^2 = (2R)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2$$

para llegar finalmente a

$$(72) \qquad crd\ (144°) = \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2}\right)^2}.$$

Claramente este método podría ser aplicado partiendo de cualquier cuerda ya conocida. Dado que, por el momento, sólo puede partir de las cuerdas para 36° y 72°, las únicas aplicaciones posibles son las dos indicadas.

Tercer nivel de valores

El siguiente paso en la construcción de la tabla es demostrar un teorema –llamado luego *teorema de Ptolomeo*– que permite obtener la cuerda de un arco que es la diferencia entre dos arcos cuyas cuerdas ya son conocidas. Es decir, este teorema permite hallar el valor de la cuerda de α, siempre que $\alpha = \beta - \gamma$, y $crd\ (\beta)$ y $crd\ (\gamma)$ sean conocidas.

A primera vista, este teorema no permite una gran cantidad de resultados nuevos. De hecho, dadas las pocas cuerdas ya conocidas en los dos primeros niveles, sólo pueden obtenerse unos pocos valores nuevos. Lo interesante, sin embargo, es que los nuevos valores obtenidos pueden a su vez pasar por el mismo procedimiento, otorgando más resultados con valores nuevos. Nótese que, dado que en los dos primeros niveles sólo se han obtenido algunas cuerdas de arcos con valores pares, entonces a través de este método sólo es posible obtener nuevas cuerdas para arcos con valores también pares.[10]

[10] Obviamente, porque las restas entre números pares necesariamente dan resultados pares.

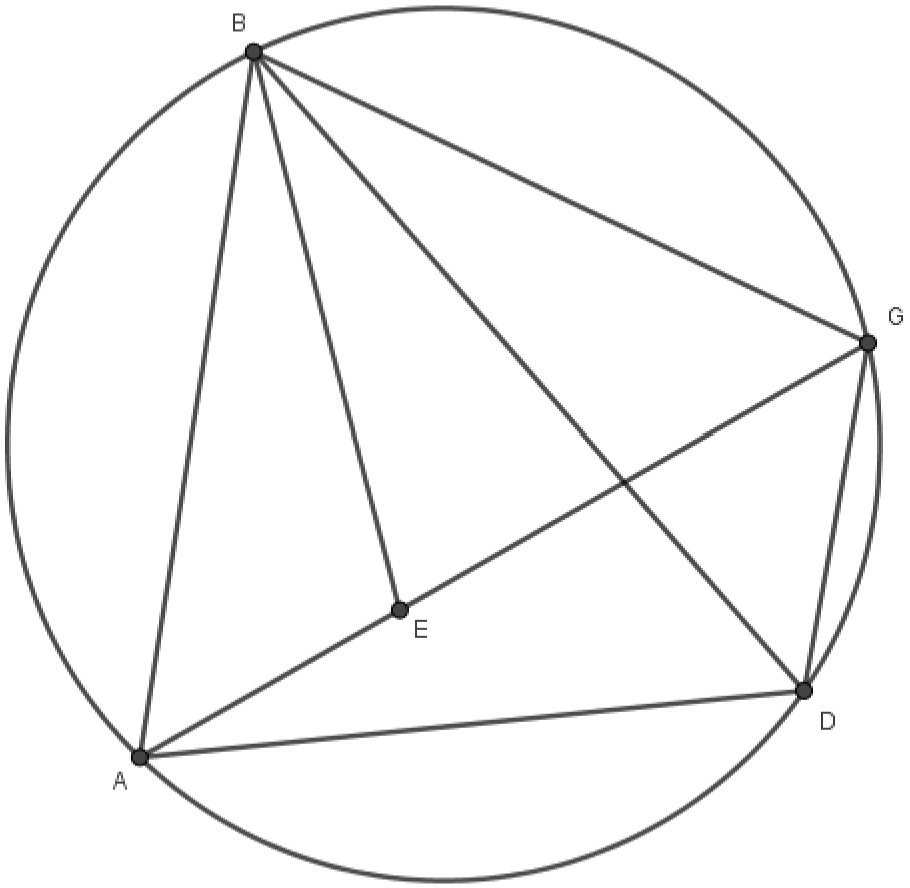

Figura 9. Primer diagrama para la demostración del teorema de Ptolomeo.

Esto ya muestra que el teorema de Ptolomeo no va a ser suficiente para completar la tabla de cuerdas.
Ver Figura 10. Ptolomeo plantea el problema indicando que va a demostrar que "[...] si dos arcos y las cuerdas correspondientes son dadas, entonces la cuerda de la diferencia entre los dos arcos también es dada" (I 10; H1 38; 51). Para demostrar esto, determinar un círculo con un cuadrilátero arbitrario ABGD inscrito en él. Luego unir AG y BD.

En primer lugar, utilizando el procedimiento indicado en *Elem.* I 23, hay que determinar el punto E sobre el segmento AG, de tal modo que

(73) $arcABE = arcDBG$

a partir de lo cual se deriva que

(74) $arcABE + arcEBD = arcDBG + arcEBD.$

Pero por construcción se da que

(75) $arcABE + arcEBD = arcABD$

y que

(76) $arcDBG + arcEBD = arcEBG.$

Por lo tanto, por (74), (75) y (76) obtenemos que

(77) $arcABD = arcEBG.$

Ahora bien, gracias a *Elem.* III 27 sabemos que

(78) $arcBGA = arcBDA,$

pero por construcción se da que

(79) $arcBGE = arcBGA.$

Por lo tanto, por (78) y (79) obtenemos que

(80) $arcBGE = arcBDA.$

El siguiente paso es mostrar que los triángulos ABD y BGE son semejantes. Esto es fácil: a partir de (77) y (80) obtenemos dos pares de arcos correspondientes iguales, y por *Elem.* I 32 se deduce también que

