# La longitud lunar en el *Almagesto* de Ptolomeo: el segundo modelo

Gonzalo Luis Recio[1]

Recibido: 2 de agosto de 2018
Aceptado en versión revisada: 9 de abril de 2019

**Resumen**. Luego de construir un modelo para las longitudes lunares que sea capaz de incorporar la primera anomalía, Ptolomeo continúa su investigación, detectando una segunda anomalía de la Luna que está asociada a la elongación lunar, esto es, a las fases de la Luna. El modelo que construye para dar cuenta de esta anomalía es uno de los mejores ejemplos de la complejidad alcanzada por la astronomía matemática griega. El artículo busca llevar a lector a través de los diversos problemas encontrados y de las soluciones propuestas por Ptolomeo.

**Palabras clave**: Ptolomeo – Almagesto – teorías lunares en la antigüedad – segunda anomalía lunar.

**Title**: Lunar longitude in Ptolemy´s *Almagest*: the second model

**Abstract**. After constructing a model for the lunar longitudes which is able to incorporate the first anomaly, Ptolemy continues his investigation, detecting a second anomaly for the moon, one which is associated with lunar elongation, that is, to the phases of the moon. The model he constructs to account for this anomaly is one of the best examples of the complexity reached by Greek mathematical astronomy. This paper tries to take the reader through the diverse problems encountered by Ptolemy, and also through the solutions he proposed for them.

**Keywords**: Ptolemy – Almagest – lunar theories in antiquity – second lunar anomaly.

## 1. Introducción

La teoría de las longitudes lunares es una de las partes más complejas de todo el *Almagesto*. Es, quizá, el mejor ejemplo de continuidad en la tradición astronómica griega, pues allí Ptolomeo comienza construyendo un primer modelo que responde a las exigencias de la anomalía con la cual sus "[...] predecesores –casi todos ellos– se habían topado." (IV, 3; H1 294; 180-181), modelo que, con toda probabilidad, era producto de las investigaciones de algunos de esos mismos predecesores (Pedersen, 2010, p. 159). La descripción ptolemaica del modelo que responde a la primera anomalía culmina en un sistema en el cual la Luna se mueve en el sentido contrario a los signos sobre un epiciclo que a su vez se mueve en el sentido de los signos sobre el deferente (fig. 1). Asumiendo

[1] Universidad Nacional de Quilmes. Universidad Pedagógica Nacional.
✉ gonzalorecio@hotmail.com
Recio, Gonzalo Luis (2019). La longitud lunar en el *Almagesto* de Ptolomeo: el segundo modelo. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 3(2), 17-49. ISSN: 2525-1198
(https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/index)

un radio arbitrario de 60 partes para el deferente, calcula que el radio del epiciclo es de 5;15 partes. Las velocidades de los movimientos son derivadas a partir de determinaciones de períodos que provienen, al menos, de tiempos babilónicos, y que fueron corroboradas y corregidas por el propio Ptolomeo.

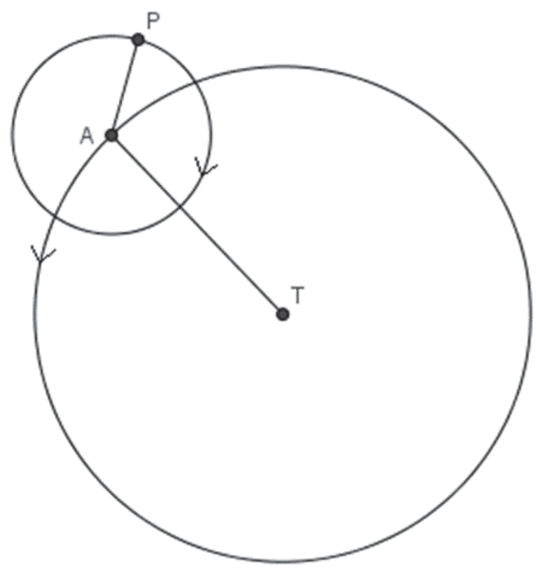



**Figura 1.** Diagrama del primer modelo para la longitud lunar. El centro del deferente T es la Tierra, en torno al cual se mueve A, el centro del epiciclo. La Luna P se mueve sobre el epiciclo en torno a A.

Sin embargo, luego de finalizar la construcción de ese primer modelo lunar, Ptolomeo señala que

> [...] se halló, tanto a partir de las observaciones registradas por Hiparco como a partir de las nuestras, que la distancia [angular] de la Luna al Sol estaba a veces de acuerdo con lo calculado a partir de la hipótesis de más arriba, y a veces en desacuerdo, siendo la discrepancia a veces pequeña y a veces grande (V, 2; H1 355; 220).

Los capítulos 2 al 5 del libro V del *Almagesto* están dedicados a solucionar las dificultades contenidas en esas observaciones. No es exagerado decir, con Pedersen, que "En ningún otro lugar obtenemos una imagen más convincente de Ptolomeo como un gran astrónomo que aquí" (2010, p. 159). El segundo modelo lunar presenta, además, algunos de los problemas más graves de todo el sistema ptolemaico: las predicciones que hace respecto de la distancia variable de la Luna respecto de la Tierra a lo largo del mes sinódico han sido las responsables no solo de seculares esfuerzos por reformar los modelos de Ptolomeo[2], sino también de la percepción de Ptolomeo como un astrónomo resueltamente instrumentalista, cuyos modelos no tenían otra pretensión que predecir longitudes y latitudes correctas para los astros en el tiempo (Duhem, 1969, pp. 16-21).

Este artículo continúa lo comenzado en *La longitud lunar en el Almagesto de Ptolomeo: el primer modelo*, donde se había expuesto el primer modelo mencionado más

[2] Algunos modelos astronómicos islámicos son un ejemplo de esto. Cfr. (Saliba, 1994).

arriba. Puesto que en el segundo modelo Ptolomeo no hace otra cosa más que modificar, aunque drásticamente, el primer modelo, es necesario conocer para comprender cabalmente el contenido de este artículo, las características de esa primera etapa en el tratamiento ptolemaico de la Luna. Como dije, en este caso expongo y explico las soluciones ptolemaicas a los fenómenos que Ptolomeo llama, justificadamente, *la segunda anomalía*. Por ello Ptolomeo entiende un comportamiento irregular del movimiento lunar ya no asociado a la posición de la Luna sobre su epiciclo, o del epiciclo lunar sobre el deferente –este aspecto es el que ya solucionó en el primer modelo– sino la elongación lunar, es decir, a la posición de la Luna respecto del Sol.

Al igual que en el artículo referido, busco aquí seguir los cálculos ptolemaicos respetando los métodos y pasos que el propio Ptolomeo indica en su *Almagesto*, para servir así no solo como una lectura que reemplace aquélla de la obra original, sino fundamentalmente como guía para la misma. Por ese motivo voy a señalar, nuevamente, los pasajes correspondientes en la obra de Ptolomeo en indicaciones al margen del texto.

Existen otras obras que se ocupan de los modelos lunares ptolemaicos (Pedersen, 1974, Neugebauer, 1975, Petersen, 1969, entre otros). En estas obras se hace hincapié en la división entre la teoría ptolemaica de la longitud lunar y aquella correspondiente a la latitud. Si bien esta distinción está fundada en las propias palabras de Ptolomeo, quien explícitamente dice que tal maniobra no afecta los cálculos de un modo relevante[3], también es verdad que Ptolomeo mismo suspende en su explicación del segundo modelo –y por buenos motivos– esta división, y momentáneamente obliga al lector a tomar en cuenta los movimientos en latitud para poder comprender cabalmente los cambios que introduce en su modelo de las longitudes. Este "puente" momentáneo que Ptolomeo tiende entre ambas teorías lunares se encuentra, probablemente por motivos de simplicidad expositiva, silenciado en la bibliografía sobre el tema. Si se pretende, como aquí, ayudar el lector del *Almagesto* en la comprensión del texto de Ptolomeo, esto no es conveniente. Este artículo busca cubrir esa laguna.

El artículo está estructurado del siguiente modo: la primera parte trata acerca del *input* observacional a partir del cual Ptolomeo descubre ciertas dificultades derivadas del primer modelo, y acerca de las características generales de la modificación –la excentricidad móvil del deferente– que el astrónomo introduce para dar cuenta de ella. La segunda expone la sección acerca del movimiento del centro del deferente en torno a la Tierra. Una vez que quedan determinados el sentido y velocidad de ese movimiento, comienza la tercera parte, donde se explica con más detalle el modo que el propio Ptolomeo expone los parámetros de ese movimiento, y se muestra de qué manera este tema se conecta con la teoría de las latitudes lunares. En cuarto lugar se explica el procedimiento ptolemaico para determinar los radios relativos del deferente y epiciclo, y de ambos con la excentricidad. La quinta parte está dedicada al tratamiento de la manifestación de la segunda anomalía en los octantes. Allí Ptolomeo adopta una estrategia teórica sumamente interesante, con la cual da por finalizada su exposición acerca del modelo lunar.

Es necesario aclarar que no todos los diagramas del artículo se corresponden con aquellos presentes en el *Almagesto*. Por motivos de claridad he agregado varios diagramas

[3] Cfr. IV, 6. H1 302. 191.

propios. Para distinguir los diagramas ptolemaicos de los que no lo son, las descripciones de los primeros comienzan con una letra P entre paréntesis "(P)".

## 2. El *input* observacional de la segunda anomalía y las características señaladas por Ptolomeo

Al inicio del capítulo 2 del libro V, después de indicar que ha descubierto una nueva anomalía, Ptolomeo nos cuenta que, tras reflexionar sobre el comportamiento de la misma, ha encontrado un cierto patrón:

> [...] cuando prestamos más atención a las circunstancias de la anomalía en cuestión, y la examinamos con más cuidado a lo largo de un período continuo, descubrimos que en conjunción y oposición la discrepancia es o bien imperceptible o bien pequeña, siendo la diferencia explicable por la paralaje lunar; en ambas cuadraturas, sin embargo, mientras que la discrepancia es muy pequeña o nula cuando la Luna está en el apogeo o perigeo del epiciclo, alcanza un máximo cuando la Luna se halla cerca de su velocidad media y la ecuación de la primera anomalía se halla también en el máximo; aún más, en cualquier cuadratura, cuando la primera anomalía es substractiva la posición observada de la Luna está a una longitud menor aún que la calculada substrayendo la ecuación de la primera anomalía, mientras que si la primera anomalía es aditiva su posición verdadera es aún mayor [que la calculada adicionando la ecuación de la primera anomalía], y el tamaño de esta discrepancia está íntimamente relacionado con el tamaño de la ecuación de la primera anomalía (V, 2; H1 355; 220).

El primer modelo lunar había sido construido a partir de observaciones en una de las sicigias, la Luna llena, en cuanto se apoyaba en observaciones de eclipses lunares. Por ese motivo no es sorprendente el éxito que tal modelo tenía para esos momentos del mes sinódico. La pretensión ptolemaica, sin embargo, implica contar con un modelo que pueda dar cuenta de las posiciones de la Luna para cualquier momento del mes, y no solo para las sicigias. Por ello es que realiza observaciones propias –y analiza observaciones anteriores– con el fin de comparar las predicciones del modelo con las posiciones observadas. El párrafo de arriba muestra las primeras conclusiones a las que llega Ptolomeo luego de ese trabajo.

El pasaje presenta dos aspectos de la anomalía: en primer lugar indica los momentos y posiciones para los cuales el modelo es exitoso, y en segundo aquellos para los cuales el modelo no da cuenta de lo observado. Respecto de esto último, agrega además algunas regularidades que halló, y que serán determinantes a la hora de resolver el problema.

Respecto de los momentos exitosos, Ptolomeo dice que "[...] en conjunción y oposición la discrepancia es o bien imperceptible o bien pequeña [...]". Esto, como dije, no es sorprendente, dada la base observacional del primer modelo. En la fig. 2 la longitud del Sol medio sobre la eclíptica es S, mientras que el centro del epiciclo A se halla en oposición al Sol medio[4], sobre un deferente con centro en T, la Tierra. Dada esta configuración, no

[4] El texto no aclara explícitamente que lo que se halla en oposición es el centro del epiciclo y no la Luna misma. La explicación ptolemaica, no obstante –y sobre todo si se tiene en cuenta el comentario posterior referente a las cuadraturas– no tiene sentido si no se asume que se está hablando de ese punto.

importa en qué posición se encuentre la Luna sobre el epiciclo: tanto si es en $P_0$ como en $P_1$ o $P_2$, la longitud de la Luna en $L_0$, $L_1$ y $L_2$, respectivamente, coincide con aquélla calculada a partir del modelo.

