La longitud lunar en el *Almagesto* de Ptolomeo: el primer modelo

Gonzalo Luis Recio[1]

Recibido: 2 de agosto de 2018
Aceptado: 29 de octubre de 2018

Resumen. El *Almagesto* constituye la obra cumbre de la astronomía antigua. Allí Ptolomeo sintetizó los trabajos anteriores, y avanzó en nuevos campos. Su teoría lunar, en los libros IV y V, es una de las secciones más complejas de toda la obra. Luego de distinguir el tratamiento de los problemas asociados a los cambios de latitud y longitud lunar, Ptolomeo se embarca en la solución a lo que él llamo la primera anomalía lunar, esto es, la variación de la velocidad en longitud de la Luna que depende solo de su posición en la eclíptica. Utilizando antiguas observaciones y métodos babilónicos, y combinándolos con métodos de control y corrección propios, Ptolomeo determina tanto la velocidad media de la Luna como su velocidad en anomalía. A partir de esos valores es capaz de construir un modelo complejo de epiciclo y deferente, donde determina cuáles son los tamaños relativos de cada círculo componente del mismo, e incluso las posiciones de cada elemento móvil –el centro del epiciclo y la propia Luna– en una determinada época elegida.

Palabras clave: Ptolomeo – Almagesto – teorías lunares en la antigüedad – período de Saros – Hiparco – primera anomalía lunar.

Title: Lunar longitude in Ptolemys *Almagest*: the first model

Abstract.The *Almagest* is the culminating work of ancient astronomy. There Ptolemy brings all previous work into a coherent synthesis, and advanced on new fields. His lunar theory, in books IV and V, is one of the most complex sections in the *Almagest*. After separating the treatment of the problems associated to the lunar changes in latitude and longitude, Ptolemy embarks in the search for a solution to what he called the first anomaly, that is, the variation in lunar longitudinal velocity which depends only from its position on the ecliptic. Using ancient observations and Babylonian methods, and combining them with control and correction methods of his own invention, Ptolemy determines both the mean velocity of the moon and its anomalistic velocity. From those values he is capable of constructing a complex model of deferent and epicycle, where he determines what are the relative sizes of each component circle, and even the positions of every mobile element in the model –the center of the epicycle and the moon itself– in a chosen epoch.

Keywords: Ptolemy – Almagest – lunar theories in antiquity – Saros period – Hipparchus – first lunar anomaly.

---

[1] Universidad Nacional de Quilmes. Universidad Pedagógica Nacional.
✉ gonzalorecio@hotmail.com
Recio, Gonzalo Luis (2018). La longitud lunar en el Almagesto de Ptolomeo: el primer modelo. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 3(1), 32-60. ISSN: 2525-1198. (https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/index)

1. Introducción

Claudio Ptolomeo fue, sin dudas, el astrónomo más influyente de toda la antigüedad griega. El *Almagesto*, su obra astronómica más relevante, se cuenta entre los clásicos de la historia de la ciencia. Como señala Neugebauer, quizá el historiador de la astronomía más importante del siglo XX, "[...] uno no puede leer un solo capítulo de Copérnico o Kepler sin un conocimiento profundo del *Almagesto* de Ptolomeo" (1957, pp. 3-4).[2] Ptolomeo vivió en la primera mitad del siglo II d.C. en la región septentrional de Egipto, en ese entonces bajo dominio romano. Si bien sus obras ejercieron una influencia incalculable a través de la historia de la ciencia, su vida parece haber transcurrido al margen de los sucesos políticos más notables de la época. Lo poco que podemos conocer, debemos preguntárselo a él mismo: son sus obras las que otorgan los escasos indicios disponibles. En el libro IV, capítulo 9, Ptolomeo nos deja la anotación más temprana que pudo haber hecho de las que constan en el *Almagesto*: nos habla de un eclipse lunar ocurrido en nuestro actual 5 de abril del 125 (IV, 9; H1 329; 206).[3] La observación más tardía que consta en el *Almagesto* está fechada en el actual 2 de febrero del 141, y se refiere a la máxima elongación oeste de Mercurio (IX, 7; H2 263; 449), la cual es medida según su distancia a Antares. El *Almagesto*, por lo tanto, debió de haber sido finalizado en una fecha posterior a esta última observación. Sabemos además que Ptolomeo siguió trabajando, pues el propio *Almagesto* es mencionado en otras obras como las *Hipótesis Planetarias* (Ptolomeo, 1987 y Goldstein B., 1967) y el *Tetrabiblos* (Ptolomeo, 1940). A partir de todo esto podemos estimar que los años de nacimiento y muerte corresponden aproximadamente con el 100 y el 165. Gran parte de su labor científica fue realizada en la propia Alejandría. Es Ptolomeo mismo quién nos avisa que muchas de las observaciones fueron hechas desde allí. El uso de la Biblioteca constituyó, obviamente, un gran atractivo para un astrónomo de aquellos tiempos: encontramos en el *Almagesto* registros que anteceden a Ptolomeo por varios siglos: eclipses lunares del año -720 observados en Babilonia (IV, 6; H1 302; 191), solsticios de verano registrados por Metón y Euctemón en Atenas en el año -432 (III, 1; H1 205; 138).

El *Almagesto* es una obra fenomenal. Su estilo es el propio de una Alejandría donde, por ejemplo, Euclides había sintetizado toda la geometría anterior en sus *Elementos*. El trabajo ptolemaico, que tenía por nombre original Μαθηματικὴ Σύνταξις (Toomer, 1984, p. 1)[4], *Sintaxis Matemática*, constituyó un resumen de todos los logros griegos precedentes en el estudio de los astros.

---

[2] Salvo que se indique lo contrario, todas las traducciones al castellano son propias. En el caso particular del *Almagesto*, mis dos fuentes principales son la traducción al inglés de Gerald Toomer y la edición crítica en griego de Heiberg.

[3] Utilizaré como referencia para las citas la edición clásica de Heiberg y la traducción al inglés de G. Toomer. El número romano indica el libro, el arábigo, el capítulo. El tomo de la traducción de Heiberg consta a continuación de la H, y luego el número de página en el mismo. Por último, el número de página en la traducción de Toomer. En este caso, es el libro 4, capítulo 9, en el primer tomo de Heiberg, página 329. En la traducción de Toomer, en la página 206.

[4] En Pedersen (2010, p. 15), encontramos un título original distinto: Μαθηματικῆς Σουντάξεως βιβλια τγ, *Los 13 libros de las colecciones matemáticas*. Sugiere una modificación posterior hacia Μεγάλη σύνταξις, *Gran Sintaxis*.

Con la decadencia del imperio romano occidental también el *Almagesto* conoció su ocaso. Tenemos, de esos años, apenas algunos pocos pero valiosos comentarios. Luego de la aparición de la alta cultura islámica a fines del siglo VIII, no obstante, el *Almagesto* retomó su papel central. Es entonces cuando adquiere su nombre actual, a partir del superlativo griego de μεγάλη (*megále*), μεγίστη (*megíste*). La contracción del adjetivo con el artículo árabe ال (*ál*) nos lleva a *ál–megíste*: nuestro al actual *Almagesto*.

El *Almagesto* consta de trece libros, cada uno dividido en capítulos. El primer libro es una suerte de fundamentación general tanto del instrumental matemático que va a usar como de la estructura general del cosmos acerca del cual va a hablar en el resto de la obra. El libro II continúa mostrando cómo utilizar las sombras proyectadas por el Sol para realizar cálculos respecto de su posición, además de exponer algunas características relevantes de los movimientos de las estrellas y sus relaciones con el horizonte, la eclíptica y el ecuador. Todo esto le permitirá, en el libro III, desarrollar un modelo solar preciso. Los libros IV y V están dedicados el tema principal de este artículo: la Luna. Luego de la teoría de los eclipses que expone en el libro VI, el libro VII da comienzo al tratamiento que Ptolomeo hace de las estrellas. En ese libro Ptolomeo muestra que la inmensa mayoría de las estrellas –todas excepto cinco– mantienen posiciones relativas fijas. El fenómeno conocido en la actualidad como *precesión de los equinoccios* también es tratado allí, y, de acuerdo con su antecesor niceno, Hiparco, Ptolomeo llega incluso a asignarle una velocidad de 1° por siglo.[5] En el libro VIII Ptolomeo expone su catálogo estelar[6], donde agrupa a las estrellas fijas visibles desde su región en cuarenta y ocho constelaciones y hace constar las coordenadas celestes de cada una de ellas. Los restantes libros están dedicados a la investigación de los movimientos de las cinco estrellas errantes, los planetas, y a la construcción de modelos adecuados para ellas.

La ubicación de los libros dedicados a la Luna no es casual, sino que forma parte de la gradual construcción teórica que constituye el *Almagesto*. Construir un modelo lunar implica poder ubicar las coordenadas celestes de la Luna para cualquier momento. Por motivos que veremos después, las únicas observaciones en las que Ptolomeo confía para comenzar a construir sus modelos son los eclipses lunares, en tanto pueden determinar con exactitud la posición de la Luna respecto del Sol: obviamente, en esos momentos la Luna se halla a 180° de elongación. El astrónomo desarrolla entonces su teoría lunar solo después de haber construido un modelo exitoso para el Sol, pues así, utilizando al propio Sol como referencia, podrá determinar las coordenadas celestes de la Luna. La Luna servirá muchas veces, a su vez, como referencia para localizar las coordenadas celestes de planetas y estrellas fijas: es por ese motivo que su estudio vendrá después en la estructura de la obra.

Los libros dedicados a la teoría lunar constituyen, para un historiador de la astronomía antigua, una ventana a la práctica científica de Ptolomeo. Allí el astrónomo de Alejandría no nos presenta un modelo terminado. En este caso va explicando las dificultades con las que él y sus antecesores se fueron topando, los caminos por los cuales fueron salvándolas, y cómo esos avances fueron a su vez desafiados por nuevos

---

[5] El valor aceptado en la actualidad es de 1° cada 71,6 años.
[6] Sobre el origen del catálogo estelar del *Almagesto* hay gran debate. Cfr., como obra de referencia, (Grasshof, 1990), así como (Duke, 2002).

problemas: el texto nos transmite al menos un eco del combate que los movimientos lunares presentaron a Ptolomeo.

Este artículo se limita, por cuestiones de espacio, al primer modelo lunar, esto es, a la sección que Ptolomeo dedica a solucionar la primera anomalía de la Luna. Un trabajo subsiguiente y complementario se ocupará específicamente de los diversos y complejos aspectos del segundo modelo. Con este artículo pretendo comenzar cubrir algunas lagunas en la bibliografía sobre el tema. En primer lugar no existe en idioma castellano una obra donde se desarrolle en detalle el itinerario que Ptolomeo expone en el *Almagesto* para el modelo de la Luna. Hay que señalar que en las últimas décadas aparecieron diversas obras en lengua inglesa que se ocupan de exponer la teoría lunar del *Almagesto*: por ejemplo, Pedersen (1974), Neugebauer (1975) y Petersen (1969)[7]. Todas estas obras, sin embargo, tratan el tema utilizando formas que responden más a la matemática contemporánea que a la que manejaba y en la cual se expresaba Ptolomeo. Ese modo de exponer las teorías antiguas, si bien tiene obvias ventajas de concisión, vela en cierto modo la *forma mentis* antigua y evita que podamos comprender cabalmente al investigador de los cielos que está separado de nosotros por casi dos milenios. En ese sentido este artículo buscar ceñirse, sin abandonar la claridad, a los argumentos presentes en el *Almagesto*, tal y como los encontramos en el *Almagesto*: explicando sus pasajes claros y didácticos y aclarando sus pasajes más sintéticos, las referencias supuestas a los *Elementos* de Euclides, los pasos argumentativos implícitos en las demostraciones. Para ello voy a respetar el orden y el instrumental ptolemaicos, aunque utilizando los símbolos matemáticos contemporáneos.[8] Este modo de explicar la teoría ptolemaica tiene la ventaja adicional de servir como guía a quien quiera entrar en contacto directo con el texto original.