(81) $arcBAD = arcBEG.$

Entonces, por *Elem.* VI 4 sea deduce que

(82) los triángulos ABD y BGE son semejantes

y que

(83) $\frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DA}.$

Por lo tanto

(84) $BG \times DA = BD \times GE.$

También es posible mostrar que los triángulos ABE y BGD son semejantes, pues por (73) ya hay un par de arcos iguales, y gracias a *Elem.* III 27 sabemos que

(85) $arcBAG = BDG,$

pero por construcción se da que

(86) $arcBAG = arcBAE.$

Por lo tanto, por (85) y (86) obtenemos que

(87) $arcBAE = arcBDG$

con lo cual ya se tiene el segundo par de arcos iguales. Con ese resultado, y gracias a *Elem.* I, 32 se obtiene que

(88) $arcBEA = arcBGD,$

por lo cual, gracias a *Elem.* IV 4 obtenemos que

(89) los triángulos ABE y BGD son semejantes.

y que

(90) $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DG}.$

Por lo tanto

(91) $BA \times DG = BD \times AE.$

Entonces, por (84) y (91) obtenemos que

(92) $BG \times DA + BA \times DG = BD \times GE + BD \times AE$

a partir de lo cual se llega a

(93) $BG \times DA + BA \times DG = BD \times (GE + AE)$

y luego

(94) $BG \times DA + BA \times DG = BD \times GA.$

Esto puede traducirse como el siguiente teorema:

(95) para todo cuadrilátero inscrito en un círculo, se da que el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos.

Ver Figura 11. Una vez que se obtuvo este teorema preliminar, Ptolomeo pide (I 10; H1 37; 51), construir un semicírculo con diámetro AD, y determinar sobre la semicircunferencia los puntos B y G. Luego unir AB, AG, DB, DG y BG. De esa manera queda constituido el cuadrilátero ABGD en el semicírculo.

Lo que Ptolomeo quiere demostrar aquí, recordémoslo, es que dados los valores de dos cuerdas correspondientes a dos arcos, entonces también está dado el valor de la cuerda correspondiente a la diferencia entre esos dos arcos. Para ello, supone que en la figura las cuerdas AB y AG ya son conocidas. Además, gracias a *Elem.* III 31 sabemos que

(96) los triángulos ABD y AGD son triángulos rectángulos.

Suponiendo un valor

(97) $AD = 2R,$

y

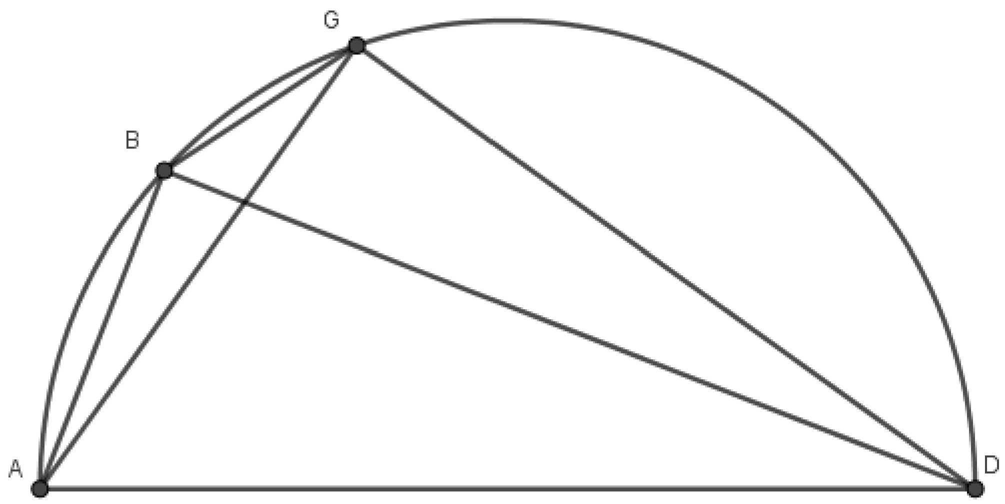

Figura 10. Segundo diagrama para la demostración del teorema de Ptolomeo.

(98) dados los valores de AB y AG en radios,

entonces, gracias a *Elem.* I 47, también están

(99) dados los valores de BD y GD en radios.[11]

Ahora bien, como dijimos, ABGD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyas diagonales son BD y AG. Por lo tanto, por (95) sabemos que

(100) $BG \times DA + BA \times DG = BD \times GA.$

Por lo tanto se da que

(101) $BG = \frac{BD \times GA - BA \times DG}{DA}$

En esta igualdad conocemos, por (97), (98) y (99), los valores de las incógnitas del segundo miembro, por lo tanto se da que también

(102) el valor de BG está dado en radios.

Si se considera a BA como crd (β), y a GA como crd (α), entonces reemplazando los segmentos el resultado puede expresarse como

(103) si $\gamma = \alpha - \beta$, entonces $crd(\gamma) = \frac{\sqrt{(2R)^2 - crd(\beta)^2} \times crd(\alpha) - crd(\beta) \times \sqrt{(2R)^2 - crd(\alpha)^2}}{2R}$

Utilizando el teorema de Ptolomeo, y partiendo de las cuerdas obtenidas en los dos primeros niveles, es posible obtener los valores para las cuerdas de los arcos listados a continuación. En la tabla se indica, además, en qué iteración del método es posible obtener el resultado respectivo.