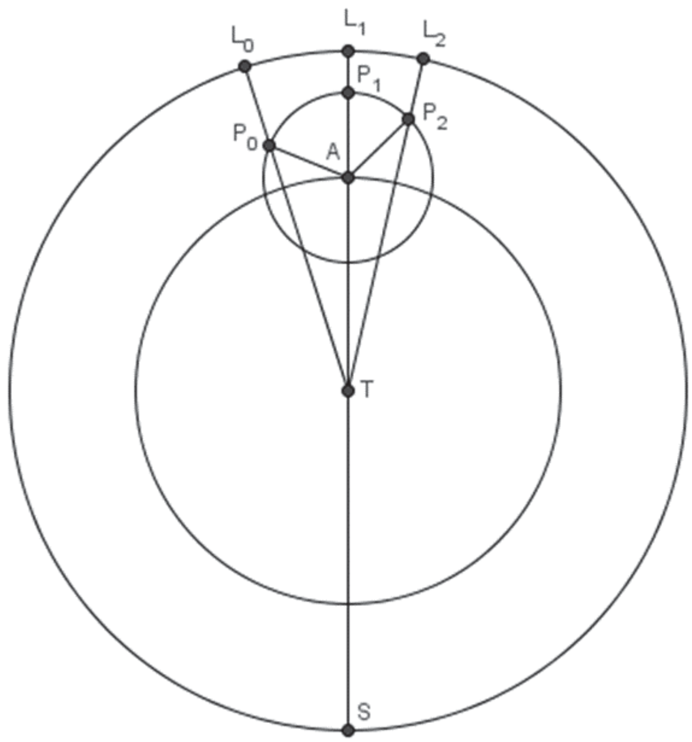



**Figura 2.** Diagrama de la posición del epiciclo en una sicigia.

La indicación ptolemaica según la cual "[...] en ambas cuadraturas [...] la discrepancia es muy pequeña o nula cuando la Luna está en el apogeo o perigeo del epiciclo [...]" es mucho más sorprendente y reveladora. Ptolomeo nos dice que, en una configuración como la indicada en la fig. 3, donde el centro del epiciclo se halla en una cuadratura, la longitud observada de la Luna, correspondiente al punto L sobre la eclíptica, coincidirá con la derivada del primer modelo siempre que la misma se halle en los puntos $P_0$ o $P_1$, esto es, el apogeo y perigeo del epiciclo, respectivamente.

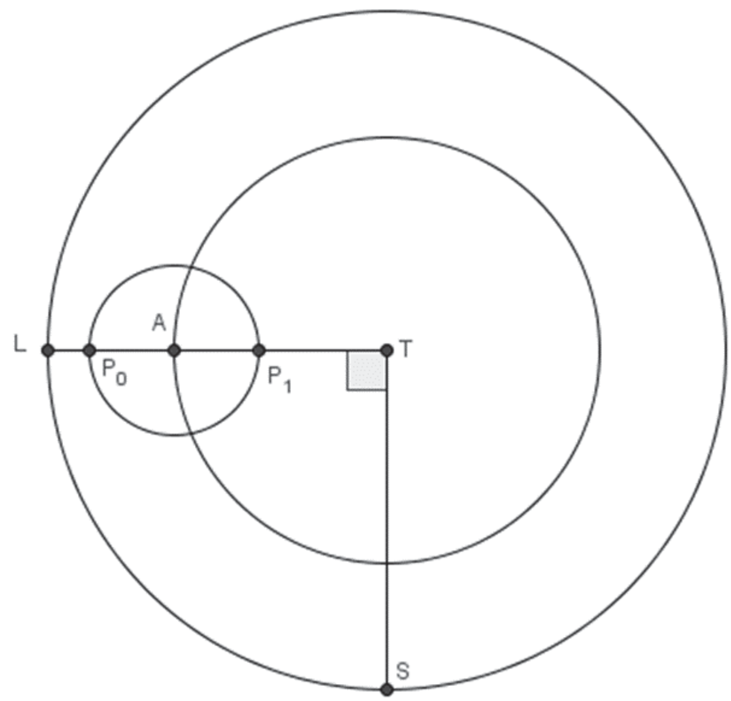



**Figura 3.** Diagrama de la posición del epiciclo en una cuadratura, con la Luna en el apogeo y perigeo del epiciclo.

Respecto de los momentos donde el modelo no da cuenta de las longitudes observadas, Ptolomeo señala tres factores que contribuyen al comportamiento de la anomalía: en primer lugar la anomalía crece en la medida en que el centro del epiciclo se acerca a la cuadratura, en segundo, la anomalía crece a medida que la Luna se acerca a la velocidad media o, lo que es lo mismo, a medida que la ecuación de la primera anomalía se acerca a su máximo, y en tercer lugar, la segunda anomalía siempre se manifiesta en el mismo sentido en el que se manifiesta la primera anomalía.

La figura 4 representa la configuración del primer modelo en la cual, según Ptolomeo, se encuentra la máxima manifestación de la segunda anomalía. Ésta se da cuando la velocidad del movimiento en longitud de la Luna real coincide, instantáneamente, con aquella del movimiento medio. Esto es debido a que cuando la Luna se encuentra en ese punto sobre el epiciclo, el observador terrestre no percibe que el epiciclo, en su movimiento circular en torno a A, la esté llevando ni en el sentido de los signos ni en sentido contrario. Para que eso suceda, es necesario que la línea de visión del observador terrestre sea tangente al epiciclo. Es por esto que, como dice Ptolomeo, en esos puntos – $P_0$ y $P_1$ en el diagrama– la "[...] ecuación de la primera anomalía se halla también en el máximo [...]". Pues por *ecuación de anomalía* Ptolomeo entiende la distancia angular entre la Luna media y la Luna verdadera –$\angle ATP_0$ y $\angle ATP_1$ en el diagrama–, y es obvio que ese ángulo no puede ser mayor que cuando la Luna verdadera se halla en esos puntos.

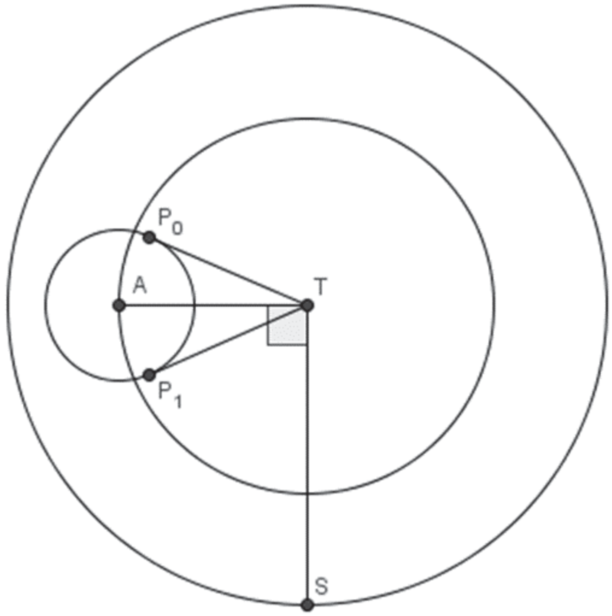



**Figura 4.** Diagrama de la posición del epiciclo en una cuadratura, con la Luna produciendo la máxima ecuación de anomalía.

Según señala Ptolomeo, la segunda anomalía siempre se manifiesta aumentando el efecto de la primera, por ejemplo, "[…] cuando la primera anomalía es substractiva la posición observada de la Luna está a una longitud menor aún que la calculada substrayendo la ecuación de la primera anomalía […]". En la fig. 5 si a la longitud B de la Luna media se le substrae[5] la ecuación de la primera anomalía $\angle BTL_0$, producida por la posición de la Luna real sobre el epiciclo en $P_0$, se obtiene una longitud $L_0$. No obstante, debido a la segunda anomalía se observa una longitud aún menor en $L_2$. De la misma manera, cuando la Luna se encuentra en $P_1$ el primer modelo indica una longitud $L_1$. La longitud observada es, sin embargo, $L_3$.

[5] En los diagramas del artículo, al igual que en los del *Almagesto*, la longitud aumenta en el sentido antihorario.

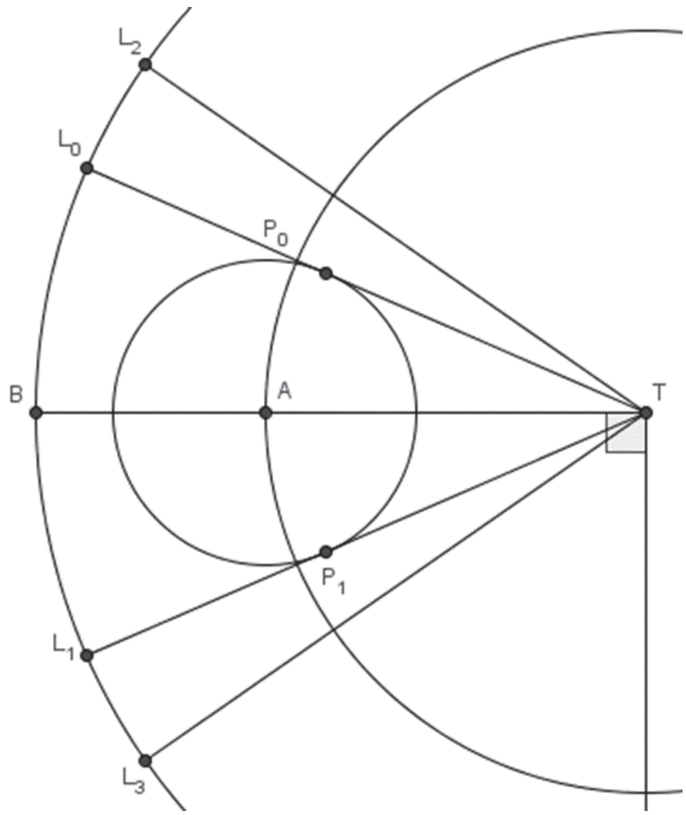



**Figura 5.**Diagrama del efecto de la segunda anomalía en una cuadratura con la Luna a velocidad media.

La solución ptolemaica para el problema presentado por la segunda anomalía es simple y a la vez revolucionaria:

> Solo a partir de estas circunstancias pudimos ver que debemos suponer que el epiciclo lunar debe estar llevado por un círculo excéntrico, estando más lejos de la Tierra en la conjunción y la oposición, y más cerca de la Tierra en ambas cuadraturas (V, 2; H1 355-356; 220).

Dado que el primer modelo funciona perfectamente en las sicigias, pero no lo hace tan bien en las cuadraturas, Ptolomeo supuso que algo debía de estar cambiando entre esos momentos. El aumento de la ecuación de la primera anomalía indicado en la fig. 5 le dio la clave para la solución: la ecuación de la primera anomalía aumentaba a medida que el epiciclo se acercaba a las cuadraturas por el sencillo hecho de que en su aproximación a esas posiciones el epiciclo se acercaba al observador. En la fig. 6 podemos ver cómo un epiciclo con centro en C más cerca de la Tierra explica el aumento de la ecuación de la primera anomalía. Allí, naturalmente, el centro C tiene la misma longitud B que el centro A del epiciclo del primer modelo, mientras que las posiciones de velocidad media, los puntos $P_2$ y $P_3$ sobre el epiciclo, se hallan a una mayor distancia angular que las anteriores $P_0$ y $P_1$, explicando la longitud observada en $L_2$ y $L_3$, respectivamente. De este modo queda claro, además, por qué motivo la segunda anomalía tiene la propiedad de aumentar el efecto de la primera anomalía, pues la diferencia entre la ecuación de anomalía derivada del primer modelo –∠BTL$_0$ en la fig. 6– y aquella observada –∠BTL$_2$– será mayor cuanto más grande sea primera.