El artículo está dividido de la siguiente manera: primero dedico una sección a explicar, de modo sintético, los instrumentos trigonométricos más importantes que Ptolomeo utiliza en el desarrollo del modelo lunar. La segunda sección está dedicada a explicar los motivos por los cuales Ptolomeo utiliza eclipses lunares para comenzar a construir el modelo. La tercera está dedicada a la cuestión del cálculo de los períodos de los movimientos medios de la Luna. La cuarta se ocupa de describir los datos observacionales utilizados por Ptolomeo al inicio del desarrollo de su teoría lunar y de explicar los motivos por los cuales el astrónomo adopta una determinada estructura general para el modelo. En la quinta sección se expone el modo por el cual Ptolomeo obtiene los primeros parámetros del modelo: los radios correspondientes al deferente y al epiciclo. En la sexta se explica cómo el astrónomo obtiene la posición de la Luna y del centro del epiciclo para un momento determinado en el tiempo. De ese modo es capaz de calcular, gracias a los valores de los movimientos medios que ya mostró con anterioridad, la posición de esos dos elementos para la *época*[9] que elige para todos sus modelos. Este cálculo es el que se expone en la séptima parte del artículo. En esa sección, además, se

[7] En su *The History and Practice of Ancient Astronomy* (1998), Evans, llamativamente, omite completamente el modelo lunar.
[8] En esto último sigo a Toomer quien, por ejemplo, traduce con el signo igual (=) ciertas expresiones ptolemaicas equivalentes.
[9] El concepto de *época* será explicado en la sección 7.

explica el método de Ptolomeo para corroborar y/o corregir los valores de los movimientos medios de la Luna, mostrando cuál es el alcance y los límites del mismo.

2. Trigonometría ptolemaica

Los capítulos 10 y 11 del libro I están dedicados a la herramienta más fundamental de toda la astronomía matemática de Ptolomeo: la trigonometría. La función fundamental de la trigonometría griega antigua era la *cuerda*, que describe la relación que hay entre la longitud de un segmento que corta a una circunferencia de un radio dado, y el ángulo que el segmento subtiende.

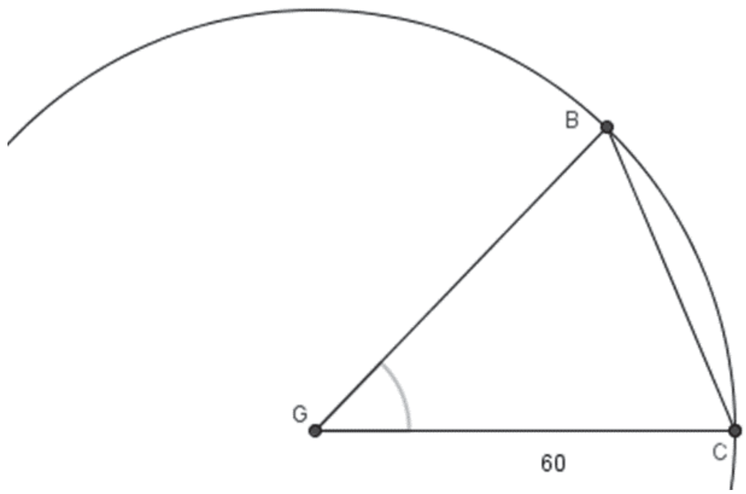

Figura 1. Diagrama de una cuerda. Si se conoce el radio GC(=GB) y ∠BGC, se puede calcular la cuerda BC.

Ptolomeo explica en esa parte de la obra los métodos para calcular las cuerdas[10] de diversos ángulos, y construye su *tabla de cuerdas* (I, 11; H1 48-63; 57-60). Esta tabla está constituída por tres columnas. En la primera Ptolomeo indica el valor del arco para el cual se determina la cuerda, con incrementos de $\frac{1}{2}$ grado en cada fila. En la segunda columna indica la longitud de la cuerda asociada a ese arco, supuesto un radio del círculo de 60 unidades de medida arbitrarias que llamará *partes.*[11] En la tercera columna Ptolomeo indica cuánto más larga será la cuerda correspondiente a ese medio grado por cada minuto de arco adicional. El cálculo de cuerdas, como cualquier operación trigonométrica, es complejo, y su explicación detallada excede los límites y el interés de este artículo. Sí es relevante a nuestro tema, sin embargo, la relación íntima que hay entre la trigonometría con cuerdas y la resolución de triángulos rectángulos.

[10] Hay que tomar en cuenta, entonces, la diferencia entre la noción de *cuerda* y aquella de la función homónima. Mientras que por *cuerda* se entiende el segmento indicado, la *función cuerda*, o *crd*, denota la relación entre un ángulo medido desde el centro del círculo y el *segmento cuerda* que le corresponde.

[11] La notación que voy a usar para expresar cifras en el sistema sexagesimal usado por Ptolomeo es aquella popularizada por Neugebauer (1957, p. 13, nota 1). En ella los enteros están separados de las fracciones por un punto y coma (;), mientras que todas las demás posiciones sexagesimales están separadas por comas (,). Así 9;45,32° significa 9 grados, 45 minutos, 32 segundos.

Una vez que Ptolomeo ha calculado las cuerdas correspondientes a cada uno de los setecientos veinte intervalos de arco de su tabla, está en condiciones de saber, para cada ángulo medido desde el centro de la circunferencia, cuál es la cuerda correspondiente, y viceversa. Por ejemplo, en la fig. 1, puede conocer la relación entre ∠BGC y BC, dado un lado GC de 60^p.

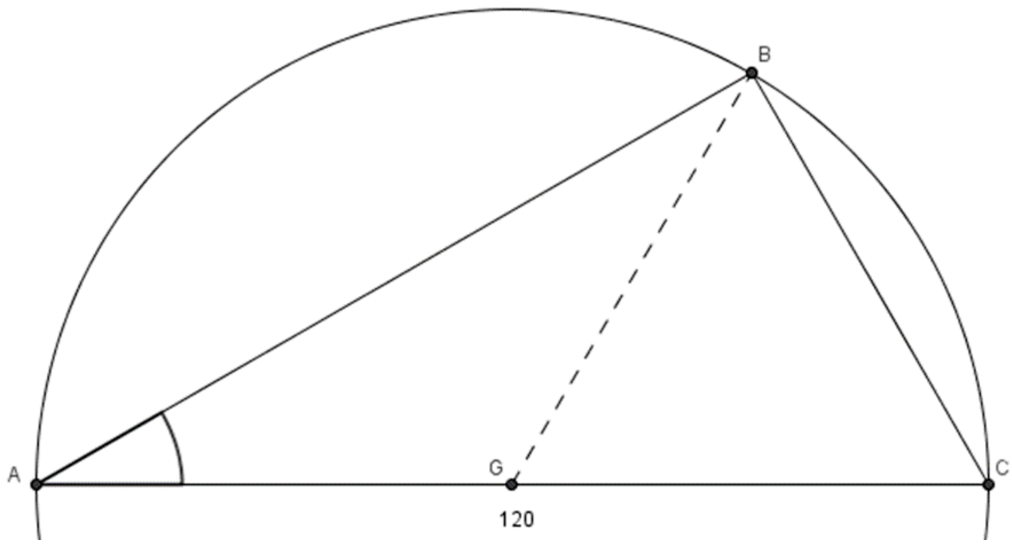

Figura 2. Diagrama de una cuerda como cateto de un triángulo rectángulo.

Ahora bien, supongamos que tomamos la misma cuerda BC y la medimos no desde el centro de la circunferencia, sino desde el punto opuesto a C, el punto A (fig. 2). Gracias a *Elementos* III 20[12] sabremos que ∠BAC es igual a la mitad de ∠BGC, y gracias a Elem. III 31 sabremos que el punto B, opuesto al diámetro de la circunferencia, es el vértice de un ángulo recto. La conexión entre la función cuerda y la resolución de triángulos rectángulos queda así clara: dado un triángulo rectángulo del cual conocemos un ángulo y la longitud de su hipotenusa, podremos conocer el valor del cateto opuesto al ángulo conocido simplemente multiplicando por dos el ángulo y buscando el valor de la cuerda correspondiente al ángulo resultante en una tabla construida tomando como base un diámetro de la circunferencia igual a la hipotenusa. Si la información inicial es el valor del cateto, entonces el camino es el inverso. La función puede expresarse, entonces, dado un ángulo α, como $crd\ 2\alpha = cateto\ opuesto$.

Esta relación clarifica entonces un aspecto importante de la trigonometría ptolemaica: explica que Ptolomeo constantemente busque reducir los problemas geométricos que las observaciones y sus modelos le planteen a problemas de resolución de triángulos rectángulos, y que siempre que lo haga suponga que la hipotenusa es igual a 120^p, aunque ya conozca por otros medios el valor de ese segmento. En esas situaciones Ptolomeo primero realiza el cálculo trigonométrico y luego, a través de una regla de tres simple, normaliza todo al valor conocido previamente. A este respecto es conveniente una aclaración: si bien en el artículo iremos recorriendo cada paso que Ptolomeo da con los triángulos rectángulos, voy a omitir en la explicación esta clase de conversión desde y

[12] Las referencias a los Elementos de Euclides se indicarán como *Elem.*, seguida del número del libro y la proposición correspondiente.

hacia el valor de 120^p necesario para aplicar su tabla de cuerdas. Como veremos, los argumentos ptolemaicos están sin embargo plagados de suposiciones de valores y normalizaciones a patrones de medida que son completamente ineludibles. Estos casos, obviamente, van a estar debidamente explicados.

En su utilización de triángulos rectángulos Ptolomeo realiza repetidamente una operación que, de ahora en más, será llamada *método del doble triángulo rectángulo*. La operación es sencilla, y tiene como objetivo hallar un lado de un triángulo cualquiera a partir del valor de dos de sus ángulos y de uno de sus lados. Supongamos un triángulo DEA (fig. 3), para el cual conocemos el valor de los ángulos ∠ADE y ∠EAD, el valor del lado DE, y queremos conocer el lado AE. En primer lugar se determina un segmento EZ perpendicular al lado que ni conocemos ni necesitamos conocer –en este caso DA–, y que pase por el vértice opuesto al mismo –en este caso el punto E. Este segmento será llamado, de ahora en más, *divisor*. De ese modo quedarán determinados los dos triángulos rectángulos que dan nombre al método: en nuestro ejemplo, los triángulos rectángulos EDZ y EAZ. En el caso de que el lado cortado por el divisor sea el lado más largo del triángulo la figura resultante será una con dos triángulos rectángulos que solo comparten ese segmento divisor. En el caso de que el lado cortado no sea el mayor, la figura resultante consistirá en dos triángulos rectángulos que compartirán no solo el divisor, sino el ángulo recto, y además uno estará incluido en el otro. En ambos casos los dos lados relevantes, esto es, el conocido y el buscado, son las dos hipotenusas de los triángulos rectángulos resultantes.