Valores base	1era ronda de restas	2da ronda de restas	3era ronda de restas
36°	12°	6°	138°
60°	18°	42°	174°
72°	24°	66°	
90°	30°	78°	
108°	48°	96°	
120°	54°	102°	
144°	84°	114°	
180°		126°	
		132°	

[11] De hecho, este es exactamente el procedimiento seguido para alcanzar el segundo nivel de valores, el cual aquí ha sido repetido sólo en vistas de la claridad expositiva. Ptolomeo lo refiere explícitamente, diciendo que si se conocen las cuerdas AB y AG entonces se conocen las cuerdas BD y GD, pues "[...] son las cuerdas de los suplementarios." (I, 10; H1 38; 58).

		150°	
		156°	
		162°	
		168°	

Si se observa con atención, la tabla muestra que, hasta el tercer nivel de valores, sólo es posible hallar las cuerdas de arcos que sean múltiplo de 6°. De hecho, permite hallar todas las cuerdas de arcos múltiplos de 6°, hasta 180°. ¡Eso significa que hasta ahora sólo tenemos treinta de los trescientos sesenta valores buscados!

Cuarto nivel de valores

Luego de la demostración del teorema de Ptolomeo, se expone un procedimiento que tiene sus raíces en el propio Arquímedes, y que permite conocer la cuerda correspondiente a un arco que sea la mitad de otro arco cuya cuerda ya es conocida. Para ello, trazar un semicírculo con diámetro AG, y luego determinar una cuerda BG, cuyo valor se supondrá conocido (ver Figura 12). Después bisecar el arco GB en el punto D. Unir AD, DB y DG, y trazar un segmento DZ que sea perpendicular a AG. Por último, determinar el punto E sobre AG de tal manera que AE sea igual a AB. Unir DE.

Lo que Ptolomeo busca es encontrar la relación entre la cuerda conocida BG y la cuerda desconocida DG. Para lograrlo, aplica un teorema que se remonta al propio Arquímedes.

En primer lugar, hay que recordar que, por construcción,

(104) $AB = AE$

y que

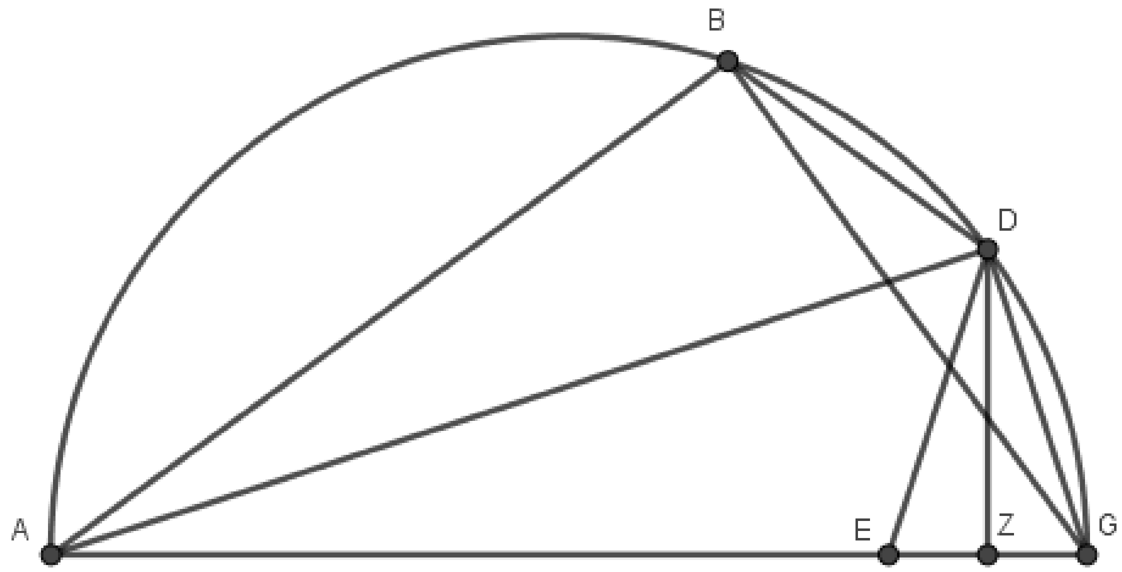

Figura 11. Diagrama para la demostración del teorema de Arquímedes para cuerdas.

(105) $arcBAD = arcDAE$.[12]

Además, es obvio que

(106) los triángulos ABD y ADE comparten el lado AD.

Por lo tanto, por (104), (105) y (106), y gracias a *Elem.* I 4 obtenemos que

(107) $BD = DE$.

Pero, por construcción sabemos que

(108) $BD = DG$.

Por lo tanto, por (107) y (108) obtenemos que

(109) $DG = DE$.

Por (109) obtenemos que

(110) el triángulo EDG es isósceles

y dado que DZ es, por construcción, perpendicular a EG, entonces

(111) el segmento DZ bisecta el segmento EG

y

(112) $EZ = ZG$.

Pero se da, por construcción, que

(113) $EG = AG - AE$

Y que

(114) $AE = AB$.

Por lo tanto, por (113) y (114) obtenemos que

(115) $EG = AG - AB$.

Además, por (111) sabemos que

(116) $ZG = \frac{1}{2}EG$.

Entonces, por (115) y (116) obtenemos que

(117) $ZG = \frac{1}{2}(AG - AB)$.

Si, como dijimos al inicio, la cuerda BG es conocida, y dado que por *Elem.* III 31 el triángulo AGB es un triángulo rectángulo, entonces por *Elem.* I 47 es posible llevar adelante un

[12] Esta proposición, que era casi evidente para un antiguo a partir de la construcción hecha, necesita quizá de alguna justificación para un lector moderno. La demostración es fácil: puesto que los arcos subtendidos desde el centro por las cuerdas BD y DG son, por construcción, iguales, entonces gracias a *Elem.* III 20 también lo son desde cualquier punto sobre la circunferencia, incluido el punto A sobre el diámetro determinado.

procedimiento idéntico al indicado en el segundo nivel de valores (pág. 118) y obtener la cuerda AB.