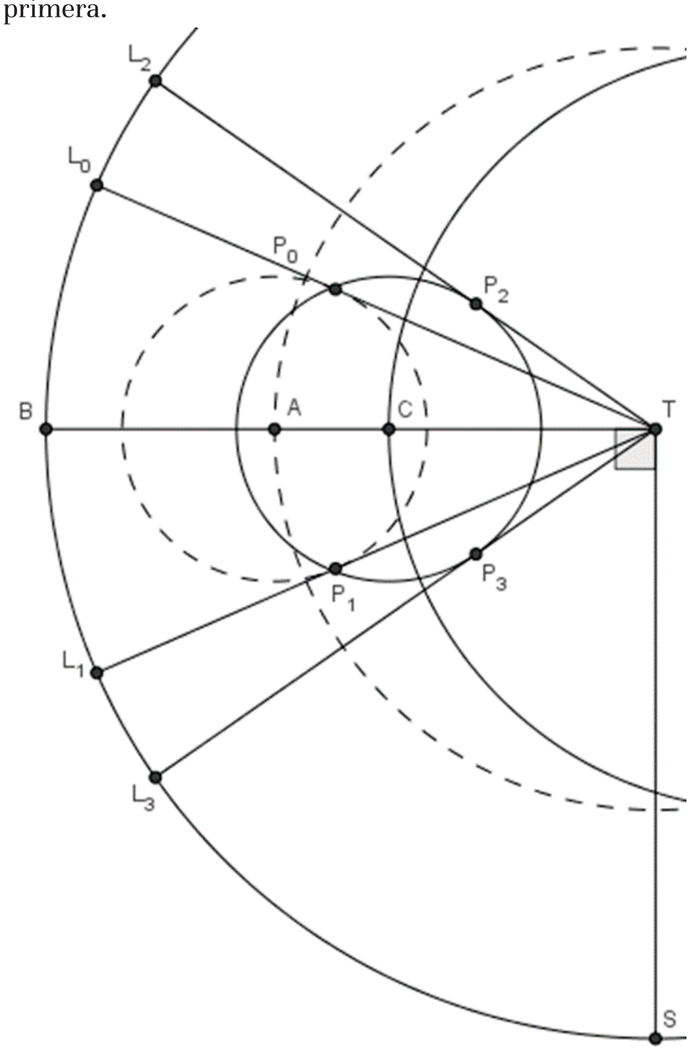


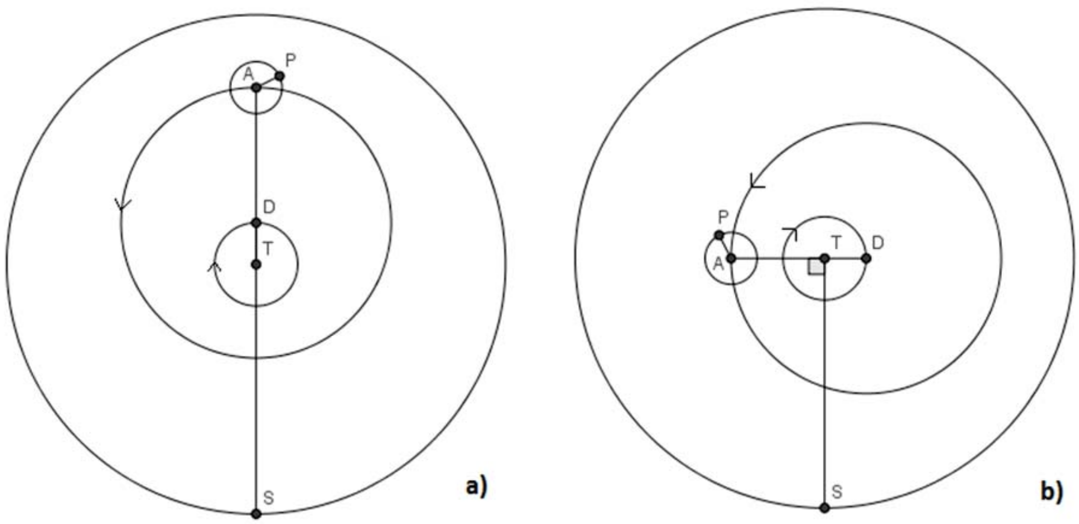

**Figura 6.** Diagrama de la solución ptolemaica al aumento de la ecuación de la primera anomalía en las cuadraturas.

Este modo de solucionar el aumento de la ecuación de la primera anomalía cumple además con la condición de mantener el éxito del primer modelo en las sicigias y en la configuración en cuadraturas donde la Luna real se halla en el apogeo o perigeo del epiciclo. Respecto de lo primero, el propio Ptolomeo lo dice explícitamente: la modificación hecha al primer modelo debe ser tal que en las cuadraturas el epiciclo se acerque a la Tierra y en las sicigias mantenga la distancia calculada para el modelo original. Cómo se puede lograr esto es parte del cálculo que Ptolomeo desarrolla posteriormente. Respecto de lo segundo, dado que si la Luna real se encuentra tanto en el apogeo o perigeo del epiciclo del primer modelo como en aquellos del epiciclo más cercano del segundo modelo siempre se hallará sobre la línea TCAB, entonces la longitud derivada de ambos modelos para esa posición lunar es exactamente la misma: B.

### 3. El movimiento del deferente en el segundo modelo

Una vez que ha determinado de qué modo solucionar la segunda anomalía tal y como se manifiesta en las cuadraturas, Ptolomeo debe todavía determinar de qué manera lograr que el epiciclo se acerque y aleje del observador terrestre.

El centro del epiciclo se halla siempre, por definición, sobre un deferente, de tal modo que este movimiento del epiciclo respecto de la Tierra debe ser causado por el movimiento del centro del deferente. En el segundo modelo para las longitudes lunares el astrónomo determina que este movimiento además de ser, por supuesto, circular, es geocéntrico.




**Figuar 7.** Diagrama de la posición del centro del deferente con el epiciclo en sicigia y en cuadratura.

En el diagrama a) de la fig. 7 el alineamiento entre T, D y A hace que el epiciclo se encuentre a la máxima distancia posible respecto de la Tierra. Esta configuración debe suceder en Luna llena y Luna nueva. En el diagrama b) los tres puntos también se encuentran alineados, solo que D está del otro lado de la Tierra. De ese modo el centro del epiciclo A se encuentra a la mínima distancia posible. Esta configuración debe suceder en cuarto menguante y cuarto creciente.

El interrogante obvio es qué clase de movimiento debe tener el centro del deferente D en torno a T para lograr ubicarse en los lugares correctos durante los momentos adecuados. En la figura 7, donde por mor de la simplicidad en la argumentación suponemos que el Sol medio está quieto respecto de la eclíptica, podemos ver que una forma simple de obtener el efecto deseado es hacer que el centro del epiciclo y el centro del deferente se muevan en sentidos contrarios: mientras que el primero lo hace en el sentido del Zodíaco[6], el segundo lo hace en el sentido contrario. Una cuestión

[6] En general, cuando Ptolomeo quiere indicar que algo se mueve en el sentido del Zodíaco, es decir, en longitud creciente, lo hace con la expresión "hacia atrás". Por el contrario, cuando quiere indicar que algo se mueve en sentido contrario al Zodíaco, dice "hacia adelante". El motivo de este modo de referirse a las

importante a resaltar es el hecho de que el primer modelo es exitoso respecto de la longitud media de la Luna tanto en las sicigias como en las cuadraturas. Esto queda implícitamente demostrado cuando Ptolomeo, a partir de las observaciones, dice que el primer modelo funciona bien cuando el centro del epiciclo está en una sicigia, y cuando el epiciclo se halla en una cuadratura y la Luna real tiene la misma longitud que la Luna media. La modificación introducida sobre el deferente del modelo, entonces, solo debe afectar la distancia del centro del epiciclo a la Tierra, pero no su centro de velocidad uniforme. Si en el primer modelo este era la Tierra, en el segundo modelo también debe serlo, aun cuando su centro geométrico ya no lo sea. La decisión de diferenciar ambos puntos constituye un paso de dramáticas consecuencias para la astronomía posterior: en gran medida toda la historia de la astronomía islámica, y el inicio de la astronomía europea moderna puede ser descripta como el esfuerzo de volver a unir en un punto único ambas funciones.[7] Y Ptolomeo da este paso sin siquiera sugerir su carácter revolucionario.

Una vez determinado el sentido del movimiento del centro del deferente, Ptolomeo todavía tiene que calcular su velocidad. En un modelo lunar donde son ignorados los problemas de latitud de la Luna, la velocidad del centro del deferente excéntrico debe ser igual a dos veces la velocidad de elongación media menos la velocidad de longitud media. Si expresamos la velocidad del deferente excéntrico como VExc, la velocidad de elongación media como $VElo_m$, y la velocidad del epiciclo sobre el deferente como VEpi, entonces la igualdad puede ser expresada como

(1) $VExc=2\cdot VElom-VEpi$.

direcciones es el hecho de que para toda la astronomía griega antigua el primer y más obvio movimiento celeste, que afectaba a absolutamente todos los astros, era el movimiento diurno, el cual se da en el sentido contrario a los signos. Ese movimiento es la referencia direccional para todos los demás. Cfr. (Toomer, 1984, p. 20)

[7] Este es el importante problema de la incompatibilidad entre el punto ecuante y la física aristotélica: la imposibilidad de concebir una esfera sólida rotante cuyo eje de rotación no pase por su centro. Para ver solo algunos ejemplos de los reproches posteriores a este aspecto de la astronomía del *Almagesto*, ver la crítica de Abu Ubayd al-Juzjani en (Saliba, 1994, pp. 89-90) y del propio Copérnico en (Swerdlow, 1973, pp. 434-5).

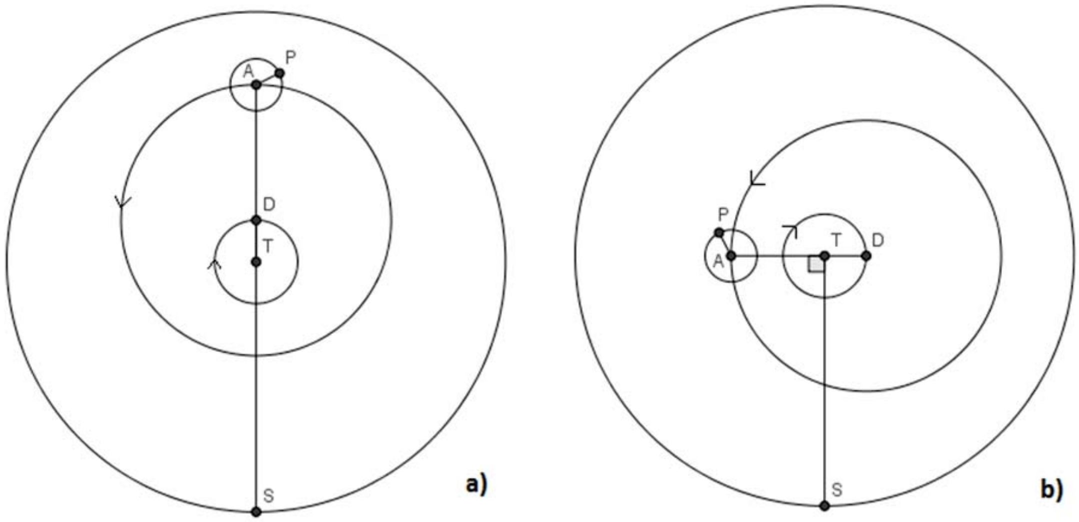



**Figura 8.** Diagrama para la demostración de la velocidad del centro del deferente en un modelo que ignora el movimiento latitudinal de la Luna.

En la fig. 8 el punto Z representa la longitud del Sol medio en un momento inicial de oposición, en el cual el centro del deferente excéntrico se halla en W con una longitud Y, y el centro del epiciclo tiene la misma longitud.[8] Luego de un determinado tiempo la longitud del Sol medio es S, y el centro A del epiciclo se halla a una longitud $C_0$, a 270° de S, es decir, en una cuadratura. Tal y como lo exige el modelo, el centro D del deferente se ha movido a su vez en sentido contrario hasta alcanzar la longitud $C_1$ en la otra cuadratura. Si representamos la velocidad del Sol medio como $VSol_m$, entonces cada una de las velocidades puede ser representada como un ángulo del siguiente modo:

(2) $VExc=\angle C1TY$,

(3) $VEpi=\angle YTC0$,

(4) $VElom=\angle STC0-180°$[9],

(5) $VSolm=\angle ZTS$.

La expresión correspondiente a (1), entonces, sería

(6) $\angle C1TY=2\cdot(\angle STC0-180°)-\angle YTC0$.

Esta igualdad es la que hay que demostrar. Por otro lado, puesto que $VElo_m$ es igual a la diferencia entre VEpi y $VSol_m$, entonces

(7) $\angle STC0-180°=\angle YTC0-\angle ZTS$.

Gracias a Elem. I 15 sabemos que

(8) $\angle C1TY=\angle C0TZ$.

[8] Esta configuración es idéntica a la representada en el diagrama a) de la figura 6.
[9] Se le restan 180° porque ese era el valor de la elongación media en la posición inicial. Además, cabe aclarar que el ángulo $\angle STC_0$ es mayor a 180°, es decir, corresponde al arco $SC_1YC_0$.

Puesto que $\angle YTC_0$ es el suplementario de $\angle C_0TZ$, entonces

(9) $\angle C1TY=180°-\angle YTC0$ o, lo que es lo mismo, $\angle C1TY=90°+90°-\angle YTC0$.

Además, puesto que $C_1$ representa la longitud de una cuadratura, entonces $\angle STC_1$ es, necesariamente, igual a 90°. El ángulo $\angle ZTC_1$ puede ser expresado, por lo tanto, del siguiente modo:

(10) $\angle ZTC1=\angle ZTS+90°$.

Por lo tanto se da que

(11) $\angle ZTC1-\angle ZTS=90°$.

Entonces, por (9) y (11) se obtiene que

(12) $\angle C1TY=\angle ZTC1-\angle ZTS+\angle ZTC1-\angle ZTS-\angle YTC_0$.

