Hermann Weyl y el gauge

Pedro Walter Lamberti[1] y Víctor Rubén Rodríguez[2]

Recibido: 21 de febrero de 2019
Aceptado en versión revisada: 13 de mayo de 2019

Resumen. Se hace en este trabajo una aproximación conceptual a la noción de gauge introducida por Hermann Weyl, contextualizada en su origen clásico en la segunda década del siglo XX, con un breve comentario sobre su posterior inserción en la mecánica cuántica de la década siguiente, cuando el área estaba consolidándose. Considerando que es conveniente dar para ello un ámbito adecuado en el que es importante atender al estilo de pensamiento de su autor, se presenta un breve perfil del mismo. Se atiende a sus intereses físicos y filosóficos sin dejar de lado su principal tarea profesional como matemático. El punto de vista adoptado sugiere que no es posible comprender en su integridad el pensamiento de este autor si no se contemplan sus facetas relacionadas con estos tres grandes campos disciplinares. Aunque este objetivo en su plenitud escapa por su extensión y sutilezas a este trabajo, se supone que una aproximación introductoria al caso histórico puede contribuir a una mejor comprensión de su alcance posterior, tal como aparece en las numerosas aplicaciones de este concepto en investigaciones contemporáneas vinculadas con la física de partículas elementales.

Palabras clave: Gauge – H. Weyl – filosofía de la matemática – filosofía de la física.

Title: Hermann Weyl and the gauge

Abstract. A conceptual approach to the notion of gauge, mainly due to Hermann Weyl, is developed in this work. Its classical origin in the second decade of the XX century is particularly emphasized, with a brief comment on its posterior insertion in quantum mechanics during the following decade, when this area was emerging. Considering that it is convenient for this purpose to give an adequate framework in which the style of thought of the author is taken into account, a brief profile of it is presented. His physical and philosophical motivations are expounded, but attending to the fact that his main work has been as a professional mathematician. The adopted point of view suggests that it is not possible to comprehend the integrity of his thought without analyzing the aspects related to these three big disciplinary fields. Even though this integral goal is out of the scope of this work, it is assumed that an introduction to the historical case may contribute to a better understanding of its later use, such as it figures in numerous applications of this concept in contemporary researches related to elementary particle physics.

Keywords: Gauge – H. Weyl – philosophy of mathematics – philosophy of physics.

[1] Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Universidad Nacional de Córdoba.
pwlamberti@gmail.com
[2] Universidad Nacional de Córdoba.
gauchovrr@gmail.com

Lamberti, Pedro Walter y Rodríguez, Víctor Rubén (2019). Hermann Weyl y el gauge. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 3(2), 6-16. ISSN: 2525-1198
(https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/index)

"[gauge] is the most pressing problem in current philosophy of physics"
M. Redhead

"Gauge theory exemplifies one of the most profound mysteries of nature"
D. Gross

1. Introducción

Estimamos que la reflexión del premio Nobel D. Gross citada arriba, (Gross, 1992), ilustra la principal razón por la que este tema se ha transformado en una de las grandes líneas de investigación en física y filosofía de la física contemporánea. El concepto de gauge, (calibre o medida, en español) se usa en diferentes contextos en la física teórica, estando todos ellos relacionados entre sí. La simetría de gauge hace referencia a la propiedad de una teoría que permanece invariante frente a ciertos cambios de las variables usadas en su formulación; las transformaciones de medida son precisamente esos cambios en las variables y las teorías de gauge son la formulación matemática de esas ideas. Este concepto se remonta a los albores de la teoría electromagnética, (Rodríguez-Lamberti, 2013) y juega hoy en día un rol central en la formulación de las teorías de las interacciones fundamentales de la naturaleza, como las que han llevado al modelo estándar de partículas elementales. De hecho, el electromagnetismo maxwelliano es la primera teoría de gauge. En los comienzos del siglo XX y siguiendo los pasos de la formulación geométrica de la relatividad general, la idea de gauge tomó un nuevo impulso y uno de los encargados de dar esos primeros pasos fue Hermann Weyl. Por ello se lo asocia con el nacimiento de esta noción. Según comenta C. N. Yang (2005), en 1918-1919, en tres artículos relacionados, Weyl articuló este concepto. En los dos primeros, de 1918, usó el término *Masstab Invarianz*; en el tercero, de 1919, usó la expresión Eich Invarianz. La traducción inglesa de *Eich Invarianz* fue 'calibration invariance' en la traducción de H. Brose de 1921 de la cuarta edición del libro de Weyl (1952), *Space, Time and Matter*. La traducción 'gauge invariance' no fue usada, se sospecha, hasta después del artículo de Weyl de 1929. Apareció (probablemente no por primera vez) en un artículo de Dirac de 1931.