Si suponemos que

(118) $AG = 2R,$

entonces podemos obtener el valor de ZG como

(119) $ZG = \frac{1}{2}\left(2R - \sqrt{(2R)^2 - BG^2}\right).$

Además, dado que ADG es un triángulo rectángulo, y que el segmento DZ parte del ángulo recto hacia la hipotenusa del triángulo, entonces por *Elem.* VI 8 obtenemos que

(120) los triángulos ADG y DZG son semejantes.

Entonces, por (120) sabemos que

(121) $\frac{AG}{GD} = \frac{GD}{GZ}$

y por lo tanto

(122) $AG \cdot GZ = GD^2$

de donde se deriva

(123) $\sqrt{AG \cdot GZ} = GD$

Así, gracias a (118), (119) y (123) obtenemos que

(124) $\sqrt{2R \cdot \frac{1}{2}\left(2R - \sqrt{(2R)^2 - BG^2}\right)} = GD.$

Así se obtiene la cuerda de arcDG, que es la mitad de arcBG, cuya cuerda es conocida desde el inicio. Como dice Ptolomeo (I, 10; H1 40-41; 53), este procedimiento permite obtener una gran cantidad de cuerdas nuevas. De especial interés son, según Ptolomeo, las cuerdas obtenidas para 6°,[13] 3°, $1\frac{1}{2}°$ y $\frac{3}{4}°$.

De hecho, con las cuerdas obtenidas hasta el tercer nivel, y estos tres –o cuatro, si contamos el de 6°– resultados nuevos, es posible obtener todas las cuerdas con intervalos de $1\frac{1}{2}°$. Para alcanzar estos resultados, Ptolomeo indica un nuevo procedimiento, con el cual es posible obtener la cuerda de un arco que sea la suma de dos arcos cuyas cuerdas ya son conocidas.

Quinto nivel de valores

Para demostrar el teorema que permite llevar adelante el procedimiento, Ptolomeo pide (I, 10; H1 41; 53) construir un círculo con centro en Z y diámetro AD (ver Figura 13). Luego determinar dos arcos sucesivos AB y AG. Después, determinar el diámetro BE y, por último, unir AB, AG, AD, BG, BD, GD, GE y DE.

Por *Elem.* III 31 sabemos que

[13] Es extraño que Ptolomeo indique esto explícitamente, ya que, como vimos, podía obtener la cuerda de 6° a través del procedimiento del tercer nivel.

(125) el triángulo BGE es un triángulo rectángulo

y, por construcción

(126) $BE = 2R.$

Entonces, a través del procedimiento indicado en el segundo nivel, dada la cuerda BG se puede obtener la cuerda GE, por *Elem.* I 47. Así queda la siguiente igualdad:

(127) $GE = \sqrt{(2R)^2 - BG^2}.$

Además sabemos, por construcción, que

(128) $AD = 2R.$

Ahora bien, el triángulo ADB también es un triángulo rectángulo y, por *Elem.* I 47, es posible obtener, dado AB, el valor de BD, de tal modo que

(129) $BD = \sqrt{(2R)^2 - AB^2}.$

Por último, el triángulo BED es también un triángulo rectángulo. Del mismo modo, dado BD, es posible obtener DE, de tal modo que

(130) $DE = \sqrt{(2R)^2 - BD^2}.$

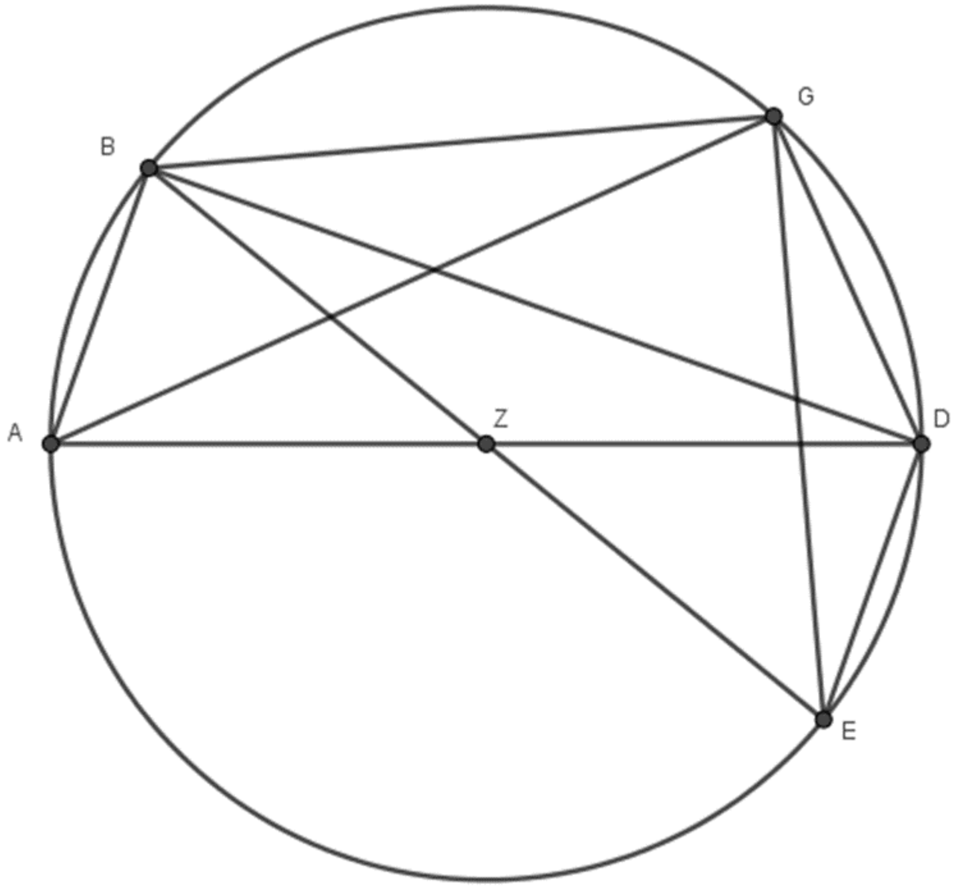

Figura 12. Diagrama para la demostración del teorema que permite obtener la cuerda de un arco que sea la suma de dos arcos cuyas cuerdas ya son conocidas.

