La antinomia del Sr. Gödel

Chaïm Perelman[1]

Recibido: 19 de agosto de 2019
Aceptado: 12 de septiembre de 2019

En un artículo que se ha vuelto célebre[2], el Sr. Gödel se propuso demostrar que dentro de un sistema analítico, como el de los *Principia Mathematica*[3], es posible construir proposiciones indeterminables [*indéterminables*].

Se entiende por proposición indeterminable una proposición tal que no se puede demostrar ni la verdad de la afirmación, ni la verdad de la negación de esa proposición. Para demostrar que una proposición p es indeterminable, es necesario reducir a una contradicción la hipótesis de que p es demostrable y la hipótesis de que no-p es demostrable. Para fijar la terminología, digamos que una expresión *demostrable* es verdadera; por transposición, una expresión falsa es *indemostrable*.

Para construir una proposición indeterminable en el interior de un sistema analítico, el Sr. Gödel aritmetiza las fórmulas de la lógica, es decir, hace corresponder a cada signo lógico un número natural determinado; de manera que cada fórmula se pueda expresar utilizando una secuencia finita de números naturales, y cada demostración utilizando una secuencia finita de secuencias finitas de números naturales. Demostrar una proposición equivale a construir una secuencia de secuencias de números naturales tal que la última secuencia expresa la proposición demostrada. El Sr. Gödel muestra que es posible construir, utilizando símbolos de los *Principia Mathematica*, una fórmula $F(v)$ cuyo significado sería "v es una fórmula demostrable".

Admitido esto, la construcción de una proposición indeterminable es relativamente fácil.

Sea un signo de función proposicional; consistirá en una secuencia de números naturales que contiene una variable, es decir, un lugar vacío, donde podemos poner un argumento cualquiera, que será un número natural. Como todas las fórmulas de este cálculo consisten en secuencias finitas de números, el número de fórmulas diferentes que se podría construir de esta manera no puede exceder el orden de lo numerable, y por lo tanto es posible numerar estas fórmulas, es decir, acompañar cada una de ellas con un índice que será un número natural.

Si, en las diversas funciones que acabamos de numerar, consideramos como el valor de la variable al signo numérico que sirve de índice para cada una de ellas, obtendremos secuencias de números naturales, algunas de las cuales serán demostrables

---

[1] Aspirante del F.N.R.S.
Originalmente publicado como Perelman, Ch. (1936). "L'antinomie de M. Gödel", Bulletins de l'Académie royale de Belgique (Classe de Sciences), 6, pp. 730-736.
Traducido por Carlos Alejandro Oller (carlos.a.oller@gmail.com).

[2] Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Aus den *Monatsheften für Mathematik und Physik*, XXXVIIIn v., 1er cahier, Leipzig, 1931.

[3] Whitehead A. y Russell, B., *Principia Mathematica*, 2a ed., Cambridge, 1925.

Perelman, Chaïm (2019). La antinomia del Sr. Gödel. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 4(1), 88-92. ISSN: 2525-1198 (https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/index)

y otras que no lo serán. Este hecho permite distinguir dos tipos de índices: los que acompañan funciones ligadas a expresiones demostrables, cuando le damos a la variable su índice como valor, y aquellos que no tienen esta propiedad. *Estos últimos índices se pueden agrupar en un conjunto E*. Decir que "*n* es un elemento de E" será por lo tanto equivalente a "es falso que al dar a la variable de la función $_{\mathrm{n}}\mathrm{F}x$ el valor *n* se obtenga una expresión demostrable".

Téngase en cuenta que la función proposicional "*n* es un elemento de E" también tiene un índice, digamos *q*; por lo tanto, podemos designarla con el símbolo $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}x$. Al introducir este símbolo en la última equivalencia, tenemos que "*n* satisface $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}x$" equivale a "es falso que *n* satisface $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}x$ sea una expresión demostrable", o nuevamente: $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}n$ equivale a "$_{\mathrm{n}}\mathrm{F}n$ es una expresión indemostrable".

A partir de esta última equivalencia, es fácil demostrar que $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ es una expresión indeterminable, es decir que la hipótesis de su demostrabilidad, como también la de la demostrabilidad de su negación, conduce a una contradicción.

En efecto, supongamos que $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ sea demostrable. En ese caso, $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ será una expresión verdadera, así como la expresión que es equivalente a ella: "$_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ es una expresión indemostrable". La hipótesis de la demostrabilidad de $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ por lo tanto implica su negación, y debe por lo tanto ser rechazada.

Supongamos que no-$_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ es demostrable. Ella será pues verdadera, así como la expresión que es equivalente a ella "es falso que $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ sea una expresión indemostrable". Ahora bien, esto equivale a afirmar la demostrabilidad de $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$. Como la hipótesis de la demostrabilidad de no-$_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ también implica su negación, la expresión $_{\mathrm{q}}\mathrm{F}q$ debe por lo tanto ser considerada indeterminable.