Pero, también por Elem. I 15, sabemos que $\angle ZTC_1$ es igual a $\angle YTC_0$. Por lo tanto, si se hace el reemplazo en (12) se obtiene que

(13) $\angle C1TY=\angle YTC0-\angle ZTS+\angle YTC0-\angle ZTS-\angle YTC0$ o, lo que es lo mismo, $\angle C1TY=2\cdot(\angle YTC0-\angle ZTS)-\angle YTC0$.

Por último, si a (13) se le aplica la equivalencia indicada en (7), entonces se obtiene $\angle C_1TY=2\cdot(\angle STC_0-180°)-\angle YTC_0$, que es el valor propuesto en (6), y que había que demostrar.

Esta formulación supone que el deferente lunar está en el plano de la eclíptica, es decir, que la Luna no sufre ninguna variación en latitud. Este no es, por supuesto, el caso. La cuestión no parece tener mayor relevancia, pues el propio Ptolomeo se había encargado de indicar que la inclinación del deferente lunar es tan pequeña que, a los efectos de los cálculos de longitud, la variación que causaba era despreciable.[10] Por ese motivo es que descompone el análisis de ambos aspectos, tratándolos independientemente. De hecho, luego de finalizar el primer modelo, dedica un libro entero a la cuestión de la latitud lunar (IV, 9; H1 326-336; 205-209). La solución que allí propone a ciertas características de la variación latitudinal de la Luna, sin embargo, sí tiene implicancias más relevantes para el cálculo de longitud, y particularmente en el caso del segundo modelo. Es por ese motivo que el modo en el cual Ptolomeo formula la velocidad de la excéntrica en *Almagesto* V, 2 es un poco más complejo.

[10] Si bien sabe que la Luna varía su latitud eclíptica hacia el sur y hacia el norte, en el desarrollo de los modelos de longitud lunar Ptolomeo proponer ignorar el tema de la latitud, dejando la solución para esto en una sección aparte. De ese modo, imagina una Luna que se mueve siempre sobre la eclíptica. Respecto de los cálculos en longitud, esto no acarrea ningún problema ya que la inclinación angular de la órbita lunar respecto de la eclíptica es tan pequeña que la diferencia es despreciable. cfr. VI, 7. H1 505. 297.

## 4. Formulación ptolemaica de la velocidad del centro del deferente excéntrico.

Ptolomeo no desarrolla, como sí lo hace en otras partes, un argumento geométrico detallado en el cual se concluye en la velocidad del punto D. En el párrafo en el que formula la velocidad del centro del deferente excéntrico, sin embargo, nos explica brevemente cuál es el valor para esa velocidad, y expone, si bien sintéticamente, el camino por el cual llegó a ese número:

> [...] en este plano inclinado [el deferente], suponemos que se dan dos movimientos en direcciones opuestas, ambos uniformes respecto del centro de la eclíptica: uno de ellos lleva al centro del epiciclo hacia atrás a través de los signos con la velocidad del movimiento en latitud, mientras que el otro lleva el centro y el apogeo de la excéntrica, a la cual asumimos ubicada en el mismo plano (el centro del epiciclo siempre se hallará sobre esta excéntrica en todo momento), hacia adelante a través de los signos según una cantidad correspondiente a la diferencia entre el movimiento en latitud y la doble elongación (siendo la elongación la cantidad por la cual el movimiento medio en longitud de la Luna excede el movimiento medio del Sol). Así, para dar un ejemplo, en un día el centro del epiciclo se mueve cerca de 13;14° en latitud hacia atrás a través de los signos, pero parece haberse movido 13;11° en longitud sobre la eclíptica, pues la totalidad del círculo inclinado [de la Luna] se mueve la diferencia de 0;3° en sentido opuesto, hacia adelante, [mientras] el apogeo de la excéntrica, a su vez, se mueve 11;9° en sentido opuesto, (también hacia adelante): esta es la cantidad por la cual la doble elongación, 24;23°, excede el movimiento en latitud, 13;14°. La combinación de estos dos movimientos, que se dan en direcciones opuestas, como dijimos, en torno al centro de la eclíptica, producirá como resultado que el radio que lleva el centro del epiciclo y el radio que lleva el centro de la excéntrica estarán separados por un arco que es la suma de 13;14° y 11;9°, y es dos veces la cantidad de la elongación (que es aproximadamente 12;11½°) (V, 2; H1 356; 220).

Ptolomeo, como sus antecesores, había notado que la latitud de la Luna variaba con el tiempo, lo que indicaba que la Luna realiza su movimiento en un ángulo inclinado respecto de la eclíptica –es decir, que tanto el deferente como el epiciclo comparten un plano inclinado. La consecuencia obvia de esto es que la distancia angular que recorre el centro del epiciclo sobre el deferente no sea igual a la variación en longitud de ese punto a causa de ese movimiento.

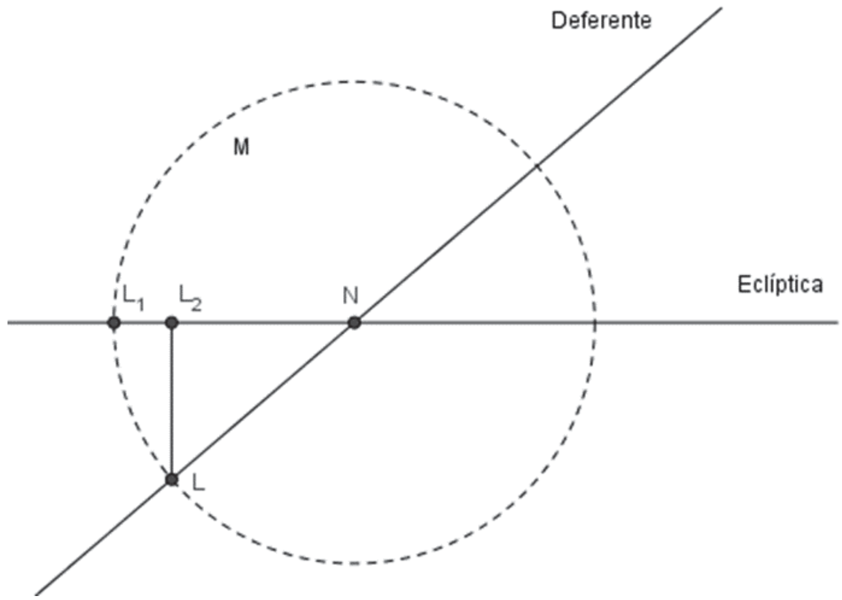



**Figura 9.** Diagrama en el cual se aprecia el efecto de la inclinación del deferente lunar sobre el plano de la eclíptica respecto del movimiento en longitud.

En el diagrama 9 se pueden ver los planos de la eclíptica y del deferente lunar desde la perspectiva de un observador terrestre. El punto N representa un nodo, es decir, uno de los dos puntos en los cuales el centro del epiciclo lunar pasa de un lado a otro de la eclíptica. Si el centro del epiciclo se mueve de N a L en el deferente, se ha movido una distancia angular igual a la distancia $NL_1$ en la eclíptica –puesto que ambos son radios del círculo M con centro en N. Sin embargo su movimiento en longitud fue menor, el equivalente a la distancia angular que hay desde N a $L_2$. Ptolomeo dice explícitamente que va a ignorar esto y que va a suponer que el movimiento sobre el deferente es igual a la variación en longitud, es decir, que $NL=NL_2$. Puede hacerlo porque la inclinación del plano del deferente respecto del de la eclíptica es muy pequeño, por lo que el efecto señalado es despreciable.

El movimiento lunar, no obstante, presenta otro problema respecto de su latitud: las latitudes máximas y mínimas de la Luna no se dan siempre en la misma longitud, sino que esta va variando con el tiempo respecto de aquellas. Para solucionar el problema Ptolomeo ideó un sistema muy ingenioso.

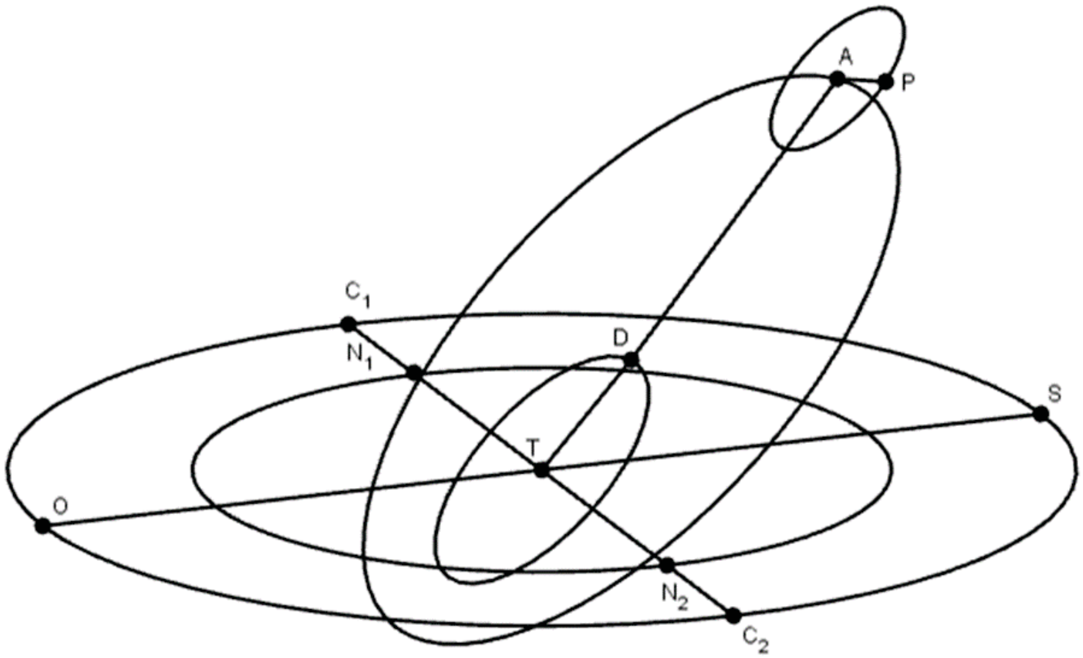



**Figura 10.** Diagrama del segundo modelo con movimiento de los nodos. La inclinación del deferente lunar está exagerada.

En el diagrama 10 vemos una combinación del segundo modelo para las longitudes, y el dispositivo teórico que Ptolomeo incorpora para explicar los problemas de latitud lunar. Además de los puntos ya indicados en el diagrama 8, vemos que el deferente está inclinado respecto del plano de la eclíptica, en cuyo plano se halla el deferente solar medio. El círculo concéntrico con el deferente solar medio es el responsable de mover todo el deferente lunar de tal modo que quede explicado el cambio de longitudes para las latitudes máximas y mínimas. Aquí no interesa el modo por el cual Ptolomeo llega al valor de la inclinación del deferente, ni el sentido y la velocidad del movimiento del círculo que mueve al deferente lunar. Solo basta indicar que la combinación del segundo modelo lunar para las longitudes con el modelo lunar para la latitud indica que el centro del deferente lunar D se mueve en torno a T a VExc, en el sentido contrario a los signos. Al mismo tiempo el centro del epiciclo se mueve a VLat, que es la velocidad en latitud media de la Luna, en el sentido de los signos.[11] El Sol medio, por supuesto, se mueve en el sentido de los signos a $VSol_m$. Para explicar el hecho de que las máximas y mínimas latitudes se dan en diversos sectores del Zodíaco, no obstante, Ptolomeo introduce el movimiento representado por el círculo concéntrico al deferente solar. Este se mueve en sentido contrario a los signos a VNod, llevando a los dos nodos $N_1$ y $N_2$ de tal modo que se da una suerte de "precesión" de los puntos de máxima y mínima latitud sobre el Zodíaco.

[11] Dado que, por lo pequeño de la inclinación del deferente lunar respecto de la eclíptica, la totalidad del mismo se encuentra comprendido en la banda del Zodíaco, las expresiones "hacia adelante" y "hacia atrás", que en sí mismas se refieren al orden de los signos, todavía tienen sentido.