Entonces, por (129) y (130) obtenemos que

(131) $$DE = \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{(2R)^2 - AB^2}\right)^2}.$$

Además, por el teorema de Ptolomeo –(95)– sabemos que, para el cuadrilátero BGDE inscrito en el círculo con centro en Z, se da que

(132) $$BD \cdot GE = BG \cdot DE + GD \cdot BE.$$

Así, por (126), (127), (129), (131) obtenemos que

(133) $$\sqrt{(2R)^2 - AB^2} \cdot \sqrt{(2R)^2 - BG^2} = BG \cdot \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{(2R)^2 - AB^2}\right)^2} + GD \cdot 2R.$$

y por lo tanto

(134) $$\frac{\sqrt{(2R)^2 - AB^2} \cdot \sqrt{(2R)^2 - BG^2} - BG \cdot \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{(2R)^2 - AB^2}\right)^2}}{2R} = GD.$$

Por lo tanto

(135) dados AB y BG, está dado también GD.

Pero el triángulo ADG es un triángulo rectángulo. Entonces, por *Elem.* I 47 obtenemos que

(136) $$GA = \sqrt{(2R)^2 - GD^2}.$$

Entonces sabemos que

(137) dado GD, están dado también GA,

de tal modo que

(138) $$GA = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{\sqrt{(2R)^2 - AB^2} \cdot \sqrt{(2R)^2 - BG^2} - BG \cdot \sqrt{(2R)^2 - \left(\sqrt{(2R)^2 - AB^2}\right)^2}}{2R}\right)^2}.$$

Así se obtiene GA, que es la cuerda del arco AG, el cual es la suma de los arcos AB y BG, cuyas cuerdas son las conocidas desde el inicio.

Así Ptolomeo obtiene todos los valores de las cuerdas con intervalos de $1\frac{1}{2}°$.

Sexto nivel de valores

Para completar la tabla de cuerdas, Ptolomeo calcula la cuerda de 1° y, a partir de ella, calcula la de $\frac{1}{2}°$ a través del procedimiento indicado en el cuarto nivel –pág. 125–. Para obtener el valor de la cuerda de 1°, Ptolomeo aplica un método que permite obtener valores de cuerdas aproximando al nivel de precisión que se desee. En ese sentido, el método supone una novedad en la construcción de la tabla. Como dice Ptolomeo (I, 10; H1 43; 54), dado que el valor de la cuerda buscada es muy pequeño, este teorema es útil para el caso en cuestión. Para demostrarlo necesita, en primer lugar, de la demostración de un teorema previo.

Para hacerlo, es necesario construir una figura relativamente compleja.

Ver Figura 14. Determinar un círculo y una cuerda AG. Luego determinar el punto B de tal modo que queden trazadas dos cuerdas desiguales: AB más pequeña y BG más grande. Por *Elem.* VI 3 sabemos cómo es posible bisectar un arco. De ese modo, bisectar el arco arcABG con el segmento BED, de tal modo que E se halle sobre AG, y D sobre la circunferencia. Luego trazar una línea DZ perpendicular a AG, de tal modo que Z se encuentre sobre AG. Unir AD y GD. Luego, trazar un círculo con centro en D, y radio DE. Por último, determinar los puntos H y Θ sobre el círculo con centro en D, de tal modo que H se encuentre sobre AD y Θ sobre la prolongación de DZ.

Ahora bien, por *Elem.* III 27 obtenemos que

(139) $$arcABD = arcAGD$$

y que

(140) $$arcGBD = arcGAD$$

Por construcción sabemos que

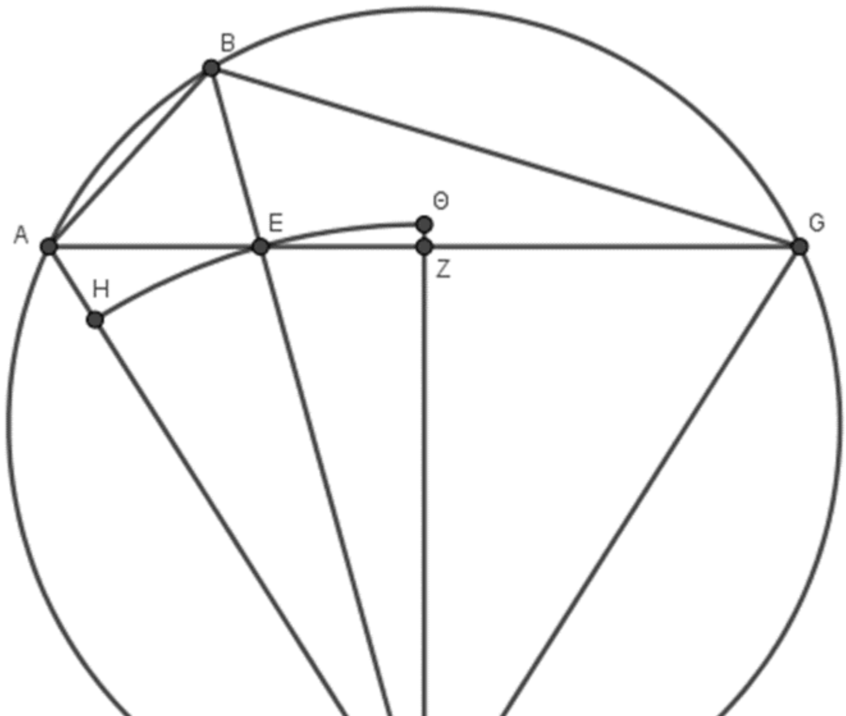

Figura 13. Primer diagrama para hallar la cuerda de 1°.