Examinemos más de cerca el razonamiento del Sr. Gödel. Un estudio formal de las hipótesis que se encuentran en su base nos convencerá de que el resultado al que llega el Sr. Gödel es mucho más modesto de lo que parece a primera vista. Veremos, en efecto, que el único resultado del artículo examinado es la construcción de una nueva antinomia, que se añadirá a las ya clásicas de la lógica y la teoría de conjuntos. La antinomia del Sr. Gödel tiene exactamente la misma estructura que estas últimas y es el resultado, como estas, de una falsa equivalencia planteada en las premisas[4].

Todo el razonamiento del Sr. Gödel gira en torno a una definición fundamental, la del conjunto E. Un índice forma parte de él si la expresión, obtenida al reemplazar la variable de la función por el índice de esta última, es indemostrable. Esto nos permite plantear la equivalencia definitoria del conjunto E:

$$(n) \cdot \mathrm{n} \in \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{\mathrm{n}}\mathrm{F}n.$$

($\sim \cdot$ Dem $_{\mathrm{n}}\mathrm{F}n$ se lee: es falso que $_{\mathrm{n}}\mathrm{F}n$ sea demostrable.)

Como la expresión $n \in \mathrm{E}$ designa una función cuyo índice es *q*, se obtiene, por simple reemplazo en la equivalencia anterior,

$$(n) \cdot {}_{\mathrm{q}}\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{\mathrm{n}}\mathrm{F}n.$$

[4] Ver Ch. Perelman, *Les Paradoxes de la Logique*, en *Mind*, abril 1936, vol. XLV.

Esta equivalencia se afirma para todos los valores de *n*, y, por lo tanto, también debe ser verdadera si *n* es reemplazado por uno de sus valores, a saber *q*:

$$ {}_{q}Fq \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \text{Dem } {}_{q}Fq; $$

ahora bien, esta última fórmula afirma la equivalencia de una expresión con la afirmación de su indemostrabilidad. Se ve la analogía de este resultado con la paradoja del mentiroso, donde se afirma, en una expresión, la falsedad de esta. Sin embargo, el Sr. Gödel parece llegar, no a una paradoja, sino a un valioso resultado. En efecto, mientras que en las paradojas se obtiene la equivalencia de una proposición y de su negación, en este caso se llega a demostrar la equivalencia de una proposición, no con su negación, sino con la afirmación de su indemostrabilidad. Ahora bien, este resultado no parece, a primera vista, contradictorio; en lugar de colocarlo entre las paradojas, se lo consideró un descubrimiento matemático de gran importancia.

En las páginas que siguen demostraremos que de la equivalencia fundamental de la que parte el Sr. Gödel es posible deducir paradojas que establecen la equivalencia de una proposición y de su negación. A su vez, demostraremos que el razonamiento del Sr. Gödel se basa en premisas falsas, como las otras antinomias y que, por lo tanto, no nos debe sorprender que el Sr. Gödel logre un resultado extraordinario, considerando que es fácil obtener, a partir de estas mismas premisas, un resultado contradictorio.

Consideremos la equivalencia

$$ (n) \cdot n \in E \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \text{Dem } {}_{n}Fn. \qquad (1) $$

Apliquemos el principio de transposición:

$$ (n) \cdot \sim n \in E \cdot \equiv \cdot \text{Dem } {}_{n}Fn. \qquad (2) $$

En lo que sigue, transformaremos estas primeras equivalencias para hacer a su segundo miembro equivalente, no a la verdad del primero, sino a su demostrabilidad. Comenzaremos por transformar la equivalencia (2).

Téngase en cuenta que el conjunto E se ha definido como el de todos los *n*, tal que $\sim \cdot$ Dem ${}_{n}Fn$. Su complemento será el conjunto de todos los *n*, tal que Dem ${}_{n}Fn$. Resulta de ello que si, para una *n* dada, ${}_{n}Fn$ es demostrable, la expresión $\sim n \in E$ no solo es verdadera, sino que también es demostrable; bastará, de hecho, con completar la demostración de ${}_{n}Fn$ con la definición del conjunto E para demostrar $\sim n \in E$.

La forma en que se ha introducido el conjunto E nos permite entonces afirmar

$$ (n). \text{ Dem } {}_{n}Fn \supset \text{Dem} \sim n \in E. \qquad (3) $$

Por otra parte, dado que cualquier expresión demostrable es verdadera, tenemos

$$ (n). \text{ Dem} \sim n \in E \supset \sim n \in E. \qquad (4) $$

De la equivalencia (2), podemos obtener

$$ (n) \cdot \sim n \in E \supset \text{Dem } {}_{n}Fn. \qquad (5) $$

A partir de (4) y (5) podemos obtener, por silogismo,

$$ (n). \text{ Dem} \sim n \in E \supset \text{Dem } {}_{n}Fn, \qquad (6) $$

podemos deducir de (3) y (6)

$(n) \cdot \mathrm{Dem} \sim n \in \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{n}\mathrm{F}n.$ (7)