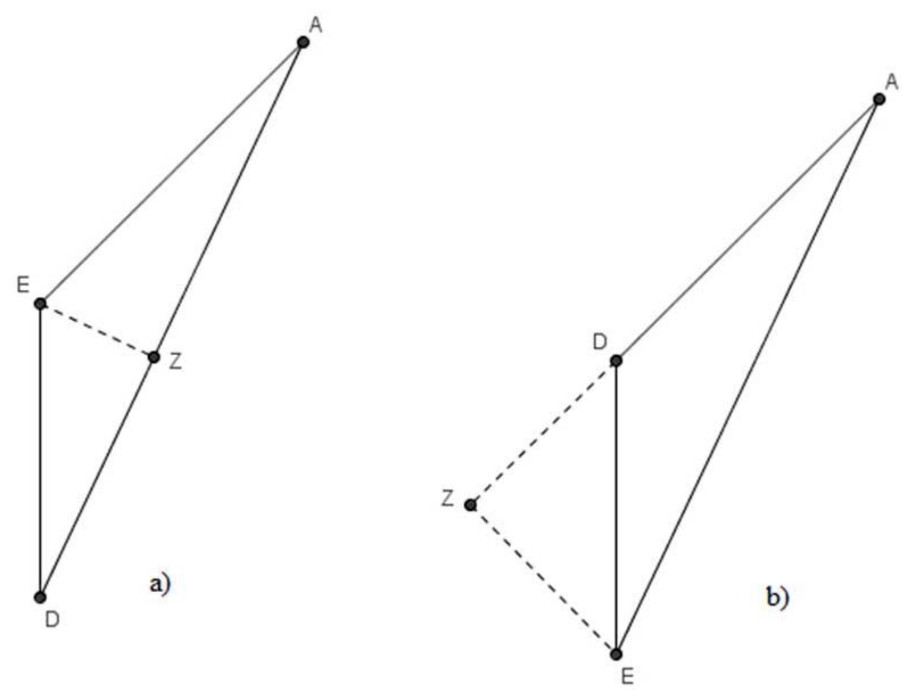

Figura 3. Diagramas de las dos posibles construcciones resultantes de la aplicación del método del doble triángulo rectángulo.

No interesa cuál de los dos casos se dé pues el método procede del mismo modo en ambos. Lo que se busca es utilizar el segmento divisor como "término medio" entre los dos triángulos rectángulos, para así poder obtener el valor de la hipotenusa de uno de ellos a partir del valor de la hipotenusa del otro. En nuestro ejemplo vamos a comenzar con el triángulo rectángulo DEZ. Conocido el valor de DE y del ángulo ∠ADE[13], es posible, a través de la aplicación de la función cuerda, obtener el valor del divisor EZ. Luego se supone un valor arbitrario para la otra hipotenusa EA y se calcula el valor del segmento divisor EZ, que es también opuesto al otro ángulo conocido, ∠EAD. Ahora se tienen dos valores para EZ, ambos según distintas unidades de medida fundadas, cada una, en los valores de las hipotenusas. Típicamente Ptolomeo mantiene el valor del divisor que se apoya en el valor de la primera hipotenusa, y normaliza la segunda hipotenusa a ese valor a través de una regla de tres simple.

3. La relevancia de los eclipses lunares para el primer modelo

Ptolomeo comienza el libro IV diciéndonos que, al momento de comenzar a construir un modelo lunar, las únicas observaciones adecuadas son los eclipses lunares, y esto porque

> [...] estas son las únicas observaciones que le permiten a uno determinar la posición lunar de manera precisa: todas las demás, ya sea que estén medidas a partir de pasajes cerca de alguna estrella fija, o [de observaciones con] instrumentos, o a partir de eclipses solares, puede contener un error considerable debido a la paralaje lunar." (IV, 1; H1 265; 173).

La causa de estos problemas radica en el hecho de que la distancia desde el centro de la Tierra hasta el observador no es despreciable en comparación con la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna, como sí lo es en el caso de los demás planetas. Por ello, si en la fig. 4 medimos la posición de L, el centro de la Luna, respecto del fondo de estrellas desde T, el centro de la Tierra, encontraremos que el valor de la longitud[14] de L es P_1. Si hacemos lo mismo desde un punto S_0 sobre la superficie de la Tierra, encontraremos que el valor es P_0. El único caso en el que un observador sobre la superficie encontrará la misma posición que uno ubicado en el centro de la Tierra es aquel en el que el primero tenga a la Luna en su cénit, pues eso significa que se encuentra en un punto S_1, justo sobre la línea TL. La paralaje, como puede apreciarse, va entonces creciendo a medida que la Luna se aleja del cénit, llegando a su máximo cuando está sobre el horizonte.

[13] En el caso del diagrama b) de la figura 3, para aplicar la función cuerda hay que obtener primero ∠ZDE. Esto se obtiene, obviamente, como 180°-∠ADE.

[14] Estrictamente, la *longitud* de un objeto es una de las dos coordenadas con las cuales se ubica a un objeto en la esfera celeste. Si suponemos que el objeto en cuestión se encuentra sobre la eclíptica, su longitud se expresará como la distancia angular entre ese objeto y un punto de referencia en la eclíptica, que en el *Almagesto* es el lugar de la misma en la cual se encontraba el Sol en el equinoccio de marzo, llamado Aries 0°. Si el objeto no se encuentra sobre la eclíptica, su longitud se expresa como la distancia angular entre Aries 0° y el punto donde una línea perpendicular a la eclíptica y que pasa por el objeto corta a la eclíptica.

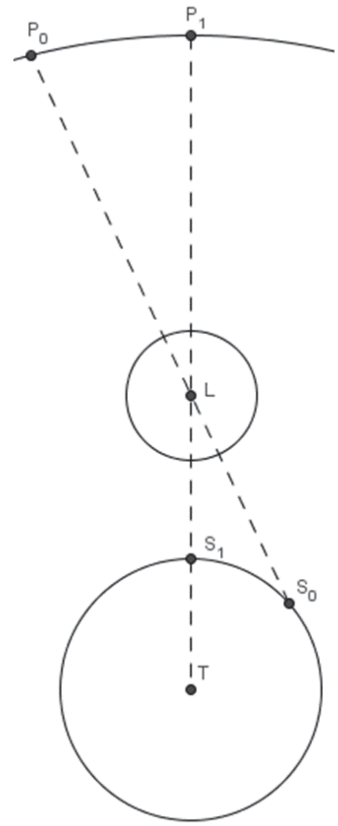

Figura 4. Diagrama del efecto de la paralaje lunar en las mediciones de longitud.

El caso de los eclipses solares presenta un problema similar, también causado por la cercanía de la Luna, solo que aquí la paralaje no se percibe respecto del fondo de estrellas fijas, sino respecto del Sol. Si en la fig. 5 estamos ubicados en el punto S_0 sobre la superficie terrestre, entonces veremos un eclipse solar total. Si estamos ubicados en S_1, el eclipse será parcial. Si, por último, estamos ubicados en S_2, no veremos ningún eclipse.

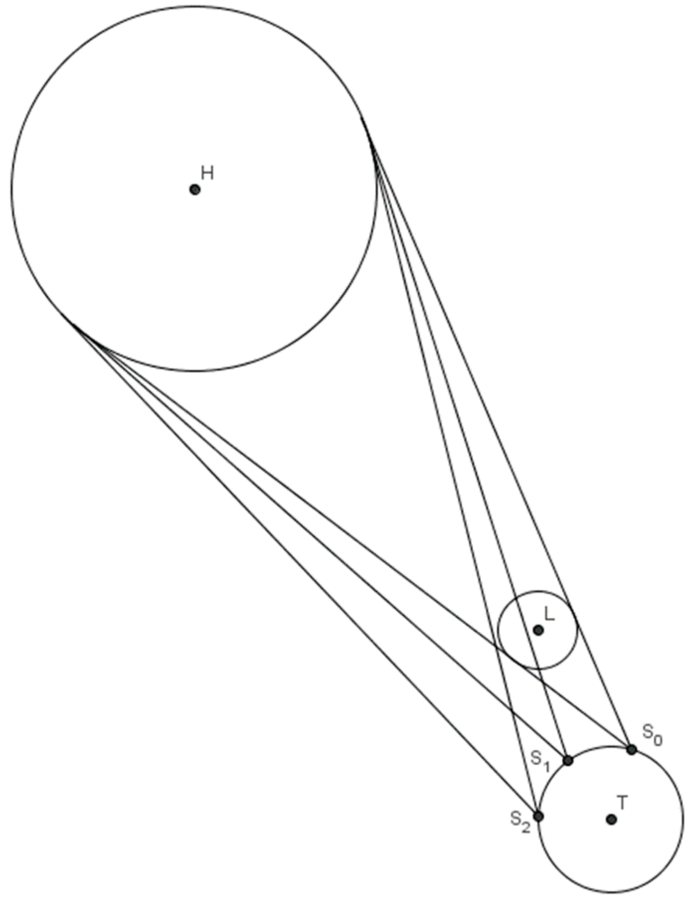

Figura 5. Diagrama del efecto de la paralaje lunar en los eclipses solares.

En el caso de los eclipses lunares, sin embargo, la paralaje no incide en los aspectos relevantes de la observación de los mismos pues, como dice Ptolomeo, "[...] la posición del observador no es una causa que contribuya a lo que sucede en un eclipse lunar" (IV, 1; H1 267; 174). Esto porque el eclipse lunar comienza en el instante en que la Luna entra en el cono de sombra que la Tierra permanentemente proyecta al obstruir la luz solar, y finaliza cuando sale de él. En la fig. 6 todos los observadores que por su posición en la superficie terrestre tengan a la Luna sobre el horizonte, por ejemplo, tanto S_0 como S_1, podrán observar el fenómeno en el mismo momento y del mismo modo sin importar su latitud ni longitud terrestres.

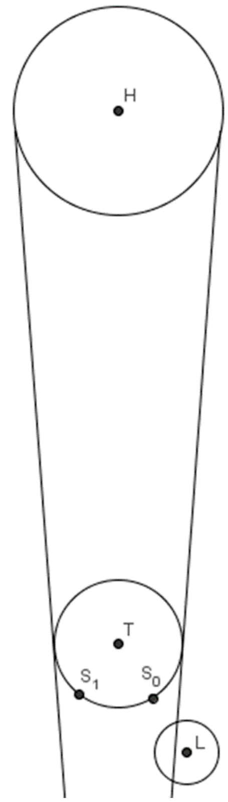

Figura 6. Diagrama en el cual se aprecia la carencia de incidencia de la paralaje lunar en la observación de un eclipse lunar.

Puesto que una teoría lunar busca poder predecir lo que Ptolomeo llama *posiciones verdaderas* de la Luna, esto es, las posiciones relativas entre los centros terrestre y lunar, entonces los eclipses lunares se vuelven los fenómenos por excelencia a ser utilizados, al menos al inicio de la construcción del modelo. No solo el eclipse se observará al mismo tiempo desde cualquier punto sobre la superficie desde el cual el mismo sea visible, sino que además sabemos que, en el momento central del eclipse, los centros solar, terrestre y lunar estarán perfectamente alineados. Así, el eclipse lunar es una oportunidad única para conocer un valor verdadero de la longitud lunar más allá de nuestra posición sobre la Tierra, puesto que por la teoría solar previa ya se conoce con exactitud la posición del Sol.