(141) $arcABD = arcGBD.$

Por lo tanto, por (139), (140) y (141) obtenemos que

(142) $arcAGD = arcGAD.$

Entonces, por (142) y gracias a *Elem.* I 6 sabemos que, en el triángulo AGD

(143) $AD = GD.$

Ahora bien, por construcción se da que

(144) $AB < BG.$

Además, sabemos que

(145) el segmento BE bisecta el arco arcABG que pertenece al triángulo ABD.

Por lo tanto, por *Elem.* VI 3 obtenemos que

(146) $AE < GE.$

Además, por *Elem.* I 32 obtenemos que en el triángulo ABE

(147) $arcBEA + arcEBA + arcBAE = 180°.$

Pero por construcción sabemos que arcDEA es el arco suplementario de arcBEA, por lo tanto

(148) $arcBEA + arcDEA = 180°.$

Entonces, por (147) y (148) obtenemos que

(149) $arcDEA = arcEBA + arcBAE$

Pero por (139) y (142) obtenemos que

(150) $arcABD = arcGAD$

Y por construcción sabemos que

(151) $arcABD = arcEBA.$

Por lo tanto, por (150) y (151) obtenemos que

(152) $arcEBA = arcGAD.$

Por construcción sabemos que

(153) $arcGAD = arcEAD$

por lo tanto, por (152) y (153) obtenemos que

(154) $arcEBA = arcEAD.$

Así, por (149) y (154) llegamos a

(155) $arcDEA = arcEAD + arcBAE.$

Por lo tanto sabemos que

(156) $arcDEA > arcEAD.$

Entonces, por (156) y gracias a *Elem.* I 18 obtenemos que en el triángulo EAD

(157) $AD > ED.$

Además, en el triángulo rectángulo EZD, ED es la hipotenusa, y ZD un cateto, por lo tanto

(158) $ED > ZD.$

Así, por (157) y (158) obtenemos que

(159) $AD > ED > ZD.$

Por lo tanto, como dice Ptolomeo (I, 10; H1 44; 55), se da que

(160) "[...] un círculo trazado con centro en D y radio DE intersecará a AD, y pasará más allá de DZ."

A partir de (160) se deduce que

(161) $sector\ DE\Theta > triángulo\ DEZ$

y que

(162) $triángulo\ DEA > sector\ DEH.$

Por lo tanto, por (161) y (162) se obtiene que

(163) $\frac{triángulo\ DEZ}{triángulo\ DEA} < \frac{sector\ DE\theta}{sector\ DEH}.$

Gracias a *Elem.* VI 1 sabemos que

(164) $\frac{triángulo\ DEZ}{triángulo\ DEA} = \frac{EZ}{EA}$

Por lo tanto, por (163) y (164) obtenemos que

(165) $\frac{EZ}{EA} < \frac{sector\ DE\Theta}{sector\ DEH}.$

Además, en el círculo con centro en D, se da que

(166) $\frac{sector\ DE\theta}{sector\ DEH} = \frac{arc\Theta DE}{arcEDH}.$

Pero por construcción sabemos que

(167) $arc\Theta DE = arcZDE$

y que

(168) $arcEDH = arcEDA.$

Por lo tanto, por (166), (167) y (168) obtenemos que

(169) $\frac{sector\ DE\theta}{sector\ DEH} = \frac{arcZDE}{arcEDA}.$

Entonces por (165) y (169) obtenemos que

(170) $\frac{EZ}{EA} < \frac{arcZDE}{arcEDA}.$

Si aplicamos *componendo* a (170) obtenemos que

(171) $\frac{EZ+EA}{EA} < \frac{arcZDE+arcEDA}{arcEDA}$.

Además, por construcción sabemos que

(172) $EZ + EA = AZ.$

y que

(173) $arcZDE \ + \ arcEDA \ = \ arcZDA.$

Por lo tanto, por (171), (172) y (173) obtenemos que

(174) $\frac{AZ}{EA} < \frac{arcZDA}{arcEDA}$.

A partir de (174) se llega a

(175) $\frac{2 \cdot AZ}{EA} < \frac{2 \cdot arcZDA}{arcEDA}$.

Además, por construcción sabemos que

(176) los triángulos AZD y GZD son triángulos rectángulos

y que

(177) comparten el cateto ZD.

Por lo tanto, por (143), (176) y (177) obtenemos que

(178) los triángulos rectángulos AZD y GZD tienen un cateto y la hipotenusa iguales, por lo que sus catetos restantes son iguales.

Por lo tanto,

(179) $AZ = GZ.$

Además, a partir de (178) se obtiene que los dos triángulos tienen los tres lados iguales, por lo que sus arcos correspondientes también son iguales. Entonces,

(180) $arcZDA \ = \ arcZDG.$

Además por construcción sabemos que

(181) $AZ + GZ = AG$

y que

(182) $arcZDA + arcZDG = arcADG.$

Entonces por (179) y (181) obtenemos que

(183) $AZ + AZ = AG$

y por (180) y (182) obtenemos que

(184) $arcZDA + arcZDA = arcADG.$

Entonces por (175), (183) y (184) obtenemos que

(185) $\frac{AG}{EA} < \frac{arcADG}{arcEDA}$.