Nuestra intención aquí es analizar algunos aspectos de este episodio temprano, aún clásico, ya que este concepto recibe luego un fuerte respaldo por parte de la entonces naciente mecánica cuántica en la década de 1920. Si bien este artículo se focaliza principalmente en el desarrollo de las ideas en juego alrededor de 1918, en la década siguiente recibe el aporte conceptual de otros nombres interesados en la física cuántica. Esto llevó a su vez a Weyl (1997) a una reformulación de su concepto y hoy este trabajo se ha transformado en una referencia clásica. Además, este último enfoque significó de algún modo una reivindicación de Weyl en su anterior disputa con Einstein, relacionada con los trabajos de 1918 e inmediatamente posteriores, donde fue parcialmente derrotado en sus argumentos. Con respecto a las críticas de Einstein, haremos una breve descripción más adelante. Puede apreciarse en esta polémica tanto el profundo sentido físico de Einstein, como el sutil ideal de matematización esgrimido por Weyl. No en vano Einstein consideró en esa época al trabajo de Weyl como un auténtico golpe de genio.

Aquí analizaremos uno de los artículos de 1918. Por otro lado, consideraremos el nacimiento de este concepto como parte de un contexto más general que incluye otras facetas del pensamiento del autor. Desde nuestro punto de vista, esto permite una mejor comprensión del significado del gauge y también de las motivaciones que hicieron posible su emergencia. No se nos escapa que existe una vasta bibliografía al respecto (e.g. Jackson-Okun, 2001; Strautmann, 1996; Yang, 1987), por eso la eventual originalidad del trabajo reside en la ponderación al menos parcial de esta literatura en contraposición con ese trabajo original del autor y la interpretación de algunas de sus consecuencias. A este fin presentamos una breve descripción de su pensamiento y su obra.

2. Un acercamiento a Weyl

Hermann Weyl (1885-1955) fue un pensador polifacético dotado de una extraña profundidad. Fue un gran matemático –alumno de Hilbert en Gotinga– que tuvo también una gran pasión por la física y que dedicó buena parte de su vida a la filosofía. Sostenemos aquí que no es posible captar su obra en toda su magnitud si no se contemplan estas otras tradiciones intelectuales. Si bien un análisis integral escapa a este trabajo, hay un escenario que no queremos dejar de lado aquí: el extraordinario bagaje conceptual de su autor, el cual parece estar presente en la época en que abordó este tema. Se interesó en el pensamiento de Husserl, con quien estuvo ligado por lazos de diversa índole. Se conservan cuatro cartas de su relación con él. Quien llegó a ser su esposa, fue alumna de Husserl. La fenomenología como el pensamiento alemán de los siglos xxviii y xix formaron parte de su formación cultural. También es de destacar la influencia que sobre él tuvo el pensamiento de Fichte. Es de señalar que estudiosos del tema, como Scholz (1995) y Ryckman (2005), han marcado conexiones entre este perfil filosófico y sus pensamientos sobre los fundamentos de la matemática. Este último es un tema al que dedicó buena energía y varios escritos.