4. Los períodos de la Luna

El primer paso para poder construir un modelo de la Luna es la determinación de los períodos lunares. Como señala el propio Ptolomeo, casi todos los astrónomos anteriores a él se habían dado cuenta de que la Luna presenta una anomalía en su movimiento (IV, 5; H1 294; 180), es decir, no se mueve uniformemente alrededor del centro de la Tierra. El Sol había presentado un problema similar que se manifestaba en la duración desigual de las estaciones. El caso de la Luna es sin embargo más complejo: mientras que la anomalía solar tenía un período de retorno igual al período de retorno en longitud media[15], en el caso de la Luna el primero es más largo que el segundo. Esto causa, como dice Ptolomeo, que "[...] la velocidad media de la Luna puede ocurrir en cualquier parte de la eclíptica, al igual que su máxima velocidad o su mínima velocidad [...]"(IV, 2; H1 269; 175). El motivo de esto es simple: dado que el ciclo de anomalía es más largo que el ciclo en longitud media, entre dos momentos donde la Luna alcanza su máxima velocidad, por ejemplo, va a pasar más tiempo que el que tarda en volver a recomenzar su movimiento en longitud media. De ese modo el punto de velocidad máxima va a ir "adelantándose" un poco en el Zodíaco por cada revolución que dé.

Dadas estas dificultades, Ptolomeo se ve obligado a seguir un camino más sutil, camino que ya había sido transitado por Hiparco, quien a su vez obtuvo su inspiración, al menos en los fundamentos empíricos, de la astronomía babilónica.

> [...] los astrónomos antiguos, por buenos motivos, intentaron hallar algún período en el que el movimiento en longitud de la Luna fuera siempre igual, puesto que solo en un período así puede darse un retorno en anomalía. Por ello compararon observaciones de eclipses lunares (por las razones mencionadas arriba), e intentaron ver si había un intervalo, constituído por un número entero de meses, de tal modo que, sin importar entre qué puntos uno tomara ese intervalo, la duración del período siempre fuera la misma, y también lo fuera el movimiento en longitud, o bien el mismo número entero de revoluciones, o bien el mismo número de revoluciones más el mismo arco (IV, 2; H1 269; 175).

El momento central de un eclipse lunar es el momento exacto de Luna llena, por lo que entre dos eclipses lunares siempre hay un número entero de meses sinódicos.[16] Si se encuentra un período de tiempo tal que, si en un extremo hay un eclipse, en el otro también lo habrá, entonces se sabrá que en ese período la Luna habrá avanzado la misma longitud.[17]

Ya los antiguos babilonios habían hallado un período de 223 meses sinódicos que cumple esas condiciones –hoy conocido como ciclo de Saros–, el cual había sido corregido

[15] La *longitud media* de un objeto es la longitud que tendría si se moviera a su velocidad media en torno a la Tierra. El "período de retorno" del Sol es el tiempo que le toma volver a la misma velocidad en su ciclo de variación de velocidad: por ejemplo, el tiempo en que le toma al Sol en volver a moverse a su máxima velocidad angular a través de la eclíptica. El "período de retorno en longitud media" del Sol es el tiempo en que la longitud media del Sol tarda en volver al mismo valor. En el contexto de la astronomía epicíclica estos dos períodos están usualmente asociados al movimiento del planeta sobre el propio epiciclo, y al movimiento del epiciclo mismo sobre el deferente, respectivamente. Por ello en ese contexto es posible hablar de un *movimiento en longitud en anomalía*, esto es, el movimiento del planeta sobre el propio epiciclo, y de un *movimiento en longitud media*, esto es, el movimiento del centro del epiciclo sobre el deferente.

[16] Un mes sinódico es el período entre dos momentos en los que la distancia angular entre el Sol y la Luna es igual: por ejemplo entre dos Lunas llenas, cuando esta distancia es de 180°, o dos Lunas nuevas, cuando es de 0°.

[17] Ptolomeo aclara que esto no puede ser aceptado *simpliciter*, sino que hay que tomar ciertos recaudos al elegir el par de eclipses. Cfr. IV, 2; H1 273-276; 177-178 y (Neugebauer, 1975, pp. 71-72). Respecto del método indicado, como se dijo, es necesario que entre dos eclipses lunares haya una cantidad entera de meses sinódicos. Ptolomeo, sin embargo, está diciendo que además, si se halla un ciclo como el indicado se habrá hallado también un ciclo en el cual tanto el avance en anomalía como el avance en movimiento medio es siempre el mismo. La justificación de este presupuesto, que es central en el argumento y no se halla explicitada en el *Almagesto*, es compleja, y excede a este artículo. Cfr., para una introducción al tema, (Pedersen, 2010, pp. 161-164).

por Hiparco, que da un valor de 126007 días y una hora. En ese tiempo Ptolomeo nos dice que están contenidos 4267 meses sinódicos y 4573 retornos en anomalía.[18] Puesto que en cada mes sinódico la Luna avanza 360° en longitud más el avance del Sol durante el ese período, entonces para calcular cuántos meses trópicos[19] –es decir, cuánto avanzó en longitud la Luna– transcurrieron es necesario, simplemente, calcular cuánto avanzó el Sol durante 126007^d1^h y sumarlo a las 4267 revoluciones sinódicas. La teoría solar ptolemaica le permite calcular esto con exactitud.[20] El resultado que Ptolomeo da es 4612 revoluciones menos 7½°.

A partir de esos valores Ptolomeo deriva los valores diarios de los movimientos en longitud y en anomalía, y luego les aplica una corrección propia, cuya justificación deja para el final de su exposición sobre el primer modelo de la Luna.[21] Los valores finales que toma como base son:

1) Movimiento en longitud media –de ahora en más VEpi–: $13;10,34,5833,30,30^{\circ/d}$.
2) Movimiento en anomalía –de ahora en más VLun–: $13;3,53,56,17,51,59^{\circ/d}$.

5. El *input* observacional del primer modelo para las longitudes y su esquema general

En el capítulo 6 del libro IV Ptolomeo comienza diciéndonos que va a demostrar de qué manera un modelo de epiciclo y deferente puede dar cuenta de la anomalía lunar. Los modelos de este tipo consisten en un círculo llamado deferente sobre el cual se mueve, a la velocidad del movimiento en longitud media, un punto que es el centro de otro círculo. Es sobre este segundo círculo, llamado epiciclo, sobre el cual el astro se mueve realmente según la velocidad del movimiento en anomalía. El movimiento del astro sobre el epiciclo es el causante de la anomalía, que queda explicada como un efecto de perspectiva: habrá ciertos momentos en los que al observador terrestre le parecerá que el astro se mueve más velozmente a través del Zodíaco porque ambos movimientos se suman, mientras que en otros momentos le parecerá que lo hace de modo más lento porque el segundo se resta al primero.

El esquema básico de epiciclo y deferente no indica, de por sí, en qué sentido deben moverse sus elementos: esto es algo que debe ser determinado al momento de

[18] Como señala (Pedersen, 2010, p. 163 nota 3), es más sencillo contar la cantidad de meses sinódicos que la cantidad de retornos en anomalía. El texto ptolemaico sugiere, sin embargo, que los cambios de velocidad en la Luna eran de tal magnitud que podían ser objeto de observación directa: "[…] a partir de observaciones individuales aparece que la velocidad media de la Luna puede ocurrir en cualquier parte de la eclíptica, al igual que su máxima velocidad o su mínima velocidad […]" (IV, 2; H1 269; p. 175). Cfr (Neugebauer, 1975, p. 71).

[19] El mes trópico, a diferencia del sinódico, no se mide en referencia al Sol, sino a la eclíptica. Así, el mes trópico es el período entre dos momentos en los que la distancia angular entre la Luna y Aries 0° es igual.

[20] Aunque contaba con los medios para hacer el cálculo, Ptolomeo toma el valor de Hiparco, que tiene origen babilónico. Cfr. Pedersen (2010, p 163).

[21] La justificación se halla en IV, 7; H1 324-325; 204. Su explicación, de acuerdo al orden impuesto por el propio Ptolomeo, se halla al final del artículo.

aplicarlo según cada caso. En el de la Luna, al igual que en el caso del Sol, Ptolomeo determina que el sentido del movimiento del astro sobre el epiciclo es el inverso del sentido de movimiento del epiciclo sobre el deferente. Si bien no da ninguna razón explícita para construir el modelo de este modo, sí lo hace en el caso del Sol (III, 3; H1 220-221; 146), y también hace algo semejante más adelante al explicar el motivo por el que en los modelos planetarios el sentido es idéntico para ambos movimientos (IX, 5; H2 250-251; 442), por lo que a partir de esos casos es posible reconstruir el razonamiento ptolemaico para el caso de la Luna.

En un modelo de epiciclo y deferente la velocidad media del astro es alcanzada siempre que el mismo se encuentra en un punto del epiciclo donde una recta que pasa por el observador es tangente al epiciclo. Esto significa, obviamente, que hay dos momentos por revolución del astro sobre el epiciclo en los cuales el astro tiene una velocidad instantánea igual a la velocidad media.

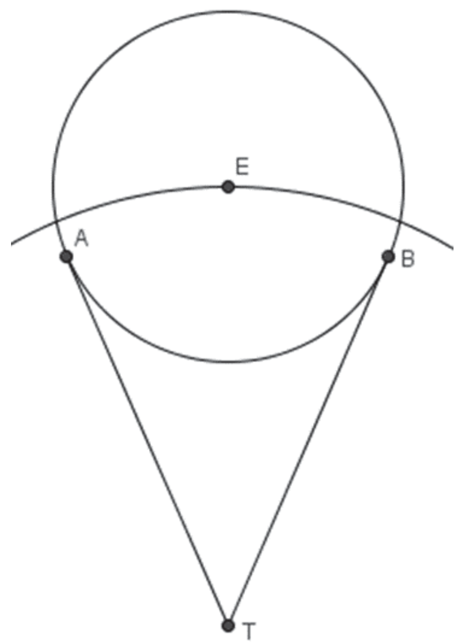

Figura 7. Diagrama de los puntos donde la velocidad del astro es igual a la media.

En la fig. 7 un observador ubicado en el centro T del deferente observará que cuando un astro ubicado sobre el epiciclo se encuentra instantáneamente en A o en B, entonces su velocidad será la media, es decir, igual a la velocidad uniforme del centro E del epiciclo. Ptolomeo no demuestra este hecho en ningún lugar del *Almagesto*, y aparentemente lo considera algo conocido por cualquier lector. Si bien una demostración rigurosa que siga los métodos ptolemaicos excede el espacio y los objetivos de este artículo, se puede apreciar intuitivamente que, sin importar el sentido de movimiento del astro sobre el epiciclo, en esos dos puntos es donde, desde el punto de vista del observador en T, el astro pasa de moverse en una dirección sobre el epiciclo para comenzar a moverse en la otra. Por tanto en ese punto no se está moviendo ni en una dirección ni en otra. El único movimiento que lo afecta en esos instantes, pues, es el movimiento del centro E sobre el deferente, lo que hace que tanto el astro en cuestión como E tengan la misma velocidad, que es por supuesto la media. Por el mismo motivo es posible percibir que la velocidad aparente se alejará de la media a medida que el astro se aleje de los puntos A y B, alcanzando la distancia máxima a éstos en los puntos intermedios entre ambos.