Las observaciones y cálculos le permiten a Ptolomeo obtener el valor del movimiento en latitud de tal modo que VLat=13;13,45,39,48,56,37$^{°/d}$. Este movimiento es el responsable de los cambios en la latitud lunar, pero también del avance de la Luna en longitud media. Ahora bien, este avance, como ya sabe[12] es de 13;10,34,58,33,30,30$^{°/d}$, es decir, más lento. Es obvio que el responsable de este atraso es el movimiento contrario a los signos de los nodos. Para obtener ese valor, entonces, hay que restar VEpi a VLat, lo que da un valor de VNod=0;3,10,11,15,25,60$^{°/d}$. En el texto citado, como vimos, Ptolomeo redondea los valores de tal modo que VLat=13;14$^{°/d}$, VEpi=13;11$^{°/d}$ y VNod=0;3$^{°/d}$. En este contexto es necesario tomar en cuenta que por un lado VEpi es el producto de dos movimientos contrarios, y por otro VNod ya está produciendo un movimiento de D en el sentido correcto, aun cuando D permanezca fijo respecto de E. Por todo ello podemos reformular tanto VEpi como VExc de tal modo que

(14) VEpi=VLat-VNod

y

(15) VExc=VNod+ VExc1,

siendo $VExc_1$ la velocidad propia del centro de la excéntrica, que sumada a la velocidad de los nodos logra el efecto de la "doble elongación". En la cita ptolemaica vimos que según el astrónomo alejandrino la velocidad propia del centro de la excéntrica, debe ser

> [...] una cantidad correspondiente a la diferencia entre el movimiento en latitud y la doble elongación (siendo la elongación la cantidad por la cual el movimiento medio en longitud de la Luna excede el movimiento medio del Sol).

es decir,

(16) VExc1=2·VElom-VLat.

La derivación desde la formulación simplificada (1) a la formulación estrictamente ptolemaica (16), es sencilla. Si partimos de $VExc=2 \cdot VElo_m$-VEpi y le agregamos dos términos al segundo miembro de la ecuación de tal modo que

(17) VExc=2·VElom-VEpi+VNod-VNod,

podemos obtener que

(18) VExc-VNod=2·VElom-VEpi-VNod o, lo que es lo mismo, VExc-VNod=2·VElom-(VEpi+VNod).

Tomando en cuenta las equivalencias señaladas en (14) y (15) queda que $VExc_1=2 \cdot VElo_m$-VLat, que es el modo según el cual Ptolomeo formula la velocidad para el centro de la excéntrica.

[12] Ptolomeo indica las velocidades medias lunares en IV, 3; H1 278-281; 179-180.

## 5. Los tamaños del deferente excéntrico y de su excentricidad en el segundo modelo.

El primer modelo para las longitudes lunares había arrojado un valor proporcional de 5;15ᵖ para el radio del epiciclo, dado un radio de 60ᵖ para el deferente.[13]

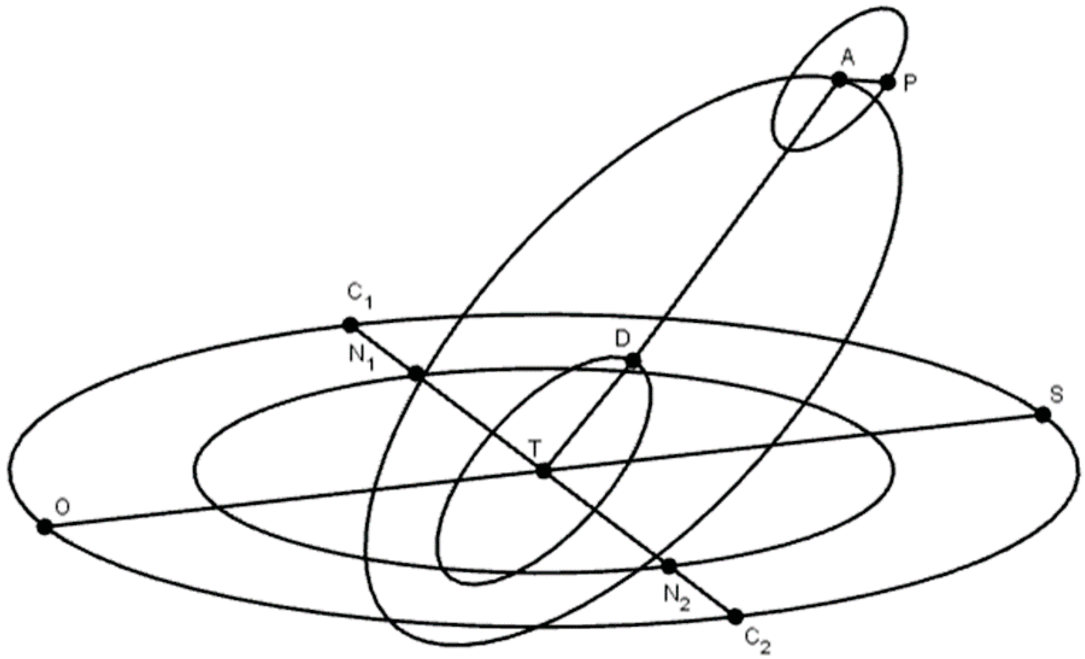



**Figura 11.** Diagrama de la máxima ecuación de anomalía en el primer modelo.

En la fig. 11 los segmentos TA y AP representan al radio del deferente y del epiciclo, respectivamente. La línea TP es tangente al epiciclo, por lo cual, como expliqué más arriba (ver p. 22), cuando la Luna se halla en P se percibe el máximo valor posible de la ecuación de anomalía. Gracias a Elem. III 18 sabemos que el ángulo ∠APT es recto. Esto permite resolver trigonométricamente el triángulo rectángulo ATP, y calcular el valor de la máxima ecuación de anomalía correspondiente al ángulo ∠ATP: 5°.

La estrategia de Ptolomeo para determinar los radios correspondientes en el segundo modelo es sumamente ingeniosa. Él ya sabe que en una cuadratura el epiciclo se acerca por efecto del movimiento del centro del deferente. Este movimiento es, como vimos, circular y geocéntrico. Si observamos nuevamente la figura 7 veremos que el radio de la excentricidad debe ser tal que cuando se sume al radio del deferente (diagrama 7.a.) la distancia total desde la Tierra T al centro del epiciclo A debe ser igual a 60ᵖ. Esa alineación, como vimos, debe darse en las sicigias, para que de ese modo la proporción entre epiciclo y deferente coincida en esos momentos con aquélla determinada para el primer modelo, el cual era exitoso en tales momentos del mes sinódico. La otra condición que debe cumplir el valor del radio de la excentricidad es que, al ser restado al radio del

[13] cfr. IV, 6; H1 312; 197 y IV, 6; H1 322; 202.

deferente (diagrama 7.b.) la distancia total desde T a A debe ser tal que el ángulo ∠ATP, correspondiente a la máxima ecuación de anomalía en una cuadratura, coincida con la observada. Para conocer cuál debe ser esa distancia TA en las cuadraturas, por lo tanto, hay que determinar cuál es la máxima ecuación de anomalía cuando el centro del epiciclo se encuentra en una cuadratura, para luego resolver trigonométricamente el triángulo rectángulo que queda determinado.

El capítulo 3 del libro V está dedicado exclusivamente a la determinación del valor de esta máxima ecuación de anomalía. Ptolomeo indica que buscó observaciones que debían cumplir con tres condiciones:

> [1] La velocidad de la Luna era cercana a la media (porque es cuando la ecuación de anomalía está en su máximo). [2] La elongación media de la Luna respecto del Sol era de alrededor de un cuadrante (porque entonces el epiciclo se hallaba cercano al perigeo de la excéntrica). [3] Además de las [condiciones] anteriores, la Luna no mostraba paralaje longitudinal (V, 3; H1 361; 223).

Las dos primeras condiciones enumeradas se derivan directamente de las características geométricas del cálculo propuesto, y ya han sido explicadas. La tercera, sin embargo, merece un poco más de atención.

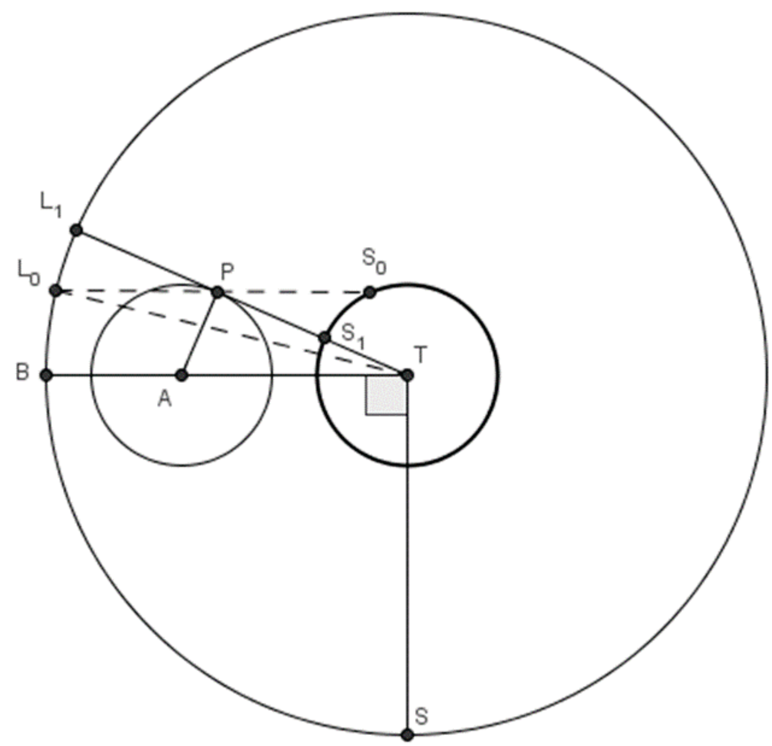



**Figura 12.** Diagrama que indica los problemas de paralaje en una cuadratura.

En la fig. 12 el epiciclo con centro en A se halla en cuadratura. El círculo más grueso es la circunferencia de la Tierra, sobre la cual se hallan dos observadores en $S_0$ y $S_1$. El círculo externo representa la eclíptica. El deferente excéntrico no está representado. Toda teoría lunar debe determinar, para Ptolomeo, la posición verdadera de la Luna en el cielo para cualquier momento dado. Verdadero significa, aquí, respecto del centro de la Tierra, en este caso, desde T. Para lograrlo debe tener, también, un *input* observacional que sea verdadero. Dado que el radio de la Tierra no es despreciable en comparación con la distancia Tierra-Luna,[14] no cualquier observación cumple con las condiciones necesarias para que eso se dé. Este es el motivo por el cual, al comenzar a construir su primer modelo, Ptolomeo advierte que solo los eclipses lunares son fenómenos adecuados para evitar los problemas de paralaje causados por la cercanía de la Luna al observador. Aquí, sin embargo, no es posible usar eclipses lunares, ya que esos fenómenos solo se dan en Luna nueva.[15]

En nuestro caso, para calcular trigonométricamente la distancia TA, Ptolomeo debe conocer primero el valor del ángulo ∠ATP, la máxima ecuación de anomalía, por observación. La longitud verdadera que determinará entonces para P será $L_1$. Sin embargo, si observa a la Luna desde, por ejemplo, un punto $S_0$ sobre la superficie terrestre, la longitud observada será $L_0$. En el caso de que no se tomara en cuenta la cercanía de la Luna, entonces se pensará que la longitud verdadera de la Luna es efectivamente $L_0$, y que por lo tanto la máxima ecuación de anomalía en cuadraturas es $\angle ATL_0$, cuando en realidad es $\angle ATL_1$. Para que un observador perciba a la Luna en su posición verdadera en el cielo, debe observarla en su cenit, esto es, en la posición $S_1$ sobre la superficie. Si así lo hiciera, dado que se encuentra sobre la línea que une al centro de la Tierra con la Luna, su línea de visión coincidiría con ella.

Ahora bien, dado que Ptolomeo está construyendo un modelo sobre la longitud lunar no es necesario que determine con precisión la posición verdadera de la Luna, sino solo su longitud. Para ello basta con que en el momento de la observación el ángulo entre la eclíptica y el círculo de altitud lunar sea de 90°. Si así fuera, es posible que la posición observada sea errada, por causa de la paralaje *en cuanto a la latitud lunar*. La longitud, no obstante, será precisa.

Ptolomeo relata que observó[16] desde Alejandría, en nuestro 9 de febrero del 139, que

(19) la Luna se hallaba a 219;40°.

Dado que la Luna se hallaba casi sobre el meridiano de Alejandría, la observación garantiza una alta precisión en la longitud lunar.

Su modelo solar le indica a Ptolomeo que en ese momento

(20) el Sol medio se hallaba a 316;27°,

A su vez, su primer modelo lunar le indica que en el momento de la observación la Luna se hallaba, respecto del apogeo del epiciclo, a 87;19°. Esta posición, nos dice, pone a la Luna muy cerca del punto donde la línea de visión del observador es tangente al

[14] Ptolomeo, al igual que muchos de sus antecesores, sabía esto: "Pues la distancia entre la esfera de la Luna y el centro de la Tierra [...] no es tan grande que el tamaño de la Tierra sea proporcionalmente como un punto respecto a ella." (IV,1; H1 266; 173).
[15] Cfr. IV, 1; H1 265-268; 173-174.
[16] Es la observación número 82 en la lista de (Pedersen, 2010, p. 420).

epiciclo, y por lo tanto donde la ecuación de anomalía alcanza su máximo valor.[17] Como dije (ver pág. 26), el segundo modelo también conserva del primero la capacidad de predecir la posición de la Luna media, que se representa con el centro del epiciclo. A partir del primer modelo, entonces, Ptolomeo deriva la longitud del centro del epiciclo para el momento de la observación, y determina que

(21) la Luna media se hallaba a 227;20°.