Para la comunidad matemática su perfil y obra lo ubican en un lugar realmente distinguido. En sus últimos años en Princeton fue reconocido como un gran matemático. No puede decirse lo mismo con respecto a sus aportes a la física. La profundidad y originalidad de sus ideas tardaron un buen tiempo en ser debidamente apreciadas. Actualmente se considera que la contribución de Weyl a la física ha sido notable y que hay numerosas ideas en física teórica que tienen su sello. Su extenso trabajo sobre grupos y simetría da cuenta de esto.

En la Introducción de F. Wilczek, en Weyl (2009a), a la nueva edición de *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, cita a Weyl reflexionando que "Yo estaba obligado por la literatura alemana y por la tradición filosófica en la que crecí" (Weyl, 2009a, p. vii)[3] y señala que este libro podría ser la última expresión de una tradición cosmopolita que incluye a pensadores de la talla de Descartes, Leibniz, Hume y Kant. Como este autor señala, hay también una dimensión estética en la obra de Weyl que es digna de consideración. "Mi trabajo trató de unir la verdad con lo bello, pero cuando tuve

[3] Las citas cuyo original está en otro idioma son traducción nuestra.

que elegir uno o lo otro, usualmente elegí lo bello" (Dyson, 1956). Por supuesto, hay gente que no está de acuerdo con esta lectura de la actividad científica, pero eso es materia de otro trabajo.

Su trabajo matemático entre 1923 y 1938 lo llevó a incursionar en la teoría de grupos, en especial en los grupos de Lie. Al respecto deben destacarse sus dos grandes obras, *Theory of groups and quantum mechanics,* Weyl (1950), y *The classical groups*, Weyl (1939), así como numerosos trabajos menores. Como comentario lateral señalamos que, debido a la importancia que jugaron en su obra las nociones de simetría e invariancia, su relación con Emmy Noether, no será parte de este trabajo; para alguien eventualmente interesado en este punto, remitimos a (Roquette, 2018). Solo nos permitimos citar aquí una breve reflexión suya que refleja la profundidad de su pensamiento sobre este particular: "En contraste con el oriente, el arte occidental, como la vida misma, está inclinado a mitigar, a suavizar, a modificar, aún a romper la simetría estricta. Pero rara vez es la asimetría simplemente ausencia de simetría" (Weyl, 1958). Lamentablemente Weyl no pudo disfrutar del trabajo de los físicos Lee y Yang sobre la no conservación de la paridad, porque murió poco tiempo antes.

Volviendo a la matemática, sus incursiones en este campo abarcan un abanico temático considerablemente amplio (ver por ejemplo, Wells, 1987; Tent, 2008). Hizo aportes en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, en la teoría de números, en geometría, en álgebra y teoría de grupos, y siempre le preocuparon los fundamentos de la matemática. Es de destacar su enfoque sobre las propiedades espectrales de los operadores diferenciales. No hay que olvidar que bebió del manantial directo de Hilbert en Gotinga, pero en lo que hace a fundamentos de la matemática también quedó fuertemente incentivado por el intuicionismo de Brouwer. Allí siempre estuvo presente el tema del infinito, en lo grande y en lo pequeño. Para él, la matemática está profundamente impregnada de la noción de infinito. Luego diremos algo sobre su geometría infinitesimal, que es una consecuencia de estas reflexiones.

Su idea del continuo es fruto de esta temprana preocupación. Durante sus años de juventud, osciló entre una postura cuasi-constructivista y una adherencia al pensamiento intuicionista de Brouwer, pero en general, no dejó de considerar algunos aspectos rescatables del tratamiento de Hilbert con su enfoque formalista. Tuvo su distancia respecto del continuo con el enfoque basado en la teoría de conjuntos, pero podría decirse que no logró dar con una posición totalmente definida sobre este aspecto de los fundamentos a lo largo de toda su vida. Desde la década de 1920, vuelve a rescatar de Hilbert una concepción pragmático-formalista más próxima a la práctica de los matemáticos. Hay excelentes escritos de otros autores sobre estos puntos (e.g. Feferman, 2000; Mancosu, 1998). Pero no queremos dejar de citar su propio trabajo sobre el continuo, Weyl, (1918).