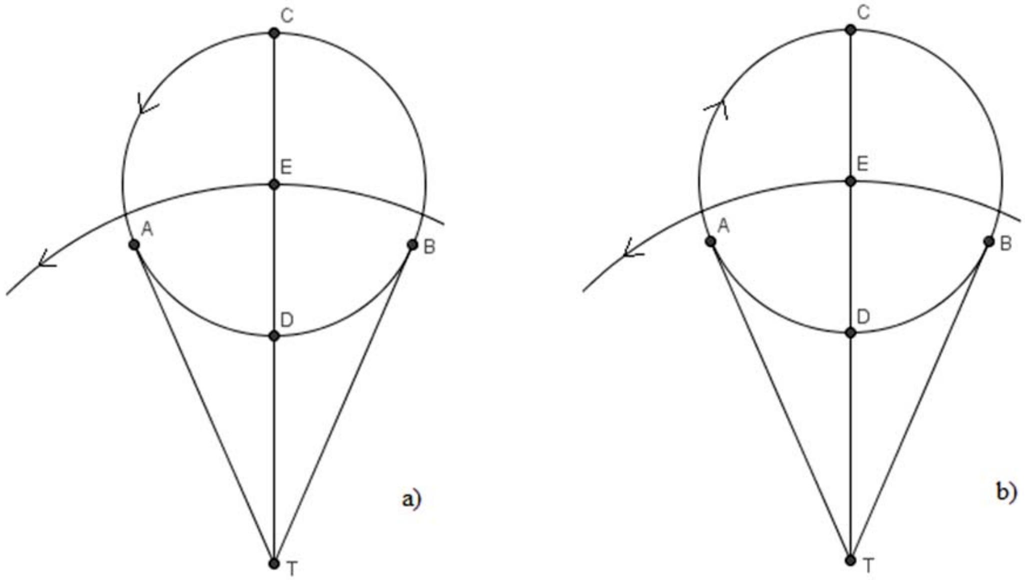

Figura 8. Diagramas de los puntos donde se dan las velocidades máxima y mínima según los sentidos de movimiento.

En la fig. 8 estos dos puntos están identificados como C y D, que no son otra cosa que el apogeo y perigeo del epiciclo, respectivamente. Para conocer cuál de los dos corresponde a la velocidad máxima, y cuál a la mínima, solo hace falta conocer los sentidos de movimiento de E sobre el deferente y del astro sobre el epiciclo. El astro alcanzará su máxima velocidad aparente cuando llegue a uno de estos dos puntos mientras se está moviendo, desde el punto de vista del observador, en la misma dirección que el epiciclo sobre el deferente, y alcanzará la mínima cuando suceda lo contrario. En el diagrama a) de la fig. 8 la velocidad máxima se dará cuando el astro llegue a C y la mínima cuando llegue a D, mientras que en el diagrama b) se dará el fenómeno inverso. Las posiciones de los puntos de velocidad media, no obstante, son idénticas en ambos modelos. Por lo tanto podemos identificar que, puesto que el movimiento del astro en el epiciclo es uniforme, en el modelo del diagrama a) va a transcurrir más tiempo en las velocidades medias y la velocidad máxima que entre las mismas y la velocidad mínima, pues el arco BCA es obviamente mayor que el arco BDA. Lo contrario sucederá en el diagrama b). Lo que Ptolomeo muy probablemente hizo es el camino inverso y determinó, a partir de las observaciones, si el intervalo entre la velocidad máxima de la Luna y su velocidad media es menor que aquél entre su velocidad mínima y la media. El texto del *Almagesto* indica que había llevado a cabo cuidadosas observaciones a este respecto.[22] Luego de hallar que efectivamente ese es el caso, pudo determinar el sentido del movimiento de la Luna sobre epiciclo como siendo contrario al sentido de movimiento del epiciclo sobre el deferente. Puesto que el movimiento de la Luna es, aunque con las

[22] Cfr. nota 18.

variaciones producidas por la anomalía, siempre en el sentido de los signos, ese será el sentido del movimiento del epiciclo sobre el deferente, mientras que la Luna se moverá sobre el epiciclo en el sentido contrario a ellos.

Una vez obtenida la estructura general del modelo lunar Ptolomeo comienza a desplegar el método para obtener los parámetros del mismo: por un lado hay que conocer el tamaño tanto del epiciclo como del deferente, valores que expresará con los radios de ambos círculos. Ptolomeo no da valores absolutos para estas magnitudes, sino que solo se propone indicar la proporción entre los dos radios. Los otros dos valores fundamentales que necesita averiguar son la posición del centro del epiciclo sobre el deferente, y de la Luna sobre el epiciclo para algún momento dado.

Ptolomeo consigue obtener todos los resultados necesarios utilizando, como dijo antes, observaciones de eclipses lunares. El procedimiento que lleva adelante requiere solo de tres de ellos. En el argumento pueden ser distinguidas dos etapas: una primera etapa en la que Ptolomeo halla la relación entre los radios del epiciclo y el deferente, y una segunda etapa donde halla las posiciones del centro del epiciclo en el deferente y la de la Luna en el epiciclo. Esta distinción, aunque fundada en el orden del razonamiento de Ptolomeo, debe sin embargo relativizarse un poco, pues Ptolomeo utiliza las mismas observaciones, los mismos diagramas básicos e incluso los mismos resultados intermedios para alcanzar unos y otros resultados. El astrónomo alejandrino enumera a continuación tres eclipses que le llegan por registros babilónicos, con sus fechas y horarios: 19 de marzo del -721, 8 de marzo del -720, y 1 de septiembre del -720.[23]

Utilizando sus propias tablas solares nos dice que en el momento central del primer eclipse el Sol se hallaba en Piscis 24½°, que en el del segundo se hallaba en Piscis 13¾°, y que en el del tercero se hallaba en Virgo 3¼°.

El inicio de Piscis se halla a 330° de longitud, y el de Virgo a 150°, por lo que la posición del Sol en los eclipses fue de 354½°, 343¾° y 153¼° respectivamente. A partir de los datos de los momentos centrales de los eclipses y de la longitud del Sol verdadero, Ptolomeo calcula que

3) el intervalo temporal entre el eclipse 1 y 2 fue de $354^{d}2\frac{17}{30}^{h}$,

4) el avance en longitud del Sol verdadero entre el eclipse 1 y 2 fue de 349;15°,

5) el intervalo temporal entre el eclipse 2 y 3 fue de $176^{d}20\frac{1}{5}^{h}$,

6) el avance en longitud del Sol verdadero entre el eclipse 2 y 3 fue de 169;30°.

Multiplicando VEpi y (3), y VLun y (3) obtiene que[24]

7) entre el eclipse 1 y 2 el movimiento medio en longitud de la Luna fue igual a un número entero de revoluciones más 345;51°,

[23] Son los primeros tres eclipses lunares de la lista de (Pedersen, 2010, p. 408).

[24] Obviamente las referencias solares sirven para conocer el movimiento de la Luna por el hecho de que en el medio de un eclipse lunar la Luna se encuentra a exactamente 180° de elongación.

> 8) entre el eclipse 1 y 2 el movimiento medio en anomalía de la Luna fue igual a un número entero de revoluciones más 306;25°,

y multiplicando VEpi y (5), y VLun y (5) obtiene que

> 9) entre el eclipse 2 y 3 el movimiento medio en longitud de la Luna fue igual a un número entero de revoluciones más 170;7°,
>
> 10) entre el eclipse 2 y 3 el movimiento medio en anomalía de la Luna fue igual a un número entero de revoluciones más 150;26°.

Ahora bien, el movimiento en longitud de la Luna es producto de la combinación del movimiento en longitud media y del movimiento en anomalía. Si al movimiento en longitud en anomalía se le resta el movimiento en longitud media, entonces lo que queda es, necesariamente, debido al movimiento en anomalía. De este modo Ptolomeo puede obtener, por (4) y (7) que

> 11) entre el primer y segundo eclipse hay 3;24° de longitud positiva que no son efecto del movimiento medio en longitud, y que por lo tanto son efecto del movimiento en anomalía,

y por (6) y (9) que

> 12) hay 0;37° de longitud negativa que no son efecto del movimiento medio en longitud, y que por lo tanto son efecto del movimiento en anomalía.

A partir de estos datos Ptolomeo es capaz de comenzar a calcular los parámetros del modelo. Al construir el diagrama básico (fig. 9) Ptolomeo hace colapsar los tres eclipses en un solo epiciclo, dejando de lado el hecho de que en cada uno de ellos el centro del mismo se encontraba en longitudes distintas. De ese modo, en el diagrama ptolemaico solo están representadas las posiciones de la Luna sobre el epiciclo en cada eclipse, pero no las del epiciclo sobre el deferente. Ptolomeo supone un deferente con centro en D, sobre el cual se halla un epiciclo, en el que a su vez se encuentran los puntos A, B y G, que representan las posiciones de la Luna en el primer, segundo y tercer eclipse respectivamente.

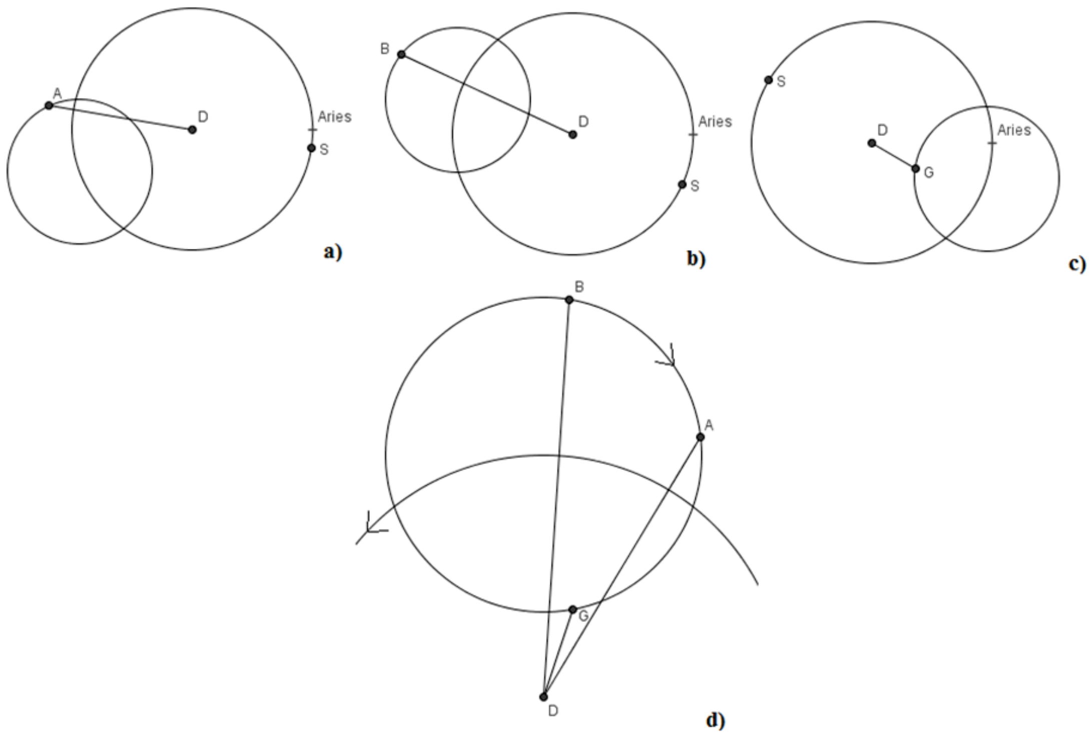

Figura 9. Esquema básico del diagrama inicial de los tres eclipses lunares.