A partir de allí podemos confirmar que la observación cumple con la condición de darse en una cuadratura. Además, y fundamentalmente, nos indica que

(22) la máxima ecuación de anomalía en una cuadratura es de 7;40°, es decir, 2;40° más que lo permitido por el primer modelo.

Ptolomeo repite luego el cálculo a partir de una observación de Hiparco[18], tras lo cual alcanza el mismo resultado. Termina diciendo que

> A partir de otras numerosas observaciones similares también encontramos que la máxima ecuación de anomalía es $7\frac{2}{3}°$ cuando el epiciclo se encuentra en el perigeo de la excéntrica (V, 3; H1 H1 365; 225).

Con estos datos Ptolomeo nos pide

> [...] que la excéntrica de la Luna sea el círculo ABG con centro en D y diámetro ADG, donde E es el centro de la eclíptica. Así A es el apogeo de la excéntrica y G el perigeo. En el centro G trazar el epiciclo de la Luna ZHΘ, trazar EΘB tangente a él, y unir GΘ (V, 3; H1 365; 225.).

[17] El valor de ese ángulo debe ser, necesariamente, mayor a 90°. De hecho, hasta no conocer la distancia desde la Tierra al centro del epiciclo –que es justamente el valor que se está buscando–, es imposible calcular con precisión la posición que la Luna debería tener sobre el epiciclo. No obstante ello, dado que Ptolomeo conocía al menos cualitativamente el orden de magnitud del valor que estaba buscando, sabía que el valor del ángulo buscado se hallaba cerca del que utilizó. Además, el cálculo mismo no es especialmente sensible a diferencias en el *input*.

[18] V, 3; H1 363; 224.

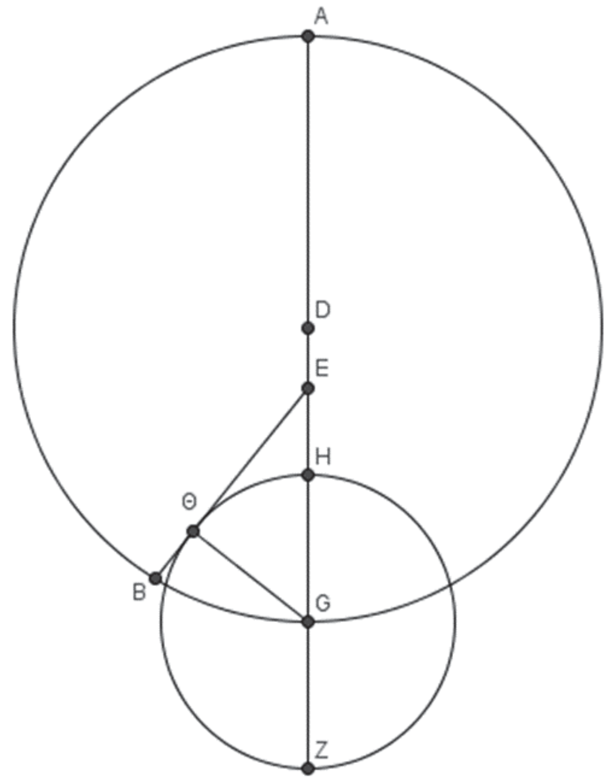



**Figura 13.** (P) Diagrama para el cálculo de los radios en el segundo modelo.

Esta construcción es la que Ptolomeo utiliza para calcular el valor de los radios de su nuevo deferente y su excentricidad. En primer lugar resuelve el triángulo rectángulo determinado por la Luna sobre el epiciclo, el centro del propio epiciclo, y la Tierra, esto es, el triángulo rectángulo GEΘ. Dado que conoce el valor del radio GΘ del epiciclo, $5;15^p$, y también conoce el valor del ángulo ΘEG a partir de la observación arriba mencionada, 7;40°, entonces puede calcular trigonométricamente el valor de EG: $39;22^p$. Ahora bien, si A representa el apogeo del deferente excéntrico, es decir, la distancia entre el centro del epiciclo y la Tierra en las sicigias, entonces sabemos que EA es igual a $60^p$. Por lo tanto, a través de una simple suma, podemos conocer el valor del diámetro AG del deferente, que es igual a $99;22^p$, y por lo tanto del radio DG, que es igual a $49;41^p$. Por último, restando EG a DG se obtiene el valor de la excentricidad ED del deferente: $10;19^p$.

## 6. La modificación del segundo modelo lunar: la *prósneusis* del epiciclo

> En todo lo concerniente a los fenómenos en la posición de sicigia y cuadratura de la Luna, la discusión precedente va a permitir una explicación completa de la hipótesis que elucida los círculos de la Luna descritos arriba. Pero a partir de observaciones individuales tomadas en las distancias de la Luna [respecto del Sol] cuando se encuentra en forma de hoz o gibosa (lo que ocurre cuando el epiciclo se encuentra entre el apogeo y el perigeo de la excéntrica), encontramos que la Luna tiene una característica peculiar asociada a la dirección [prósneusis] hacia la cual el epiciclo apunta (V, 4; H1 367; 226-227).

Con estas palabras Ptolomeo comienza el capítulo 5 del libro V, y en ellas nos indica al mismo tiempo tanto la esencia del problema que encontró luego de confeccionar el segundo modelo lunar como la del camino que tomó para solucionarlo. Por un lado, nos dice que la nueva dificultad sigue estando asociada a la elongación del epiciclo lunar, pues indica expresamente que se manifiesta en las posiciones de Luna gibosa. Por el otro, adelanta que, en su interpretación del problema, la cuestión está relacionada con "la dirección hacia la cual el epiciclo apunta". De hecho, allí se encuentra la clave de su solución. Pero primero debemos entender a qué se está refiriendo.

Cuando un planeta –en este caso la Luna– gira sobre un epiciclo, es necesario, si se desea medir su velocidad o el arco a través del cual se movió en un tiempo determinado, fijar un punto de referencia. Cuando la Luna vuelve a ese punto se puede decir que ha dado una revolución sobre el epiciclo. Este punto no es otro que el apogeo del epiciclo. Un modo sencillo de determinar ese punto es trazar una recta que pase por el centro de la eclíptica y el centro del epiciclo. El apogeo será aquel punto donde la recta corte al epiciclo en su parte más lejana de la Tierra. En la figura 13, por ejemplo, este punto es Z. En ese sentido, se puede decir que el epiciclo está "apuntando" a la Tierra, pues la línea que une al apogeo con el centro del epiciclo pasa, por construcción, por el centro de la Tierra. El perigeo, por supuesto, es el punto opuesto en el epiciclo: el punto H en la figura 13. Enfrentado al nuevo problema, Ptolomeo va a replantear el modo de definir el apogeo lunar, llegando a un resultado no exento de sorpresa.

Si bien Ptolomeo hace referencia a muchas observaciones[19], hace explícita mención de solo dos, ambas hechas por Hiparco, y realizadas cuando la Luna se encontraba en dos elongaciones distintas aunque siempre en Luna gibosa. En el artículo solo vamos a desarrollar los cálculos a partir de la primera de ellas, puesto que la otra solo tiene como función confirmarlos.

Hiparco observó[20], en nuestro 2 de mayo del -126, que

(23) el Sol se encontraba a 37;45°,

(24) la longitud aparente de la Luna era 351;40°.

Hiparco registró además la longitud *verdadera* de la Luna, luego de corregir el efecto de paralaje, y dice que

(25) la longitud verdadera de la Luna era 351;27,30°.

Por lo tanto en el momento de la observación

(26) la elongación de la Luna respecto al Sol era 313;42°.

Luego Ptolomeo calcula, a partir de sus modelos, las longitudes del Sol, del Sol medio y de la Luna media para el momento de la observación. Las tablas le indican que

(27) el Sol medio se encontraba a 36;41° de longitud,

(28) el Sol se encontraba a 37;45° de longitud, tal como Hiparco había registrado,

[19] V, 5; H1 368; 227.
[20] Es la observación número 49 en la lista de (Pedersen, 2010, p. 415).

(29) la Luna media se encontraba a 352;13° de longitud,

y

(30) la posición en anomalía de la Luna sobre el epiciclo era 185;30° respecto del apogeo del epiciclo.

Entonces, a partir de (28) y (29) se obtiene que

(31) la elongación de la Luna media respecto del Sol era 314;28°, es decir, se encontraba en un octante.

Con estos datos Ptolomeo nos pide que construyamos la siguiente figura: determinar la excéntrica ABG con centro en D y diámetro ADG, en el cual E representa el centro de la eclíptica. Luego determinar el círculo del epiciclo ZHΘ con centro en B de tal modo que EΘBZ estén alineados y ∠AEH>∠AEΘ. Luego trazar la recta DK de tal modo que sea perpendicular a EB y K se encuentre sobre EB. A continuación unir BH y EH, prolongando esta última hasta el punto L, donde la recta BL es perpendicular a EH. Finalmente, determinar el punto M sobre el epiciclo de tal modo que quede más cerca de Z que H, pero más lejos que el punto de movimiento medio, es decir, el punto donde una recta que pasa por E es tangente al epiciclo. Luego determinar la recta BH y el punto N donde BH intersecta al diámetro ADG. Por último trazar la recta EX del tal modo que sea perpendicular a BN, y X esté sobre BN.

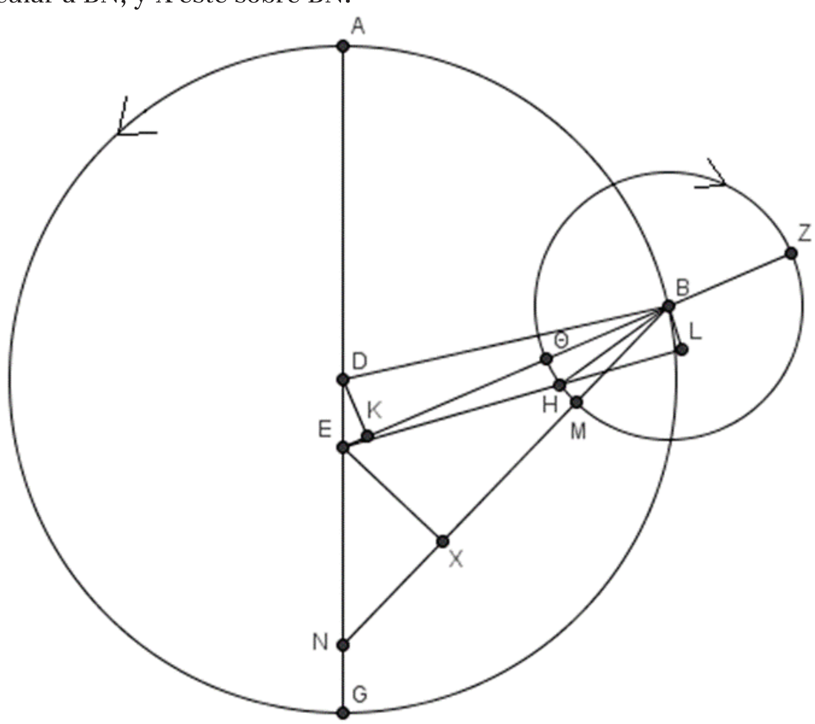



**Figura 14.** (P) Diagrama para la determinación de la prósneusis lunar.

A continuación Ptolomeo, brevemente, nos guía a través del camino que lo llevó a descubrir el extraño fenómeno que refiere respecto de la “dirección” del epiciclo lunar. La clave está en decubrir una inconsistencia entre los datos observacionales y aquellos parámetros que surgen de su modelo. Puntualmente, Ptolomeo va a mostrar que hay problemas en compatibilizar el ángulo de anomalía indicado en (30) con la relación entre las longitudes de la Luna media –indicada en (29)– y de la Luna verdadera –indicada en (25).

Si observamos los tres valores referidos, vamos a ver que la longitud de la Luna verdadera es menor que la longitud de la Luna media. En la fig. 14 la Luna está representada por H, mientras que la Luna media, es decir, el centro del epiciclo, es B. Dado el sentido del movimiento en el deferente, vemos que esta relación entre ambas longitudes está correctamente representada. Sin embargo, si observamos el valor del ángulo de anomalía, representado en el diagrama por el ángulo ∠ZBH, encontramos que este es superior a 180°. Obviamente, puesto que la referencia para el ángulo de anomalía es el apogeo Z, cualquier valor para ese ángulo que supere ese límite coloca a la Luna verdadera del lado del epiciclo donde su longitud observada va a ser mayor que la de la Luna media. Si se pretende respetar la relación entre las dos longitudes mencionadas arriba, esto no es posible. Por otro lado, si se busca representar adecuadamente el ángulo de anomalía, entonces será imposible respetar esa relación. En algún lugar, entonces, hay un problema. Los siguientes pasos están dirigidos a aclarar y explicar cuál es la solución de Ptolomeo a este problema.