Considerando todo esto, nos parece acertada la opinión de Michael Atiyah, "en retrospectiva uno podría casi decir que él [Weyl] definió la agenda y suministró el andamiaje de trabajo para lo que siguió" (Atiyah, 2003, p. 321). En este sentido, no se caracterizó por un enfoque especializado. Como Weyl decía, en la matemática misma hay un carácter que está más cerca al arte creativo libre. También se ha dicho "ningún otro matemático podría reclamar haber iniciado más teorías que las que están ahora siendo explotadas", (Atiyah, 2003, p. 331).

En 1913 aparece su notable obra sobre *The Concept of a Riemann Surface* (Weyl, 1955). Esta obra influyó en el destino futuro de toda el área. Esto en realidad es algo difícil de precisar, pero lo que es claro en relación con el período que nos ocupa es la incidencia de sus ideas sobre la geometría infinitesimal, un aspecto que jugará un rol importante en su interpretación de la obra de Riemann. Sobre su trabajo de 1913, el matemático Bieberbach opinó elogiosamente que fue Weyl quien puso todo en orden en la teoría de funciones de Riemann (Remmert, 1998). En esta obra el joven Weyl muestra la madurez de su pensamiento y el libro ha llegado a ser una obra de referencia. A pesar del enorme trabajo de Riemann, fue Weyl quien estableció el andamiaje y la forma de las futuras investigaciones. Como expresara Atiyah, sin el aporte de Weyl sobre las superficies de Riemann, es imposible imaginar la teoría de Hodge de las formas armónicas (Atiyah, 2003, p. 7). Todo esto refleja una cultura matemática notablemente amplia y también profunda.

Pero Weyl quedó impactado por el trabajo de Einstein sobre la relatividad general y su libro de 1918, *Space, Time, Matter* (Weyl, 1952), fue elogiado por Einstein como “una armoniosa sinfonía” por sus sutilezas y tratamiento global del tema. Por ello se ha enfatizado su particular modo de asociar la matemática con la física y la epistemología. En cualquier caso, Einstein obtuvo una victoria parcial en la discusión que se extendió durante cierto tiempo en relación con el alcance de las ideas de Weyl (1918) sobre el rol del gauge en la geometría del espacio-tiempo. Finalmente, gracias a la mecánica cuántica, el concepto de gauge fue reivindicado, aunque bajo otra interpretación, como veremos más adelante. De un modo indirecto, esto abrió las puertas al concepto elaborado posteriormente por vía de una descripción no abeliana al ámbito que se conoce actualmente como ‘teorías de Yang-Mills’. Éste es un terreno muy activo de investigación.

En síntesis, puede decirse que este pensador fue un navegante solitario en aguas de tradiciones intelectuales muy diferentes. Si bien la matemática fue su disciplina madre –su profesión–, nunca abandonó sus otros intereses, especialmente la física y la filosofía. Prueba de ello son sus escritos tardíos, incluído su *Insight and reflection* del año de su muerte (Weyl, 2009b). En este trabajo, como en varios anteriores, se puede apreciar la influencia que ejercieron sobre él Fichte y Husserl. Su gran cultura sobre Kant y su conocimiento de la filosofía occidental se despliegan por otra parte en varios de sus escritos.

3. El trabajo de 1918

En el año 1918, H. Weyl publica en la revista *Sitzungsberichte der Königlich preussischen akademie der Wissenschaften* (Actas de la Real Academia Prusiana de Ciencias), el trabajo titulado “Gravitation und Elektrizität” (Weyl, 1918). El propósito que Weyl siguió con este trabajo ha sido motivo de discusiones entre los historiadores de la ciencia. Un punto sobre el que hay bastante consenso es que Weyl trató de hacer una “mejora” de los trabajos de Einstein sobre la Relatividad General. Procuraremos rescatar los elementos más sobresalientes de este trabajo, fundamentalmente en lo que se refiere a las estructuras matemáticas subyacentes. Estas, al cabo de años, florecieron en los ingredientes básicos de las modernas teorías de gauge.