Dado que $n \in \mathrm{E}$ puede escribirse ${}_{q}\mathrm{F}n$, la proposición (7) es equivalente a

$(n) \cdot \mathrm{Dem} \sim {}_{q}\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{n}\mathrm{F}n.$ (8)

Aplicando a la proposición (1) el mismo razonamiento que el que nos permitió llegar a la proposición (8), a partir de la equivalencia (2), obtenemos la equivalencia

$(n) \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{q}\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{n}\mathrm{F}n.$ (9)

Para el argumento q, las equivalencias (8) y (9) se convierten en

$\mathrm{Dem} \sim {}_{q}\mathrm{F}q \cdot \equiv \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{n}\mathrm{F}q$ (10)

y

$\mathrm{Dem}\ {}_{q}\mathrm{F}q \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{Dem}\ {}_{q}\mathrm{F}q.$ (11)

Considerando las proposiciones (10) y (11), que hemos podido deducir fácilmente de la definición del conjunto E, propuesta por el Sr. Gödel, no nos sorprenderá el resultado obtenido por él, que explota solo en pequeña medida las posibilidades que ella ofrecía. Permite, en efecto, demostrar, además de la existencia de una proposición indeterminable, la de una proposición cuya verdad y falsedad es posible demostrar al mismo tiempo, y la de una proposición cuya demostrabilidad equivale a su indemostrabilidad. Nos encontramos inmersos en las paradojas. Esta cosecha de resultados, sin embargo, es más rica que la obtenida en las paradojas clásicas donde simplemente mostramos que la verdad de una proposición es equivalente a su falsedad; en efecto, el concepto de demostrabilidad permite obtener cuatro posibilidades para una proposición dada: esta puede ser demostrable o indemostrable, y lo mismo es cierto de su negación.

¿Cómo hemos podido demostrar las proposiciones (10) y (11), cuya naturaleza contradictoria es sin embargo manifiesta? Han sido deducidas de las proposiciones (8) y (9), que constituyen falsas equivalencias. La primera afirma la equivalencia de la demostrabilidad de una función y la de su negación, y esto para todos los valores de la variable; en la segunda proposición, se afirma la equivalencia formal de la demostrabilidad de una función y la de su indemostrabilidad. El hecho de que en el primer miembro de estas equivalencias se encuentre en lugar de la variable, uno de los argumentos de la función permite limitar la contradicción; pero esta estalla cuando introducimos el mismo argumento en el segundo miembro de la equivalencia.

Como estas falsas equivalencias se deducen, con la mayor facilidad, a partir de la definición del conjunto E, es esta la que debe ser cuestionada. En un examen más detallado, en efecto, uno se da cuenta de que ella consiste en una falsa equivalencia que el principio de contradicción nos obliga a rechazar.

Al decir en su artículo que su demostración está emparentada con las paradojas, el Sr. Gödel dijo muy poco. Es, de hecho, una nueva antinomia la que acababa de construir, que tiene igualmente la misma estructura que las paradojas conocidas. Y, al igual que las paradojas clásicas, la que el Sr. Gödel construyó en su célebre artículo resulta de una contradicción postulada en las premisas.

Nota del traductor

Chaïm Perelman (Varsovia, 1912 - Bruselas, 1984) es celebrado por el aporte que realizó a la teoría de la argumentación contemporánea con su libro *Teoría de la argumentación*: *La nueva retórica* (1958), escrito con la colaboración de Lucie Olbrechts-Tyteca. Sin embargo, un aspecto poco estudiado de la obra de Perelman es el papel que tuvo su artículo de 1936 "L'antinomie de M. Gödel" en la recepción del teorema de incompletitud de Gödel de 1931(Dawson, 1984). En ese artículo sostiene nuestro autor que, en realidad, Gödel construye una paradoja que tiene la misma estructura que la que, según Perelman, subyace a las paradojas de la lógica y la teoría de conjuntos. Aunque la crítica de Perelman está errada, su artículo llamó la atención y mereció la respuesta de lógicos notables como Stephen Kleene (Kleene, 1937a, 1937b) y Kurt Grelling (Grelling, 1937), entre otros (Helmer, 1937) (Rosser, 1938).

1. Referencias

Dawson, J. W. Jr. (1984). The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Volume Two: Symposia and Invited Papers*, pp. 253-27.

Grelling, K. (1937). Gibt es eine Gödelsche Antinomie?, *Theoria*, 3, pp. 297-306.

Helmer, O. (1937). Perelman versus Gödel, *Mind*, 46, pp. 58-60.

Kleene, S. C. (1937a). Review of Perelman (1936), *Journal of Symbolic Logic*, 2, pp. 40-41.

Kleene, S. C. (1937b). Review of Helmer (1937), *Journal of Symbolic Logic*, 2, pp. 48-49.

Rosser, B. (1938). Review of Grelling (1937), *Journal of Symbolic Logic*, 3, p. 86.