En la fig. 9 se aprecian, en la parte superior (a, b, y c) tres diagramas con la posición de la Luna y su epiciclo en los tres eclipses lunares. El diagrama inferior (d) es la combinación de los tres que Ptolomeo pide. Allí, por (11), Ptolomeo sabe que

13) $\angle$ADB=3;24°,

y además, por (8), que

14) arco AGB=306;25°.

Por (12) sabe que

15) $\angle$BDG=0;37°,

y por (10) que

16) arco BAG=150;26°.

Puesto que necesariamente el punto A queda en algún lugar del arco BAG, entonces,

17) $\angle$ADG=$\angle$ADB-$\angle$BDG=2;47°.

Por último, si el arco AGB=306;25°, entonces el arco BA=53;35°. De ese modo obtiene que

18) arco AG=arco BAG-arco BA=96;51°.

Ahora bien, el arco BAG es una parte del epiciclo donde el efecto del movimiento de la Luna es substractivo[25], es decir, cuando la Luna se está moviendo en ese arco su velocidad aparente sobre el Zodíaco es menor a VEpi: esto es consecuencia directa del resultado (12). Pero, según expliqué antes (ver fig. 8 y párrafo siguiente), en el modelo lunar que plantea Ptolomeo la velocidad máxima ocurre cuando la Luna se halla en el perigeo del epiciclo. Y la velocidad máxima, obviamente, no puede nunca darse en un sector del epiciclo donde el efecto del movimiento de la Luna sea substractivo. Por lo tanto el perigeo del epiciclo debe hallarse en el arco GB.

6. Los radios del modelo

En la introducción mencioné la maestría que Ptolomeo muestra al transformar problemas astronómicos en problemas geométricos. La investigación acerca de la proporción entre los tamaños del epiciclo y deferente lunares es un excelente caso para ilustrar esta cualidad del astrónomo alejandrino, cualidad que por otro lado no habría poseído de no haberse podido parar sobre los hombros de gigantes de la estatura de Euclides, Aristarco e Hiparco[26], por nombrar algunos. Si observamos nuevamente la fig. 9, en la cual están representadas las posiciones de la Luna en cada eclipse, podemos percibir que la pregunta por los tamaños del epiciclo y del deferente puede expresarse en términos geométricos del siguiente modo: ¿cuál es el radio *r* de un círculo en el cual dos arcos consecutivos BA y AG, cuyos valores se conocen, son vistos bajo los ángulos ∠BDA y ∠ADG, cuyos valores también se conocen, desde un punto D, el cual se halla a una distancia R al centro del círculo? (Petersen, 1969, p. 152). A continuación veremos de qué modo el astrónomo responde a esta pregunta.

Ptolomeo reconoce que su cálculo puede llevarse a cabo tanto si se supone un modelo de excéntrica como si se supone un modelo de epiciclo y deferente. Por motivos que no quedan del todo claros[27], sin embargo, elige explicar la primera anomalía de la Luna usando un modelo de epiciclo y deferente. Para ello Ptolomeo pide trazar las líneas DB, DA, DG, AG (fig. 10). Luego determinar el punto E donde la línea determinada por DB corta al círculo. Trazar las líneas EA y EG, y luego trazar dos líneas de tal modo ambas estén determinadas por E, y que una sea perpendicular a la línea determinada por AD en el punto Z, y la otra sea perpendicular a la línea determinada por DG en el punto H. Luego trazar una línea de tal modo que sea determinada por G y sea perpendicular a AE en el punto Θ.

[25] "ἀφαιρεῖν τῆς μέσης μοίρας 0λ̅ζ̅", literalmente, *quita 0;37 partes al medio*.

[26] De hecho Ptolomeo refiere explícitamente que su método de los tres eclipses lunares ya había sido utilizado por Hiparco. Cfr. IV, 5; H1 294-295; 181.

[27] Los modelos de excéntrica son utilizados a lo largo de todo *Almagesto*: en el modelo del Sol, en el segundo modelo lunar, y en todos los modelos planetarios. La versión simple consiste en suponer al astro moviéndose sobre un deferente cuyo centro no coincide con la Tierra. Esta es, por ejemplo, una de las posibilidades que Ptolomeo propone para el caso solar en III, 3. En el caso de la Luna y los planetas, Ptolomeo combina un modelo de epiciclo y deferente con una versión más compleja del modelo de excéntrica, pues allí hace que el centro del deferente tenga, a su vez, un movimiento circular y uniforme en torno a la Tierra.

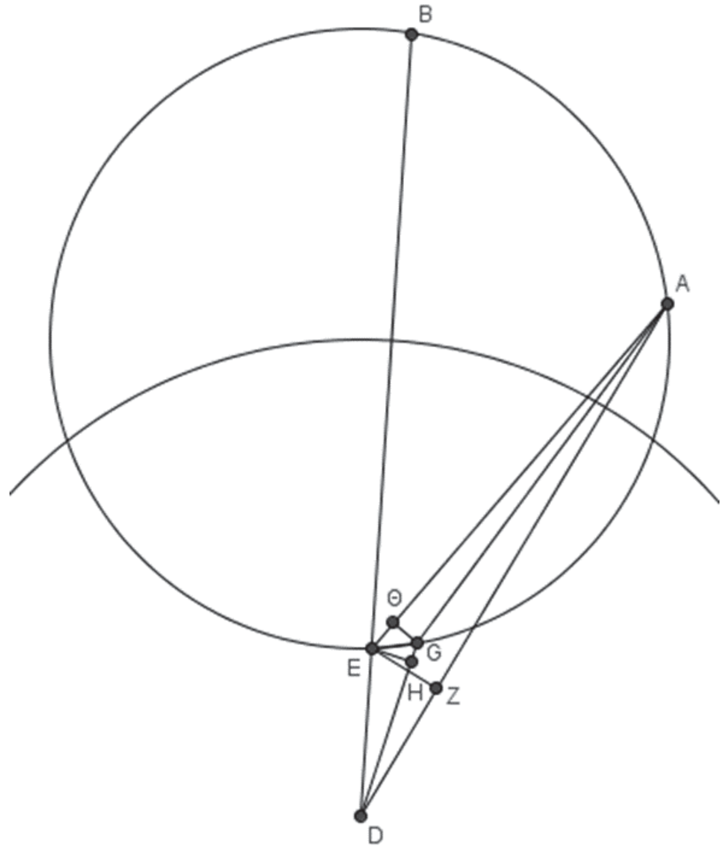

Figura 10. (P) Primer diagrama para la demostración de la primera anomalía.

Los dos valores que Ptolomeo necesita en este primer momento son los valores de los segmentos BE y DE. Respecto de BE, este es la cuerda del arco BAGE, por lo que para obtener su valor necesita conocer la magnitud de ese arco. El arco BAG ya lo conoce por (16), por lo que solo le resta calcular el valor del arco GE. Para eso puede aprovechar que la cuerda de ese arco, el segmento GE, es la hipotenusa del triángulo rectángulo GEH, el cual es producto de la aplicación del método del doble triángulo rectángulo al triángulo DEG. La hipotenusa del otro triángulo rectángulo resultante no es otra que el segmento DE, otro de los segmentos buscados. Por tanto suponiendo un valor de base para DE, ya es capaz de comenzar el cálculo. Dada la tabla de cuerdas ya mencionada, ese valor será de 120^p. Sin embargo, este camino, que comienza con un DE=120^p, termina dando un resultado para GE que tiene como patrón de medida no un diámetro del epiciclo igual a 120^p sino, obviamente, DE=120^p. No obstante, como vimos en el apartado acerca de la trigonometría de Ptolomeo, para calcular el valor del arco GE siguiendo sus tablas de cuerdas, el astrónomo alejandrino necesita expresar el valor de la cuerda GE según una unidad de medida donde el diámetro del epiciclo sea 120^p. Además, una vez encontrado el segmento BE, obviamente la unidad de medida en la que su valor quede expresado va a estar fundada en un diámetro del epiciclo igual a 120^p. Pero también DE estará expresado, por suposición, como valiendo 120^p. Lo que Ptolomeo necesita entonces, para hallar BE y DE en la misma unidad medida, es encontrar el modo de expresar el valor de GE y DE en una unidad de medida que esté fundada en un diámetro de 120^p. Ptolomeo lo logra usando al segmento AG como una suerte de término medio. Por un lado Ptolomeo aplica el método del doble triángulo rectángulo al triángulo AEG, con ΘG como divisor. Partiendo del valor conocido para GE –que a su vez esta fundado en DE=120^p– llega al valor de AG. Por otro lado, puesto que por (18) conoce el arco AG, puede calcular el valor de AG como cuerda del epiciclo. Así obtiene, al mismo tiempo, un valor para AG fundado en un diámetro de 120^p para el epiciclo, y un valor de AG y GE fundado en DE=120^p. Con esa información normaliza GE y DE a la unidad de medida fundada en un diámetro de 120^p para el epiciclo, y así puede obtener el arco GE que, sumado al arco BAG, le permitirá llegar a la cuerda BE. A continuación voy a ir recorriendo los cálculos ptolemaicos.

El primer paso es una aplicación, la primera, del método del doble triángulo rectángulo, y lo hace sobre el triángulo DEA, con EZ por divisor.[28] Respecto del triángulo rectángulo DEZ sabemos por (13) que ∠EDZ=3;24°. Por lo tanto, suponiendo DE=120^p se puede obtener EZ=7;7,0^p. El otro valor para EZ se obtiene a partir del triángulo rectángulo AEZ. El dato necesario para comenzar es conocer el ángulo ∠EAZ. El método para hacerlo es otro de los caminos típicos que se encuentran en el *Almagesto*: Ptolomeo primero nos recuerda que el arco BA subtiende 53;35°. Gracias a Elem. III 20 obtenemos que ∠BEA es igual a la mitad que el arco BA, o sea, 26;47,30°. A partir de ∠BEA se puede calcular, con una simple resta, el valor de ∠EAZ=23;23,30°.[29] Respecto del triángulo rectángulo AEZ, suponiendo EA=120^p, se obtiene que EZ=47;38,30^p. La normalización la realiza con base en DE=120^p, obteniendo un EA=17;55,32^p.

Luego Ptolomeo aplica nuevamente el método del doble triángulo rectángulo al triángulo DEG, con EH por divisor. Puesto que la hipotenusa de DEH es DE, puede mantener el patrón para la normalización que viene utilizando. Por (15) sabemos que ∠EDH=0;37°, por lo que se obtiene que EH=1;17,30^p. Al igual que en el caso precedente Ptolomeo calcula ∠BEG=75;13° partiendo del dato (16) de que el arco BG subtiende 150;26°. Luego, aplicando Elem. I 32, Ptolomeo llega a ∠EGD=74;36°, lo que le permite obtener, respecto del triángulo rectángulo GEH, suponiendo GE=120^p, que EH=115;41,21^p. Luego de la normalización alcanza un GE=1;20,23^p.

A continuación Ptolomeo lleva adelante una variante del método del doble triángulo rectángulo sobre el triángulo EAG, con ΘG por divisor. Conociendo el valor de GE Ptolomeo busca determinar el valor de GΘ y EΘ, los cuales forman, junto a GE, el primer triángulo rectángulo. Por (18) sabemos que el arco AG subtiende 96;51°, por lo que, por Elem. III 20, ∠AEG=48;25,30°. Puesto que GEΘ es un triángulo rectángulo, por Elem. I 32 se obtiene que ∠ΘGE=41;34,30°. Ahora Ptolomeo está en condiciones de calcular los dos catetos. Normalizados al valor de GE=1;20,23^p –y por lo tanto de DE=120^p–, obtiene que GΘ=1;0,8^p y EΘ=0;53,21^p.