El trabajo de Weyl comienza con una descripción del “estado del arte” de la geometría diferencial. Referencia trabajos de Levi-Civita, Hessenberg y propios, en los que se postula que la geometría de Riemann está basada en el concepto de transporte paralelo infinitesimal. Detengámonos un poco en esta afirmación. La formulación Riemanniana de la geometría de una variedad diferencial (continuo, en la terminología de los primeros años del siglo XX), tiene como concepto fundamental al elemento de línea. Es decir la prescripción de cómo medir la separación entre dos puntos vecinos de la variedad, está dada por la expresión:

$$ds^2 = \sum \ g_{ij} dx^i dx^j \qquad (1)$$

siendo $\{x^i\}$ y $\{x^i+dx^i\}$ las coordenadas de dos puntos vecinos y $g_{ij}(x)$ los elementos del tensor métrico. En el marco de la teoría general de la relatividad, estas componentes están relacionadas con el potencial gravitatorio. El gran aporte de Riemann es haber demostrado que toda la geometría de la variedad (curvatura, curvas geodésicas, etc.) puede deducirse a partir del elemento (1). Es interesante destacar que la noción de paralelismo de dos vectores, muy simple en la geometría euclídea (plana) elemental, deja de serlo en el marco de la geometría de los espacios curvos. Solo por la imposición de una condición extra, es posible vincular la noción de paralelismo entre dos vectores tangentes al espacio curvo, con el elemento de línea (1). Sin embargo, en general, la idea de paralelismo puede definirse independientemente del elemento (1). Respecto de esto, Weyl hace una afirmación fuerte, al decir que solo es un hecho casual que la geometría de Riemann haya tenido como punto de partida al elemento (1) en lugar de haberlo hecho a través de la noción de paralelismo de vectores.

En palabras de Quigley, un estudioso del tema,

> Como es bien sabido, en la geometría Euclideana, la traslación de un vector preserva su longitud y su dirección. En la geometría de Riemann, la conexión de Christoffel garantiza la preservación de la longitud, sin embargo, la orientación de un vector es dependiente del camino. De cualquier modo, el ángulo entre dos vectores, siguiendo el mismo camino, se preserva bajo traslación. Weyl se preguntó por qué el remanente de la geometría plana, la preservación de la longitud, persistía. Después de todo, nuestros estándares de medición (varas rígidas y relojes) son conocidos solamente en un punto del espacio-tiempo. Para medir longitudes en otro punto, debemos traer nuestras herramientas de medir con nosotros. De acuerdo con Weyl, solo las longitudes relativas de dos vectores cualesquiera (en el mismo punto), y el ángulo entre ellos, son preservados bajo transporte paralelo; la longitud de cualquier vector singular es arbitraria. Para codificar esto matemáticamente, Weyl hizo la siguiente sustitución
>
> $$g_{ij}(x) \rightarrow \varphi(x) g_{ij}(x) \qquad (2)$$
>
> en donde el factor conforme, φ(x), es una función suave, positiva y arbitraria de la posición en el continuo 4 dimensional. Weyl requirió adicionalmente a la invariancia de coordenadas de la relatividad general, que las fórmulas deben permanecer invariantes bajo la sustitución (2). Llamó a esto una transformación de gauge[...]En la geometría de Riemann, la métrica se fija a menos de un factor de escala global. La idea de Weyl fue hacer de la escala una propiedad local de la métrica (Quigley, 2003, p. 5).

En el trabajo de 1918, Weyl propone una forma explícita para la función *φ(x)*:

$$g_{ij} \rightarrow e^{\gamma \int W_j dx^j} g_{ij} \qquad (3)$$

donde γ es una constante y W_j es un campo vectorial identificado con el potencial electromagnético.

Según Scholz (1995), la integral presente en la expresión (3) significa para Weyl que las relaciones entre cantidades en diferentes vecindades de distancia finita deberían ser consideradas significativas solo por mediación del todo, esto es, por un proceso de integración sobre caminos que unen los dos puntos en los centros de los entornos.