Luego, si se aplica *dividendo* a (185) obtenemos que

(186) $\frac{AG-EA}{EA} < \frac{arcADG-arcEDA}{arcEDA}$.

Pero, por construcción, sabemos que

(187) $AG-EA = GE$

y que

(188) $arcADG-arcEDA = arcEDG$.

Entonces, por (186), (187) y (188) obtenemos que

(189) $\frac{GE}{EA} < \frac{arcEDG}{arcEDA}$.

Pero, por *Elem.* VI 3, sabemos que

(190) $\frac{GE}{EA} = \frac{GB}{BA}$.

Además, por construcción sabemos que

(191) $arcGDE = arcGDB$

y que

(192) $arcEDA = arcBDA$.

También sabemos que

(193) $\frac{arcGDB}{arcBDA} = \frac{arcGB}{arcBA}$.

Por (189), (191) y (192) obtenemos que

(194) $\frac{GE}{EA} < \frac{arcBDG}{arcBDA}$.

Entonces, por (193) y (194) obtenemos que

(195) $\frac{GE}{EA} < \frac{arcGB}{arcBA}$.

Una vez que queda demostrado (195), Ptolomeo pide (I, 10; H1 45; 55) construir un círculo, sobre el cual se hallan los puntos A, B y G, de tal modo que la cuerda AB sea menor a la cuerda AG (ver Figura 15).[14]

Por construcción sabemos que

(196) $\frac{AG}{BA} = \frac{arcAG}{arcAB}$.

Ahora bien, supongamos que

(197) $AG = crd(1°)$

[14] En realidad, la nueva figura pedida es la anterior, excepto que se ha simplificado para que queden sólo los elementos necesarios para la última parte de la prueba.

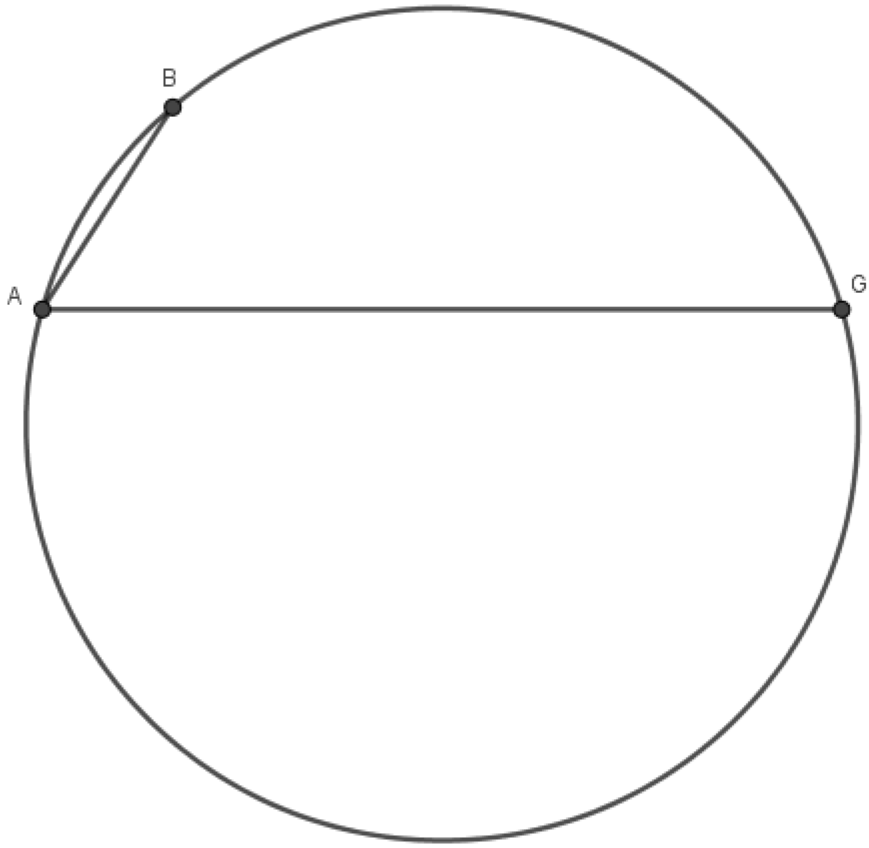

Figura 14. Segundo diagrama para hallar la cuerda de 1°.

y que

(198) $AB = crd(\frac{3}{4}°)$.

Entonces se da que

(199) $arcAG = \frac{4}{3} \cdot arcAB$.

A partir de (199) Ptolomeo deduce que

(200) AG< $\frac{4}{3} \cdot AB$.

El paso de (199) a (200) es realizado en el *Almagesto* sin explicación alguna. La justificación, sin embargo, se halla en la conclusión a la que toda la demostración previa apunta –(195)–: a medida que un arco crece, la cuerda correspondiente también crece, aunque a un ritmo menor. Esto significa que si tengo una cuerda *x* que es menor a una cuerda *y*, y quiero igualarlas, siempre va a ser necesario multiplicar la cuerda *x* por un múltiplo menor que el necesario para igualar al arco *x* correspondiente con el arco *y*. En el caso de que utilice el mismo múltiplo que el usado para igualar las cuerdas, entonces la relación final no va a ser de igualdad, sino de desigualdad. En el caso de los pasos (199) y (200), se multiplica al arco AB y a la cuerda AB por el mismo múltiplo, a saber, $\frac{4}{3}$. En el caso del arco, esto significa que va a llegarse a una igualdad con el arco AG, dado que arcAG representa 1°, y arcAB representa $\frac{3}{4}$°. Pero en el caso de la cuerda, la diferencia entre las cuerdas correspondientes no es tan grande como aquélla que hay entre los arcos, por lo que si se multiplica a AB por el mismo número se va a llegar a una desigualdad en la que el miembro que contiene a AB va a ser mayor que el que contiene a AG.