En el próximo paso, en lugar de utilizar la tabla de cuerdas, va a aprovechar la disponibilidad de datos acumulados hasta ahora y hacer una simple aplicación del

[28] El ejemplo en la fig. 3.a. corresponde a este caso.

[29] Gracias a Elem. I 32. Aquí el triángulo es DEA, y el lado prolongado es DE, por lo que ∠EAZ=∠BEA-∠EDZ.

teorema de Pitágoras: Ptolomeo ya tiene el valor de EA y EΘ, por lo que restando uno al otro puede obtener que ΘA=17;2,11^p. De ese modo, puede tomando el valor de GΘ que había obtenido anteriormente, obtener el valor de la hipotenusa AG del segundo triángulo rectángulo GAΘ: AG=17;3,57^p. Los tres valores relevantes que Ptolomeo tiene hasta el momento son

19) DE=120^p,

20) GE=1;20,23^p

y

21) AG=17;3,57^p.

Ahora bien, como dije arriba, el segmento AG es una cuerda del epiciclo, por lo que es pasible de ser calculada suponiendo un diámetro de 120^p para el mismo. La única información necesaria es la obtenida a partir de 18, esto es, que el arco AG es igual a 96;51°. Su tabla de cuerdas le indica que una cuerda semejante tiene un valor de 89;46,14^p. Ptolomeo asume entonces ese valor para AG, y convierte correspondientemente los otros dos valores relevantes señalados arriba, obteniendo que

22) DE=631;13,48^p

y que

23) GE=7;2,50^p.

El patrón de normalización, entonces, ya no es más DE=120^p, sino el diámetro del epiciclo=120^p. Dado que los valores en (22) y (23) asumen que el diámetro del círculo=120^p, puede utilizar esos valores para hacer el camino inverso y calcular ángulos a partir de cuerdas. Así obtiene que el arco GE subtiende 6;44,1°. La suma del arco BAG y el arco GE le permite saber que

24) el arco BAGE subtiende 157;10°.

Como el segmento BE es la cuerda de ese arco, puede obtener que

25) BE=117;37,32^p.

Ptolomeo señala entonces que si hubiéramos hallado que BE=120^p eso significaría que BE es el diámetro, y ya habríamos hallado no solo la relación entre radio del deferente y radio del epiciclo[30] sino también la Luna media. Sin embargo BE es menor que 120^p, lo que significa que o subtiende más o subtiende menos de 180°[31]. De hecho subtiende 157;10°, por lo que sabemos, entonces, que el centro del epiciclo se halla a una longitud mayor que B y que E.

---

[30] Pues entonces el radio del deferente sería igual a DE+BE/2.

[31] Es decir, el arco BE subtiende más o menos de 180°. En este caso, por arco BE se entiende el arco recorrido por la Luna sobre el epiciclo desde B hasta E, es decir, en sentido horario. Ese arco es el que mide 157;10°. Si se midiera el arco BE, pero en el sentido antihorario, mediría 202;50°. No obstante, dado el sentido del movimiento de la Luna sobre el epiciclo, este modo de medir no sería el adecuado.

Una vez que está en posesión de los valores de DE y BE, Ptolomeo pide que se construya (fig. 11), sobre el mismo diagrama, una línea DMKL, de tal modo que M y L sean el perigeo y apogeo del epiciclo respectivamente, y K su centro. El único eclipse que es utilizado de aquí en más es el segundo eclipse del trío, representado por el punto B.

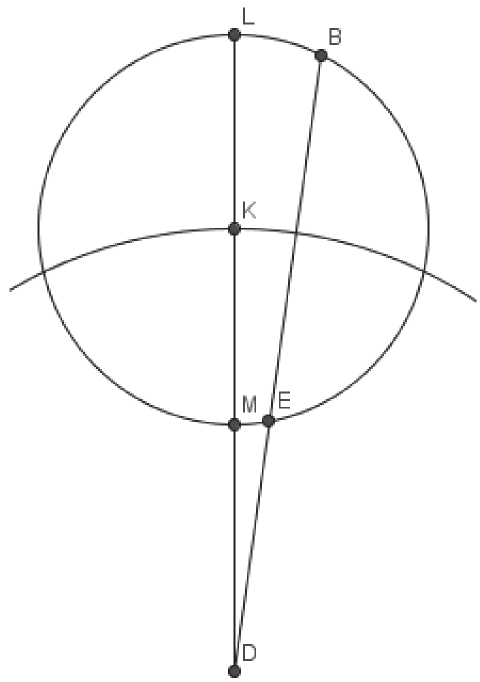

Figura 11. (P) Segundo diagrama para la demostración de la primera anomalía.

Ptolomeo puede culminar entonces el cálculo de los radios usando tan solo dos teoremas de los *Elementos*. Gracias a Elem. III 36[32] sabe que BD·DE=LD·DM. Puesto que BD no es más que la suma de DE y BE, obtiene que LD·DM=$472700;5{,}32^{p^2}$. Además, gracias a Elem. II 6 sabe que LD·DM+KM^2=FD^2. El patrón de unidad que viene siguiendo le dice que el diámetro del epiciclo es 120^p, por lo que KM=60^p. Así llega al valor de KD=$\sqrt{472700;5{,}32^{p^2}+3600^{p^2}}$=690;8,42^p.

Ahora sí ha alcanzado la proporción entre el radio del epiciclo y el del deferente: 60^p/690;8,42^p. Ptolomeo hace a esta altura una última normalización, donde el patrón de medida es un radio del deferente de 60^p: calcula que cuando

26) el radio del deferente KD es 60^p el radio,

entonces

27) el radio del epiciclo KL es 5;13p.[33]

[32] En este caso las líneas determinadas son dos: DB y DL. Tanto DB·DE como DL·DM son iguales al cuadrado del segmento tangente, por lo que son iguales entre sí.

[33] El valor final que asume Ptolomeo es 5;15^p. Ver nota 39.

7. La posición de la Luna y del centro del epiciclo

Al haber descubierto la estructura de su primera teoría lunar, las velocidades de movimiento de sus partes, y los tamaños proporcionales de los círculos, Ptolomeo ya tiene un primer modelo completo. No obstante, para que ese modelo tenga capacidad predictiva, el astrónomo necesita condiciones iniciales, esto es, necesita saber dónde se encontraba cada parte del modelo en algún momento determinado. Las partes cuyas posiciones para algún momento es necesario conocer son el centro del epiciclo, sobre el cual es necesario conocer su posición en el deferente respecto del inicio de Aries –la referencia de longitud en la astronomía ptolemaica–, y la Luna, sobre la cual es necesario conocer su posición en el epiciclo respecto del apogeo del mismo. Si observamos la fig. 11 veremos que la posición de la Luna sobre el epiciclo está indicada por el ángulo ∠LKB. Por otro lado, el punto de inicio de Aries no está representado. Sin embargo, esto no es necesario para conocer la longitud del centro del epiciclo, pues al conocerse por observación[34] la longitud de la Luna en el segundo eclipse, solo hay que averiguar el ángulo ∠BDK y sumarlo a la misma.

Para llevar adelante los cálculos Ptolomeo solo nos pide que tracemos (fig. 12) el segmento BK, y que tracemos una recta KNX perpendicular a BE, de tal modo que N sea el punto donde corte a BE, y X sea el punto donde corte al epiciclo.

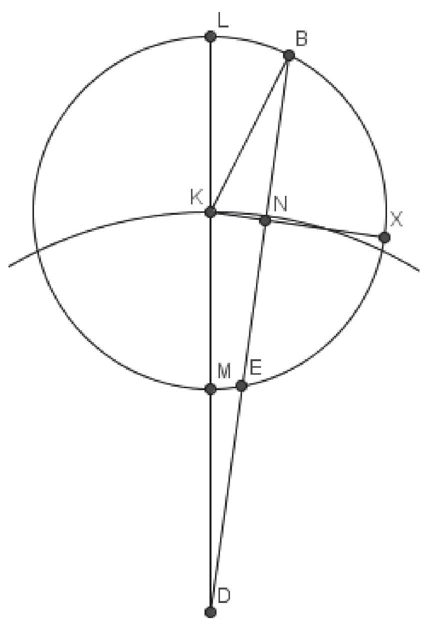

Figura 12. (P) Tercer diagrama para la demostración de la primera anomalía.

Ptolomeo averiguará ambos valores en una demostración muy breve, cuyo lugar central es ocupado por el triángulo rectángulo DKN. El ángulo ∠BKL es igual al resultado de restar el ángulo ∠XKB al ángulo ∠XKL, por lo que para conocerlo Ptolomeo decide averiguar esos dos. El ángulo ∠XKL lo obtiene como ángulo complementario de ∠NKD,

[34] Lo único observado, estrictamente, es el momento central del eclipse lunar. Puesto que se conoce la longitud del Sol en ese instante, entonces se puede saber la longitud lunar.

el cual es obtenido trigonométricamente, pues es un ángulo del triángulo rectángulo DKN, del cual se conocen los lados KD y ND. Al primero de estos dos lo conoce por (26) y al segundo lo obtiene como la suma de DE y NE. El valor de DE lo conoce por (22)[35], mientras que NE lo obtiene a partir de la aplicación de un teorema de Euclides a la cuerda BE. El ángulo ∠XKB, por otro lado, lo obtiene a partir del arco BXE, que conoce por (24), al cual le aplica el mismo teorema. El cálculo es el siguiente.

Suponiendo los valores fundados en un diámetro del epiciclo igual a 120ᵖ para todos los segmentos (ver nota 35), gracias a Elem. III 32 Ptolomeo sabe que NE=$\frac{1}{2}$BE= 58;48,46ᵖ, lo que le permite llegar a DN=690;2,34ᵖ. Con estos dos lados puede calcular, respecto del triángulo rectángulo DKN, el ángulo ∠NKD=89;1°. Así obtiene que el complementario ∠XKL, o arco XBL, es igual a 90;59°.

Puesto que KX es perpendicular a BE y pasa por el centro del epiciclo, KX bisecta a BNE y por lo tanto al arco BXE. Dado que el arco BXE subtiende 157;10° el arco XB subtiende entonces 78;35°. Finalmente se resta el arco XB al arco XBL y se obtiene que el arco BL, o ∠LKB, es igual a 12;24°: esta es la posición en anomalía.

Sobre la posición del centro del epiciclo respecto del inicio de Aries, el cálculo ya es sencillo. El ángulo que busca, que como dije es ∠BDK, es un ángulo del triángulo rectángulo DKN, cuyo otro ángulo, ∠NKD, ya fue obtenido poco antes: su valor es 89;1° . Aplicando Elem. I 32 obtiene que ∠BDK=180°-90°-∠NKD=0;59°. Sumando este ángulo a la longitud observada de la Luna durante el segundo eclipse Ptolomeo obtiene que la longitud del centro del epiciclo en ese momento era de 164;44°.[36]

8. La época de los movimientos lunares y la corrección de la velocidad en anomalía

La *época* de un modelo astronómico es el momento de referencia que el modelo tiene en el tiempo para sus movimientos. Todos los modelos ptolemaicos tienen como punto de referencia una fecha común: el primer día del mes Toth en el calendario egipcio, en el primer año del reinado de Nabonassar, al mediodía. Es nuestro actual 26 de febrero del -746. La fecha es elegida por Ptolomeo porque, como él dice, no hay registros de observaciones anteriores a esa fecha (III, 7; H1 254; 166).[37] Ptolomeo indica, en todos los casos, la posición de los diversos elementos de sus modelos en ese momento determinado. El método para hacerlo es similar en todos ellos: averigua la posición de los elementos en cuestión para algún momento cualquiera, luego determina el intervalo de tiempo entre ese momento y la época, y calcula, usando las velocidades medias, la posición de los elementos para la época.