Como consecuencia de su impacto por la reciente obra de Einstein, en 1917 impartió algunas clases sobre relatividad general y allí aparece una anécdota significativa.

> La idea para mi teoría de campo unificada de la gravitación y el electromagnetismo basada en el principio de la invariancia gauge apareció en una conversación con Willy Scherrer, entonces un joven estudiante de matemáticas. Le había explicado que los vectores cuando son llevados alrededor por desplazamiento paralelo pueden retornar a su punto de partida en dirección cambiada. Y él me preguntó "¿También con longitud cambiada?". Por supuesto que le dí la respuesta ortodoxa en ese momento, pero en mi pecho roía la duda. La concepción del campo de materia de Mie me suministró el fermento (Weyl, 2009c, p. 168).

Esto lo llevó a intentar separar el concepto de desplazamiento paralelo de la métrica e introducir la noción de conexión afín. Esta noción a su vez lo estimuló a construir la métrica de una variedad desde una perspectiva infinitesimal que tiene una estructura conforme y una conexión, ambas asociadas con una transformación de gauge. O, como ha sido dicho, derivó la transformación de gauge como una condición de compatibilidad para la transferencia de longitud expresada en representaciones diferentes de la métrica conforme. La transferencia de longitud por una conexión fue introducida por analogía con la transferencia de dirección por una conexión afín. Si tomamos en consideración la calibración de la longitud, ella es significativa solamente como un dispositivo de medición en un punto, pero para dos puntos infinitesimalmente próximos, la medida del transporte de longitud presentaba una característica: la longitud tenía que recalibrarse en una transferencia infinitesimal. De este modo, la comparación de longitud entre puntos finitamente distantes es en general dependiente del camino, del mismo modo que la comparación de dirección para las conexiones afines. Así llegó a un tensor de curvatura que es invariante gauge. Esta última noción fue muy importante para Weyl debido a que ella fue considerada como un fuerte criterio para la relevancia física de cantidades en su nueva estructura geométrica. La relación esencial que estableció entre física y matemática fue abonada por la teoría del campo electromagnético de Mie y de esta manera llegó a su supuesta teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo.

Einstein respondió a la propuesta (3), afirmando que, si bien la idea era atractiva, físicamente era insostenible pues implicaría que la separación de las líneas espectrales dependería de la historia de los átomos emisores, en marcada contradicción con los hechos experimentales.

Con respecto a la evolución del concepto de gauge en física cuántica, citaremos extensamente por su claridad, un artículo de 1927 de Fritz London. Este autor comienza el artículo de la siguiente manera:

> Como es sabido, la idea de una geometría puramente local, concebida primero por Riemann, ha sido completada recientemente de una manera excepcionalmente bella y simple por Weyl. Uno puede mirar a la concepción de Weyl como la remoción del prejuicio de que las condiciones de la curvatura en un punto de un espacio determinan la curvatura en todos los puntos. Para hacer esta idea de Riemann significativa fue necesario suponer que la vara de medir usada para determinar los coeficientes del tensor métrico $g_{ij}(x)$ en cada punto era una vara de medir "rígida". En contraste, Weyl señala que la suposición de tal escala de longitud rígida está en contradicción con la geometría estrictamente local y que solamente las razones del g_{ij} y no sus valores absolutos, pueden ser determinadas[...]Uno puede solo admirar el colosal atrevimiento que condujo a Weyl, sobre la base de esta correspondencia puramente formal, a su interpretación geométrica del electromagnetismo[...]debe haber sido una inusualmente fuerte convicción metafísica la que le impidió a Weyl abandonar la idea de que la naturaleza tendría que hacer uso de la bella posibilidad geométrica que era ofrecida[...]Me gustaría mostrar que la forma original de la teoría de Weyl contiene un rango mucho más amplio de posibilidades que las que fueron usadas por su creador, incluyendo ni más ni menos, que un camino lógico a la mecánica ondulatoria, y desde este punto de vista tiene un inmediato significado físico[...]De ninguna manera tomo el enfoque de que al hablar de geometría a nivel atómico uno debe dar una prescripción práctica para la medición; no hay tal prescripción en la teoría del electrón. Pero si uno quiere agregar un sentido definitivo a los enunciados de la medición, me parece que al menos debería exigirse que existiera algún objeto real (como un "prototipo") al cual se pudieran relacionar los enunciados...pero tal objeto real no se obtiene en el continuo de la onda. En la eternamente fluida (pantarei) formación y disolución de las ondas el principio de identidad no se aplica y en el continuo no hay un punto de referencia fijo que fuera conveniente para usar como una medida de longitud reproducible. La dificultad de principio en la que uno está atrapado carecería completamente de salida si Weyl, en su generalización del concepto de espacio de Riemann, no hubiera creado un tipo de espacio en el cual precisamente la no-reproducibilidad de la medida-gauge es un postulado lógico de la radical geometría local. ...desde el punto de vista presente la situación ha cambiado fundamentalmente. Uno está, en efecto, forzado a retirar el concepto general de espacio de Weyl e intentar aplicarlo al continuo de Schrödinger (London, 1997, p.94-95; 97).