El valor que necesita averiguar para presentar su solución es el ángulo ∠ΘBH. Ese ángulo pertenece al triángulo EBH, del cual puede averiguar el ángulo ∠BEH, pues es la ecuación de anomalía que se deriva a partir de las posiciones de la Luna verdadera y media. Si además averigua el ángulo ∠BHL, que se forma por la prolongación de uno de los lados del triángulo, entonces puede calcular ∠ΘBH. Ahora bien, ∠BHL pertenece al triángulo rectángulo BHL, cuya hipotenusa es el radio del epiciclo, para el cual Ptolomeo ya conoce el valor. Un modo de resolver el triángulo rectángulo es averiguando un cateto, en este caso, BL. El cateto BL también pertenece al triángulo rectángulo EBL, para el cual conoce la ecuación de anomalía ∠BEL. Para resolverlo, solo necesita conocer la hipotenusa BE. Ahora bien, BE es la suma de BK y EK, por lo que conociendo a estos conocerá a aquel.

Respecto de BK, este es uno de los catetos del triángulo rectángulo BDK, cuya hipotenusa es el radio del deferente excéntrico, para el cual Ptolomeo ya conoce su valor. Si averigua el valor del cateto DK, entonces a través del teorema de Pitágoras ya puede calcular BK. El cateto DK pertenece también al triángulo rectángulo DEK, para el cual Ptolomeo conoce la hipotenusa DE, pues es la excentricidad del deferente, ya calculada anteriormente. Una de las posibilidades para resolver el triángulo rectángulo es calcular el valor del ángulo ∠BED=∠BEA, el cual es conjugado de ∠AEB, por lo que conociendo el último se conoce el primero. El valor de ∠AEB, finalmente, se deriva directamente de la velocidad calculada para el centro del deferente excéntrico.

Respecto de EK, el camino es sencillo. En el mismo cálculo en el que se soluciona el triángulo rectángulo DEK, se obtiene el valor del otro cateto, que no es otro que EK. A continuación voy a exponer los cálculos ptolemaicos.

La velocidad que Ptolomeo obtuvo para el centro del deferente excéntrico asegura que el ángulo ∠AEB es igual a dos veces la elongación media. Ahora bien, a partir de (27) y (29) es posible calcular que la elongación media en ese momento era 315;32°. El valor de ∠AEB es, entonces, 271;4°.[21] Por lo tanto

(32) el valor del ángulo ∠BEA=∠BED, conjugado del anterior, es 88;56°.

Respecto del triángulo rectángulo DEK, puesto que se conoce que el valor de la excentricidad DE es 10;19$^p$, y a partir del valor obtenido en (32), se obtiene trigonométricamente que

(33) DK≈10;19p

y que

(34) EK=0;12p.

A partir del valor obtenido para DK, y sabiendo que el radio DB del deferente excéntrico es 49;41$^p$, se puede aplicar Elem. I 47 al triángulo rectángulo BDK, de tal modo que se obtiene

(35) BK=$\sqrt{49;41^{p^2}+10;19^{p^2}}$=48;36p.

Sumando los valores obtenidos en (34) y (35) obtenemos que

(36) BE=48;48p.

Luego Ptolomeo calcula la ecuación de anomalía a través de la comparación de las elongaciones de la Luna verdadera y la Luna media al Sol verdadero en el momento de la observación. Estos valores son los indicados en (26) y (31), y la comparación indica que

(37) en ese momento la ecuación de anomalía tenía un valor de -0;46°.

Este es el valor, entonces, del ángulo ∠BEH=∠BEL. De este modo puede resolverse el triángulo rectángulo EBL: a partir de (36) y (37) se obtiene trigonométricamente que

(38) BL=0;39$^p$.

A partir de BL, y conociendo el valor del radio BH, que es igual a 5;15$^p$, Ptolomeo puede resolver el triángulo rectángulo BHL. De ese modo, obtiene trigonométricamente que

(39) ∠BHL=7;7°.

Finalmente, respecto del triángulo EBH, dado que conoce el ángulo ∠BEH, cuyo valor de 0;46° averiguó en (37), y dado que HL es una prolongación del lado EH del triángulo, puede aplicar Elem. I 32, y obtener que

(40) ∠EBH=6;21°.

[21] Obviamente se debe restar 360° al resultado original. El ángulo del que se habla, por supuesto, sigue el sentido de movimiento del epiciclo sobre el deferente.

Ahora bien, dado que desde un observador en E la longitud de la Luna media es igual a la del perigeo, entonces ∠EBH=∠ΘBH, con lo cual ese ángulo expresa el arco que separa a la Luna del perigeo del epiciclo.

Como indiqué anteriormente, el ángulo de anomalía que Ptolomeo deriva de sus tablas lunares es incompatible con la diferencia entre la longitud de la Luna media, que también deriva de sus tablas, y la longitud de la Luna verdadera, que es producto de la observación. En principio, Ptolomeo tiene tres salidas, que consisten en suponer que alguno de los tres parámetros está errado. O bien sus tablas derivan ángulos de anomalía o longitudes equivocadas, o bien la observación misma de la Luna no fue hecha con precisión. Inesperadamente, Ptolomeo decide confiar en sus tablas y observaciones, y no descartar ninguno de los tres datos. El camino que decide es mucho más ingenioso.

Como vimos antes, el apogeo y el perigeo del epiciclo son definidos por el punto de vista del observador terrestre. Sus mismos nombres así lo indican: mientras que el primero es el el punto del epiciclo más lejano a la Tierra, el segundo es el más cercano. El ángulo de anomalía es luego definido en relación a esos puntos, siendo usado como punto de referencia, usualmente, el apogeo. Así es como se ubica a la Luna en el epiciclo. Lo que Ptolomeo hace es invertir completamente el orden de referencias, y utilizar como punto de partida a la posición de la Luna sobre el epiciclo, para, a partir de ella, calcular la posición del apogeo y del perigeo. Por último, calculará la posición del punto exterior al epiciclo hacia el que el mismo "apunta". En términos de la fig. 14 podemos decir que Ptolomeo mantiene al mismo tiempo tanto que la Luna verdadera se encuentra en una longitud menor que la Luna media por 0;46°, como que el ángulo de anomalía es 185;30°. El cambio lo introduce al redefinir *respecto de qué punto se mide el ángulo de anomalía*. Asumiendo que la posición de la Luna sobre el epiciclo que se deriva de sus parámetros de longitudes es la correcta, es decir, que la Luna efectivamente se encuentra a 6;21° del perigeo del epiciclo, decide que el punto de referencia para medir el ángulo de anomalía es un nuevo punto, ubicado a 185;30° de la Luna, y que llamará *apogeo medio*, diferenciándolo así del antiguo apogeo, que llamará de ahora en más *apogeo verdadero*. El modo concreto a través del cual Ptolomeo efectúa esta redefinición de la noción de apogeo y perigeo es indicar que el perigeo medio, representado en el diagrama por M, se encuentra a 5;30° de la Luna H y, por adición de ∠ΘBH y ∠HBM, a 11;51° del perigeo verdadero Θ.

Dado que cualquier modificación al segundo modelo debe conservar todos los aspectos exitosos que viene acumulando hasta ahora, el lugar hacia el que siempre "apunta" el epiciclo, esto es, el punto que junto al centro del epiciclo define el apogeo medio y que aquí está representado por N, debe necesariamente encontrarse en la línea absidal. Esta configuración es la única que permite que en las sicigias y en las cuadraturas el nuevo apogeo medio coincida con el apogeo original: si se observa la figura 14, cuando el centro del epiciclo B se halla en A –en las sicigias– o en G –en las cuadraturas– las líneas EB y NB coinciden. El punto en cuestión debe además girar en torno a la Tierra en el mismo sentido y a la misma velocidad angular que el centro del deferente, pues solo así encontraremos una misma explicación para todos los fenómenos en los octantes lunares. La única pregunta que cabe es identificar en qué lugar de la línea absidal se halla ese punto N. Ptolomeo determina ese lugar buscando cuál es la distancia EN.

El segmento EN pertenece al triángulo rectángulo ENX, el cual puede ser resuelto si se conoce el cateto EX y el ángulo ∠ENB.

Respecto de EX, es también un cateto del triángulo rectángulo BEX, del cual se conoce el valor de BE. Si además se averigua el valor de ∠EBX, es posible resolverlo. El ángulo ∠EBX es fácil de obtener, pues no es otra cosa que la suma de los ángulos ∠ΘBH y ∠HBM, que ya se conocen.

Respecto del ángulo ∠ENB, pertenece al triángulo EBN. Puesto que anteriormente ya se obtuvo el valor del ángulo ∠EBX, que también pertenece al mismo triángulo, solo resta calcular el valor de ∠BEN, el último de los tres ángulos. Pero ∠BEN es el ángulo suplementario de ∠BEA, cuyo valor ya se conoce, por lo que puede derivarse fácilmente. A continuación voy a exponer los cálculos ptolemaicos.

El ángulo ∠EBX es la suma de los ángulos ∠ΘBH y ∠HBM, que valen 6;21° y 5;30°, respectivamente, por lo que se obtiene que

(41) ∠EBX=11;51°.

Entonces, respecto del triángulo rectángulo BEX, a partir de la hipotenusa obtenida en (36) y el ángulo obtenido en (41) se deriva trigonométricamente que

(42) EX=10;2$^p$.

Por otro lado, en (32) se obtuvo que ∠BEA=88;56°, por lo que

(43) ∠BEN, el ángulo conjugado de ∠BEA, es igual a 180°-88;56°=91;4°.

Entonces respecto del triángulo EBN, a partir de (41) y (43), y gracias a Elem. I 32 se obtiene que

(44) ∠ENB=77;5°.

Finalmente, respecto del triángulo rectángulo ENX, por el cateto obtenido en (42) y el ángulo obtenido en (44), se deriva trigonométricamente que

(45) EN=10;18$^p$.

Puesto que por el valor de la excentricidad es 10;19$^p$ y N está como se mostró antes, sobre la línea absidal, encuentra que N se halla en el punto opuesto de la excentricidad respecto de D, el centro del deferente[22]. Este resultado sin duda causó sorpresa a Ptolomeo, que concluye con estas líneas:

> Así estas observaciones confirman la peculiar característica de la dirección del epiciclo en la hipótesis de la Luna: la revolución del centro del epiciclo toma lugar en torno a E, el centro de la eclíptica, pero el diámetro del epiciclo que define el punto inmutable sobre el epiciclo en el cual el apogeo medio del epiciclo apunta, no (como sí lo hace en los otros [planetas]) hacia E, el centro de movimiento uniforme, sino hacia N, que está desplazado en la dirección

[22] Ptolomeo muestra, como se dijo, el mismo cálculo con la Luna en otro octante, y obtiene un valor de EN de 10;20°. Puesto que, nos dice, a partir de otros cálculos obtiene valores que rondan los 10;19°, ajusta el valor de EN a ese número.

opuesta por una cantidad igual a DE, la distancia entre los centros (V, 5; H1 379-380; 222-223).