Entonces, por (197), (198) y (200) obtenemos que

(201) $crd(1°) < \frac{4}{3} crd(\frac{3}{4}°)$.

Ahora bien, en el cuarto nivel Ptolomeo había obtenido el valor de la cuerda de $\frac{3}{4}°$ la cual es, dado un radio de 60 partes para el círculo, 0;47,8 partes. Por lo cual

(202) $crd(1°) < \frac{4}{3} \cdot 0;47{,}8^p$

a partir de lo cual se obtiene que, con aproximación

(203) $crd(1°) < 1;2{,}50^p$.

Luego Ptolomeo lleva adelante el mismo procedimiento, sólo que ahora suponiendo que

(204) $AG = crd(1\frac{1}{2}°)$

y que

(205) $AB = crd(1°)$.

Si esto es así, llegamos a una relación entre AG y AB tal que

(206) $crd(1\frac{1}{2}°) < \frac{3}{2} crd(1°)$

y por lo tanto

(207) $\frac{2}{3} crd(1\frac{1}{2}°) < crd(1°)$.

Ptolomeo había obtenido, también entre los resultados del cuarto nivel, el valor de la cuerda de $1\frac{1}{2}°$, de tal modo que para un radio de 60^p en el círculo, el valor de la cuerda es $1;34{,}15^p$. Por lo cual

(208) $\frac{2}{3} \cdot 1;34{,}15^p < crd(1°)$

A partir de lo cual se obtiene

(209) $1;2{,}50^p < crd(1°)$.

En (203) y (209) encontramos que crd (1°) es menor y mayor que 1;2,50p, para un círculo con radio 60p. Esto es posible, por supuesto, sólo porque Ptolomeo ha anotado hasta la segunda posición sexagesimal. De hecho, $\frac{4}{3} \cdot 0;47{,}8^p = 1;2{,}50{,}39{,}59{,}59$, mientras que $\frac{2}{3} \cdot 1;34{,}15^p = 1;2{,}50{,}0{,}0$. Esos son, pues, los dos valores límite para crd (1°). Ptolomeo, como vimos, simplifica la expresión, y dice que "[...] dado que se ha mostrado que la cuerda de 1° es tanto mayor como menor que la misma cantidad, podemos establecerla como, aproximadamente, 1;2,50^p, donde el diámetro es 120^p." (I, 10; H1 46; 56).

Luego, conociendo crd (1°), Ptolomeo es capaz de calcular el valor de la cuerda de $\frac{1}{2}°$, a través del procedimiento del cuarto nivel de valores, esto es, calcular la cuerda de un arco que es la mitad de otro arco cuya cuerda ya es conocida.

Dado que Ptolomeo ya conocía los valores de todas las cuerdas con intervalos de $1\frac{1}{2}°$, este conocimiento adicional de la cuerda de $\frac{1}{2}°$ es todo lo que necesita para completar toda la tabla que ha diseñado. Esto es porque así tiene los procedimientos indicados en el tercero y quinto nivel de valores, con los cuales puede obtener las cuerdas de arcos que sean el resultado de sumar o restar dos arcos cuyas cuerdas ya se conocen. Lo único que debe hacer es ir aplicando estos procedimientos sumando o restando $\frac{1}{2}°$ a los arcos cuyas cuerdas ya se conocen.

5. Conclusión

La composición de la tabla de cuerdas en el *Almagesto* era, presumiblemente, un trabajo que Ptolomeo no esperaba que se repitiera en cada ocasión en la que una obra con argumentos geométricos lo requiriese. En ese sentido, la sección en la que explica los algoritmos que hay que seguir para calcular los diversos valores de la tabla puede parecer, inicialmente, una parte innecesaria en lo que, después de todo, es una obra astronómica. Es posible, entonces, que la intención de Ptolomeo haya sido meramente la de justificar su propia tabla, dando la posibilidad a los lectores más entrenados de revisar los valores que él daba. O tal vez la inclusión de la sección argumentativa en este capítulo trigonométrico era un lugar común en las obras astronómicas de la época. Dado el éxito del *Almagesto*, las obras contemporáneas dejaron de ser copiadas, y por tanto no llegaron a nosotros. Sea cual sea la intención original que tuvo Ptolomeo al incluir la sección en la obra, es para nosotros una ventana privilegiada para asomarnos a los orígenes de la trigonometría griega. Es mi esperanza que este trabajo técnico sea una introducción a la misma, y un texto que ayude a enfrentarse de una manera más amable con la fuente original.

Referencias

Aristarco de Samos. (2020). *Acerca de los tamaños y las distancias del Sol y la Luna.* (R. Buzón, & C. Carman, Trads.) Barcelona: Universitat de Barcelona Edicions.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puerta Castaños, Trad.) Madrid: Gredos.

Neugebauer, O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (Vol. I). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: with annotation and new commentary by Alexander Jones.* (A. Jones, Ed.) New York: Springer.

Ptolemy, C. (1984). Almagest. En G. Toomer, *Ptolemy´s Almagest* (G. Toomer, Trad., pp. 27-659). Princeton: Princeton University Press.

Ptolomeo, C. (1898-1903). *Syntaxis Mathematica* (J. L. Heiberg, Ed.). Leipzig: Teubner.

Recio, G. L. (2018). La longitud lunar en el Almagesto de Ptolomeo: el primer modelo. *Epistemología e Historia de la Ciencia, 3*(1), 32-60.

Van Brummelen, G. (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.