En términos matemáticos, London concluye que la idea de Weyl es correcta, pero aplicada en un contexto erróneo. Más específicamente, London asocia a la transformación conforme de Weyl, el cambio en la función de onda de Schrödinger ¬*(x)* dado por

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\int A_\mu dx^\mu\right)}\Psi(x) \qquad (4)$$

donde i es la unidad imaginaria, h es la constante de Planck y A es el potencial electromagnético.

De este modo encuentra el objeto físico que se comporta como la medida de Weyl y enfatiza sobre la noción de amplitud compleja de la onda de De Broglie. Es conveniente aclarar aquí que ya se incursiona en la teoría de las variables complejas, lo que genera otro tipo de problemas respecto de la naturaleza de los observables, pero que escapa a este trabajo.

4. Comentarios finales

Hoy el concepto de gauge está presente en al menos tres de las interacciones básicas conocidas y también se conoce su compatibilidad con algunos tratamientos de la gravitación y de la relatividad general. Es por ello que está actualmente incorporado al andamiaje básico de las grandes teorías de las interacciones fundamentales. Pero este campo es extraordinariamente complicado y no es el propósito de este artículo llegar tan lejos. Muy por el contrario, el objetivo es extremadamente modesto: nos hemos focalizado solamente en su emergencia y algunos de sus primeros contextos, bajo el supuesto que esto puede ayudar a comprender mejor algunas de sus consecuencias altamente elaboradas en investigaciones posteriores.

El contexto continúa abierto para futuras indagaciones, ya que el tópico ofrece numerosas sugerencias para eventuales abordajes futuros. Podemos sintetizar nuestra impresión del paisaje general de este modo: así como el concepto de campo estuvo presente durante varias décadas en la actividad de los especialistas, del mismo modo parece suceder con el concepto de gauge actualmente. Esto ha contribuido a lecturas parciales y a distorsiones conceptuales propias de cada perspectiva. Estimamos que una historia integral del concepto está aún por escribirse. Pero, como se ha dicho, Afriat (2008), quizás conviene rescatar para un tratamiento histórico, que a pesar de aparecer tempranamente un intento de unificación de las interacciones gravitacionales y electromagnéticas –como fue el caso con Weyl–, ello es mera consecuencia de incorporar una analogía a un terreno lleno de sutilezas matemáticas y por qué no, también filosóficas.

Agradecimientos: Los autores desean agradecer al o los evaluadores, por sus valiosos comentarios y observaciones que mejoraron sustancialmente el trabajo.

5. Bibliografía

Afriat, A. (2018). arXiv_0804_2947v1

Atiyah M. (2003). Hermann Weyl. *Biographical Memoirs: Vol. 82,* National Academy of Sciences. Washington, DC: The National Academies Press.