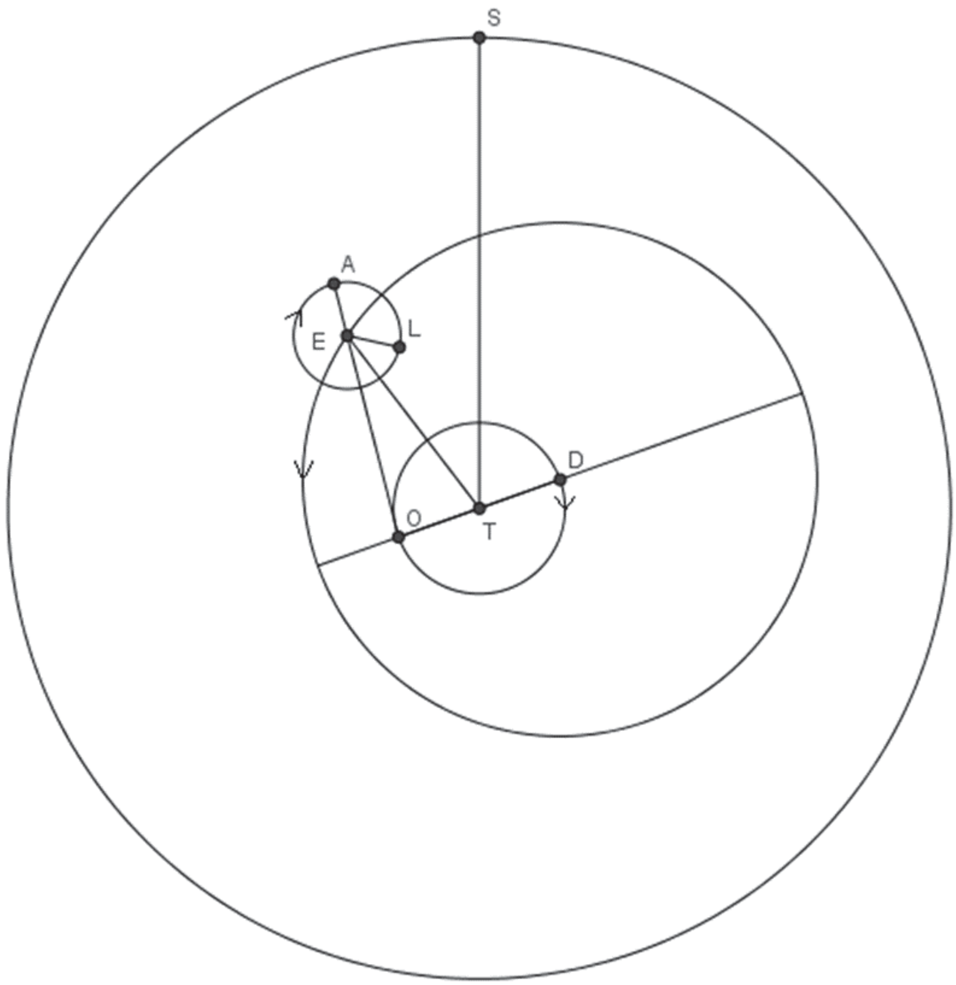



**Figura 15.** Modelo final de Ptolomeo para las longitudes lunares. T es el centro de la eclíptica, en torno al cual gira el centro del deferente D en sentido horario, el punto O que determina la dirección del epiciclo y es opuesto a D en la excentricidad también se mueve en sentido horario, y el centro del epiciclo E en sentido antihorario. En torno a E gira la Luna en sentido horario, y su giro se cuenta a partir del apogeo medio A, que está determinado por la línea OE. Como referencia para las longitudes se indica el deferente medio solar, con el Sol medio S. Las velocidades han sido indicadas antes.

## 7. Conclusión

La teoría de las longitudes lunares, como dije al inicio, es una de las partes más complejas e interesantes del *Almagesto*. Ptolomeo no solo muestra en plenitud su talento para aplicar la geometría de la época a problemas astronómicos, sino que manifiesta su espíritu creativo de un modo supremo. El análisis que hace de la manifestación de la segunda anomalía en las cuadraturas implica no solo un largo trabajo de recolección de datos, sino también una gran capacidad para captar regularidades y patrones que le permitieran conceptualizar adecuadamente el problema. En ese sentido, para decirlo en términos de Kuhn, Ptolomeo fue un eximio *puzzle solver*. Al estudiar el modelo lunar uno no puede sino imaginar la familiaridad con la que el astrónomo alejandrino se manejaba con los movimientos circulares y uniformes que enmarcaban la tarea de todo astrónomo de aquellos tiempos.

Una reflexión más detenida acerca de estos libros muestra, sin embargo, algo más. Si bien sería exagerado decir que Ptolomeo rompió con los límites fundamentales con los cuales la astronomía griega constreñía al sabio, sí creo que es legítimo afirmar que supo, por decirlo de algún modo, flexibilizarlos de acuerdo a las necesidades que, en su opinión, los fenómenos imponían. Un ejemplo típico es la redefinición del concepto de apogeo del epiciclo. Mientras que tradicionalmente este punto era el más alejado a la Tierra, y solo accidentalmente funcionaba como punto de referencia para medir el movimiento en anomalía, Ptolomeo decide que esta última función sea la que lo define esencialmente, e ignora completamente el obvio origen de la noción de apogeo.

El ejemplo más claro, sin embargo, creo que lo representa la separación del centro de velocidad uniforme respecto del centro geométrico de movimiento. Esta maniobra, que como vimos ni siquiera merece un comentario de parte de Ptolomeo, desafiaba algunas de las bases más fundamentales que mantenían –aunque con dificultades, es verdad– unidas a la física y la astronomía. Los astrónomos islámicos que lo seguirían por más más de siete siglos lo percibieron con claridad, y lucharon hasta el final por unificar a las dos disciplinas separadas por el gran astrónomo.

El segundo modelo presenta también algunos de los flancos más interesantes para los debates epistemológicos en torno a la obra ptolemaica. Su solución para la segunda anomalía en las cuadraturas, si bien exitosa respecto de las longitudes, muestra a una Luna cuya distancia a la Tierra varía dramáticamente: mientras que puede alcanzar una distancia máxima de $65;15^p$, también puede acercarse a tan solo $34;7^p$ del centro de la Tierra. Una variación semejante produciría cambios tan grandes en el diámetro aparente de la Luna que no podrían ser ignorados. De hecho, no suceden. Y Ptolomeo no pudo no haberse dado cuenta de ello.[23] ¿Significa esto que los modelos ptolemaicos solo buscaban la predicción certera de las posiciones celestes, sin buscar una descripción verdadera del κόσμος? Uno de los últimos grandes historiadores de la astronomía que así lo consideran es Pierre Duhem, quien nos dice que "[...] Ptolomeo pretende indicar [...] que los muchos movimientos que compone en el Almagesto para determinar la trayectoria de un planeta no tienen ninguna realidad física [...]" (Duhem, 1969, p. 17). La cuestión sin embargo, tiene otra cara: cuando Ptolomeo, en el capítulo 13 del libro V, se propone calcular la distancia lunar por medio de mediciones de paralaje, elige, de entre todas las posibilidades, el momento en que la Luna se halla prácticamente en una cuadratura, como si hubiera buscado el momento en que la Luna, según le indica su modelo, estaba más cerca de la Tierra, y por tanto la paralaje producía efectos más notables. La cuestión queda abierta.

[23] Esta dificultad del modelo ptolemaico para la Luna fue objeto de numerosas críticas y reformas. Copérnico, por ejemplo, soluciona el mismo problema a través de un epiciclo adicional (Swerdlow, 1973, pp. 454 y ss.).

El modelo de Ptolomeo para las longitudes de la Luna es, pues, una parte central del *Almagesto* no solo por el lugar que ocupa en el edificio argumentativo construido por el gran astrónomo griego, sino también porque en él se revelan, como condensadas en unas cuantas páginas, muchas de las cuestiones más complejas, interesantes y revolucionarias que la astronomía antigua tiene para ofrecer.

**Agradecimientos:** Quiero agradecer particularmente a los Dres. Christián Carman, Diego Pelegrin y Aníbal Szapiro por sus sugerencias para mejorar este artículo. Además, las sugerencias de un evaluador anónimo fueron muy útiles para aclarar algunos puntos del argumento.

## 8. Bibliografía

Aristarco (1913). Aristarchus of Samos on the Sizes and Distances of the Sun and Moon. En *Aristarchus of Samos the Ancient Copernicus* (T. L. Heath, Trans., pp. 351-411). Oxford: Clarendon Press.

Barker, A. (1989). *Greek Musical Writings: II. Harmonic and Acoustic Theory.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bowen, A., & Todd, R. (2004). *Cleomedes´ Lectures on Astronomy: A Translation of The Heavens.* Los Angeles: University of California Press.

Britton, J. P. (1992). *Models and Precision; The Quality of Ptolemy´s Observations and Parameters*. New York: Garland Publishing.

Carman, C. C. (2009). Rounding numbers: Ptolemy´s calculation of the Earth-Sun distance. *Archives for the History of Exact Sciences*(63), pp. 5-242.

Carman, C. C. (2010). La refutabilidad del sistema de epiciclos y deferentes de Ptolomeo. *Principia: Revista Internacional de Filosofía, 14*(2), pp. 211-239.

Delambre, J. B. (1817). *Histoire de l´Astronomie Ancienne* (Reimp. New York, 1965. ed.). Paris.

Duhem, P. (1969). *To Save the Phenomena: an essay on the idea of physical theory from Plato to Galileo* (E. Dolan, & C. Maschler, Trad.). Chicago: The University of Chicago Press.

Duke, D. (2002). Dating the Almagest star catalogue using proper motions: a reconsideration. *Journal for the History of Astronomy, XXXIII*(1), pp. 45-55.

Duke, D. (2005). The Equant in India: The Mathematical Basis of Ancient Indian Planetary Models. *Archives for the History of the Exact Sciences*(59), 563-576.

Duke, D. (2007). The Second Lunar Anomaly in Ancient Indian Astronomy. *Archives for the History of the Exact Sciences*(61), pp. 147-157.

Euclides. (1991). *Elementos* (M. L. Puerta Castaños, Trad.). Madrid: Gredos.

Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy.* New York: Oxford University Press.

Goldstein, B. (1967). The Arabic Version of Ptolemy´s Planetary Hypotesis. *Transactions of the American Philosophical Society*, pp. 3-55.

Goldstein, B., & Bowen, A. (1999). The role of observation in Ptolemy´s lunar theories. En N. M. ed. Swerdlow, *Ancient astronomy and celestial divination* (pp. 141-159). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Halma, t. (1813-16). *Ptolémée: Composition Mathématique, Traduite pour la premiére fois du grec en français par M. Halma (avec le texte grec) et suivie des notes de M. Delambre* (Reimp. 1927 ed.). Paris.

Hamilton, N., Swerdlow, N., & Toomer, G. (1987). The Canobic Inscription: Ptolemy´s Earliest Work. En J. L. Berggren, & B. R. Goldstein (Eds.), *From Ancient Omens to Statistical Mechanics* (pp. 55-73). Copenhague: University Library.

Hanson, N. (1960). The mathematical power of epiciclical astronomy. *Isis, 51*(2), pp. 150-158.

Heiberg, J. L. (1898-1903). *Syntaxis Mathematica.* Leipzig: Teubner.

Langer, R. E. (1941). Alexandria: Shrine of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 48*(2), pp. 109-125.

Luce, J. V. (1988). Greek Science in its Hellenistic Phase. *Hermathena*(145), pp. 23-28.

Neugebauer, O. (1957). *The Exact Sciences in Antiquity* (Segunda ed.).Brown University Press. Copenhagen:

Neugebauer, O. (1975). *The History of Ancient Mathematical Astronomy*. Springer-Verlag.

Newton, R. (1977). *The Crime of Claudius Ptolemy.* Baltimore: The John Hopkins University Press.

North, J. (2008). *Cosmos: an Illustrated History of Astronomy and Cosmology*. Chicago: University of Chicago Press.

Pedersen, O. (1974). *A survey of the Almagest.* Odense University Press.

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: with annotation and new commentary by Alexander Jones*. (A. Jones, Ed.) New York: Springer.

Petersen, V. (1969). The Three Lunar Models of Ptolemy. *Centaurus, 14*(1), pp. 142-171.

Ptolomeo, C. (1898-1903). *Syntaxis Mathematica.* (J. L. Heiberg, Ed.) Leipzig: Teubner.

Ptolomeo, C. (1940). *Tetrabiblos.* (F. Robbins, Trans.) Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Ptolomeo, C. (1984). Almagest. In G. Toomer, *Ptolemy´s Almagest* (G. Toomer, Trans., pp. 27-659). Princeton: Princeton University Press.

Ptolomeo, C. (1987). *Hipótesis planetarias.* (Perez Sedeño, Trans.) Madrid: Alianza.

Ptolomeo, C. (1989). Harmónica. En A. Barker (Ed.), *Greek Musical Writings: Harmonic and Acoustic Theory* (Vol. II, pp. 275-391). Cambridge: Cambridge University Press.

Ptolomeo, C. (1989). Harmonics. En A. Barker, *Greek Musical Writings: II. Harmonic and Acoustic Theory.* (A. Barker, Trad., pp. 270-391). Cambridge: Cambridge University Press.

Ptolomeo, C. (1989). Ptolemy on the Criterion: An Epistemology for the Practising Scientist. En e. Huby, & Neal, The Criterion of Truth: Essays written in honour of George Kerferd together with a text and translation (with annotations) of Ptolemy's On the Kriterion and Hegemonikon (A. A. Long, Trad., pp. 151-178). Liverpool.

Saliba, G. (1994). *A History of Arabic Astronomy: Planetary Theories During the Golden Age of Islam*. New York: New York University Press.

Swerdlow, N. (1973). The Derivation and First Draft of Copernicus's Planetary Theory: A Translation of the Commentariolus with Commentary. *Proceedings of the American Philosophical Society, 117*(6), pp. 423-512.

Swerdlow, N. M. (1979, Autumn). Ptolemy on trial. *The American Scholar, 48*(4), pp. 523-531.

Taub, L. C. (1993). *Ptolemy´s Universe: the Natural Philosophical and Ethical Foundations of Ptolemy´s Astronomy*. Chicago: Open Court.

Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy´s Almagest.* (G. J. Toomer, Ed., & G. J. Toomer, Trans.) Princeton: Princeton University Press.

van Helden, A. (1985). *Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from Aristarchus to Halley.* Chicago: University of Chicago Press.