Feferman, S. (2000). The significance of Weyl's *Das Kontinuum*. En Hendricks et al. (eds), *Proof Theory*, Kluwer Acad. Publ., Netherlands, pp 179-194.

Gross, D. J. (1992). Gauge Theory-Past, Present, and Future? *Chinese Journal of Physics*, *30*(7), pp 955-972.

Jackson, J. D., & Okun, L. B. (2001). Historical roots of gauge invariance. *Reviews of Modern Physics*, *73*(3), 663.

London, F. (1997). Quantum-Mechanical Interpretation of Weyl's Theory. En: O'Raifeartaigh, L.: *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton U.P., p.: 94-106.

Mancosu, P. (1998) *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. Oxford U.P., N. York. (En particular, Weyl H.: On the New Foundational Crisis of Mathematics, pp. 86-118. The Current Epistemological Situation in Mathematics. pp. 123-142).

Quigley, C. (2003) On the Origins of Gauge Theory. http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/C_Quigley.pdf

Rodríguez, V., Lamberti, P (2013). La Prehistoria del Gauge. *Epistemología e Historia de la Ciencia. Sel. de Trabajos de las XXIII Jornadas*, Facultad de Filosofía y Humanidades, pp. 367-375.

Roquette, P. (2018). Emmy Noether and Hermann Weyl. https://www.cambridge.org/core. University of Sussex Library, pp: 285-326.

Ryckman, T. (2005). *The Reign of Relativity: philosophy of physics 1915-1925.* Oxford U.P., Oxford.

Scholz, E. (1995). Hermann Weyl's "purely infinitesimal geometry". *Proceedings of the international congress of mathematicians* (pp. 1592-1603). Birkhäuser, Basel.

Straumann, N. (1996) Hermann Weyl and the early history of gauge theories. *Invited talk at the PSI Summer School on Physics with Neutrinos,* Zuoz, Switzerland, August 4-10.

Tent, K. (Ed.) (2008) *Groups and Analysis. The legacy of Hermann Weyl.* Cambridge U.P.

Wells, Jr., R. O. (Ed.) (1987) *The Mathematical Heritage of Hermann Weyl*. Proc. of Symposia in Pure Mathematicas, Vol. 48. American Math. Society. Rhode Island.

Weyl, H. (1918). Gravitation and Electricity, Sitzungsber. K. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, *465*, pp. 1918.

Weyl, H. (1939). *The Classical Groups*. Princeton, Univ. P., Princeton.

Weyl, H. (1950). *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover Publ.Inc..

Weyl, H. (1952). *Space, Time, Matter*. Dover Publ. Inc, 1952 (trad. al inglés de la edición alemana de 1922).

Weyl, H. (1955). *The Concept of a Riemann Surface*. Addison-Wesley P. Co., Inc. Reading, Mass. Third ed.

Weyl, H. (1997). Electron and Gravitation. En O'Raifeartigh, L. *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton University Press, pp. 121-144.

Weyl, H. (2003). *The Continuum. A critical examination of the foundations of analysis*. Dover Publ. (Original de 1918).

Weyl, H. (2009a). *Philosophy of mathematics and natural science*. (Con introducción de F. Wilczeck). Princeton U.P., 2009. (Basado en el escrito de 1926).

Weyl, H. (2009b). Insight and Reflection. En Pesic, P. (Ed.) *Mind and Nature*. Chapter 9, Pp. 204-221, Princeton U.P., Princeton.

Weyl, H. (2009c). Address at the Princeton Bicentenial Conference 1946. En Pesic, P. (Ed.): *Mind and Nature*. Chapter 6, pp. 162-174, Princeton U.P., Princeton.

Yang, C. N. (2005). *Selected Papers*, pp.528, World Scientific Pub.

Yang, C.N. (1987) A Hermann Weyl 1885 Centenary Lecture. ETH 1885, in *Hermann Weyl* (1885-1985), ed. K. Chandrasekharan, pp. 7-21. Springer-Verlag.