[35] El valor de DE=631;13,48ᵖ tiene como base un diámetro del epiciclo de 120ᵖ. A lo largo de todo este cálculo Ptolomeo vuelve a ese patrón de medida simplemente para no tener que reconvertir valores anteriores a la nueva unidad de medida donde el fundamento es un radio del deferente=60ᵖ. Como los valores que busca aquí son angulares, la unidad de medida no interesa, siempre que se mantengan las proporciones.

[36] Como sugiere la nota 24, el cálculo es un poco más complejo. En ese momento la posición calculada del Sol era de 343;45° (ver p. 17). La Luna se hallaba, entonces, a 163;45°. Es a esta longitud a la que se le adiciona el ángulo ∠BDK.

[37] Cfr. punto d) de la introducción de Toomer (1984, pp. 9-14) y nota 59 de la misma obra, p. 166.

Para el primer modelo lunar Ptolomeo parte de las posiciones calculadas para el segundo eclipse lunar babilónico, y calcula que entre ese momento y la época que él determinó transcurrieron 27 años egipcios, 17 días, 11 horas y 10 minutos. Ptolomeo utiliza los valores para las velocidades medias en longitud y anomalía y concluye que, en la época determinada, el centro del epiciclo se hallaba a 41;22° de longitud, mientras que la posición de la Luna en el epiciclo, respecto del apogeo, era de 268;49°.

Este cálculo, sin embargo, es solo posible a partir de valores confiables para las velocidades medias. Como vimos al inicio, Ptolomeo recalcula los valores de Hiparco, y aplica una corrección. A continuación veremos, para finalizar, el método ptolemaico para hacer esta corrección.

Luego de realizar el cálculo con los tres eclipses lunares babilónicos, Ptolomeo vuelve a llevar a cabo el mismo cálculo, solo que tomando como base empírica tres eclipses lunares contemporáneos, "[...] elegidos de entre aquéllos que fueron cuidadosamente observados por nosotros en Alejandría"(IV, 6; H1 314; 198).[38] El fin de esta repetición es corroborar[39] la exactitud de los parámetros obtenidos a partir del primer cálculo con observaciones lo más alejadas entre sí posibles. A partir de este segundo cálculo Ptolomeo obtiene que

28) la longitud de la Luna media durante la mitad del segundo eclipse era 29;30°

y que

29) la posición en anomalía en la mitad del segundo eclipse era 64;38°.

A continuación Ptolomeo calcula el intervalo temporal entre el segundo eclipse del trío babilónico y el segundo eclipse del trío observado por él, y obtiene que

30) entre el segundo eclipse bablónico y el segundo eclipse observado por él pasaron 854 años egipcios, 73 días y $23\frac{1}{3}$ horas, o 311783 días y $23\frac{1}{3}$ horas.

Con estos tres datos, más las posiciones en longitud media y en anomalía del eclipse babilónico a las que llegó con el cálculo precedente, Ptolomeo puede calcula su corrección al movimiento medio diario en longitud y en anomalía. Al hacerlo encuentra que si bien el movimiento medio en longitud que le llega de Hiparco es correcto, el valor que su predecesor da para el movimiento medio en anomalía excede en 0;0,0,0,11,46,39° al avance diario que sus propios cálculos indican. La corrección que realiza queda ya plasmada en las tablas lunares que da en IV, 4.

[38] Son los eclipses 63, 69 y 73 de la lista de Pedersen (2010, pp. 416-419).

[39] El único dato que Ptolomeo debe corroborar es la proporción entre el radio del epiciclo y el del deferente. Mientras que para el trío babilónico había obtenido una relación $5;13^p/60^p$, para el trío observado por él obtiene $5;14^p/60^p$ (IV, 6; H1 322; 202). Para todos los cálculos posteriores Ptolomeo asume un valor redondeado de $5;15^p$ (cfr. como primer ejemplo, IV, 11; H1 339; 211).

El método ptolemaico, sin embargo, solo tiene utilidad como método *correctivo*, y no es capaz, por sí solo, de obtener velocidades medias. Determinemos, en el diagrama a) de la fig. 13, las dos posiciones del centro del epiciclo sobre el deferente en cada uno de los dos eclipses lunares considerados. Allí T es el centro del deferente, E es el centro del epiciclo en eclipse babilónico, E_1 es el centro del epiciclo en el eclipse ptolemaico, y A es el punto inicial de Aries, esto es, la referencia para medir longitudes sobre el Zodíaco. Determinemos luego, en el diagrama b) de la misma figura, las dos posiciones de la Luna en el epiciclo en los mismos eclipses. Allí E es el centro del epiciclo, L es la posición lunar en el eclipse babilónico, L_1 lo es en el eclipse ptolemaico, y B es el apogeo del epiciclo.

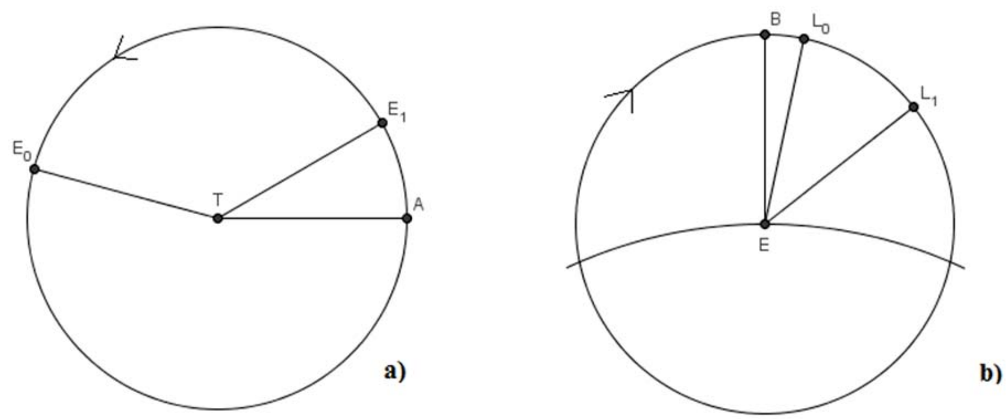

Figura 13. Diagrama del cálculo correctivo ptolemaico para las velocidades medias.

La única información que se puede obtener de estos diagramas construídos a partir de los resultados obtenidos por Ptolomeo es que, entre los dos eclipses, el centro del epiciclo realizó una cantidad entera de revoluciones en torno a T más el arco E_0E_1, y la Luna realizó una cantidad entera de revoluciones en torno a E más el arco L_0L_1. El método no dice nada acerca de cuál es la cantidad de revoluciones enteras que realizaron los dos puntos, y solo nos permite calcular la magnitud del arco que las excede. Ptolomeo, razonablemente, confía en que el método de origen babilónico es exacto en cuanto a la cantidad de ciclos enteros de revolución media y anómalos, y solo entonces compara sus resultados para los arcos excedentes con los obtenidos a partir de las velocidades babilónicas. Como vimos, en el caso del diagrama a) encuentra que ambos arcos son iguales, mientras que para el caso del diagrama b) encuentra que el arco resultante de las velocidades babilónicas es levemente más grande que el obtenido a partir de sus propios cálculos.

9. Hacia nuevas dificultades

En este artículo hemos visto, brevemente, las características generales de la estructura del *Almagesto*, y el lugar que el tratado lunar tiene en él. Luego estudiamos las principales herramientas trigonométricas que Ptolomeo usa en el desarrollo de su teoría lunar. Finalmente, fuimos explicando de manera ordenada los diversos pasos que el astrónomo alejandrino sigue en la construcción de su modelo, desde su elección de los eclipses lunares como observaciones especialmente apropiadas para enfrentar esa tarea, pasando por el cálculo de las velocidades medias a partir de períodos heredados de la tradición astronómica babilónica, su derivación de los valores para los parámetros fundamentales del modelo epicíclico elegido, y su cálculo de las posiciones de cada elemento del modelo en la época elegida por Ptolomeo.

El modelo para las longitudes lunares que Ptolomeo expone en las partes indicadas del *Almagesto*, y que este artículo se ocupa de explicar, es sin dudas un ejemplo notable de la rigurosidad y el ingenio que los astrónomos helénicos desplegaron en la investigación del cielo y los astros que lo pueblan. La explícita utilización de períodos babilónicos, y las constantes referencias a Hiparco indican que Ptolomeo trabajó dentro de una tradición astronómica que ya llevaba varios siglos de desarrollo. La referencia geográfica que constituyó la ciudad de Alejandría, como dije al inicio, fue uno de los factores que más contribuyeron a esto. La transmisión de los textos y sus comentarios, de los catálogos de observaciones griegos y babilónicos, todo ello fue determinante para que Ptolomeo sea capaz, en el siglo II d.C., de incorporar en su ambiciosa obra un modelo que, como él mismo indica, en sus rasgos fundamentales ya estaba terminado al menos desde hacía trescientos años, en tiempos de Hiparco. En ese sentido, el propio testimonio ptolemaico nos dice que, quizá con la excepción de la corrección a ciertos parámetros como por ejemplo las velocidades medias, el modelo lunar expuesto no constituye un trabajo original del astrónomo de Alejandría.

La investigación acerca de las longitudes lunares de Ptolomeo no terminó, sin embargo, aquí. Ptolomeo comienza el segundo capítulo del libro V diciendo que

> [...] se halló que tanto a partir de las observaciones registradas por Hiparco como a partir de las nuestras, la distancia [angular] de la Luna al Sol estaba a veces de acuerdo con lo calculado a partir de la hipótesis de más arriba, y a veces en desacuerdo, siendo la discrepancia a veces pequeña y a veces grande (IV, 2; H1 355; 220).

Las dificultades que están por detrás de esa nueva anomalía aparentemente ignorada por sus antecesores llevarán a Ptolomeo a introducir novedades teóricas notables, que serán tratadas en un futuro trabajo. Allí podremos apreciar en plenitud el genio ptolemaico que apenas puede ser entrevisto en el desarrollo del primer modelo.

10. Bibliografía

Duke, D. (2002). Dating the Almagest star catalogue using proper motions: a reconsideration. *Journal for the History of Astronomy, XXXIII*(1), pp. 45-55.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puerta Castaños, Trad.) Madrid: Gredos.

Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy.* New York: Oxford University Press.

Goldstein, B. (1967). The Arabic Version of Ptolemy´s Planetary Hypotesis. *Transactions of the American Philosophical Society*, pp. 3-55.

Grasshof, G. (1990). *The History of Ptolemy's Star Catalogue.* Berlin: Springer-Verlag.

Neugebauer, O. (1957). *The Exact Sciences in Antiquity* (Segunda ed.). Copenhagen, New York.

Neugebauer, O. (1975). *The History of Ancient Mathematical Astronomy*. Springer-Verlag.

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: with annotation and new commentary by Alexander Jones.* (A. Jones, Ed.) New York: Springer.

Petersen, V. (1969). The Three Lunar Models of Ptolemy. *Centaurus, 14*(1), pp. 142-171.

Ptolomeo, C. (1898-1903). *Syntaxis Mathematica.* (J. L. Heiberg, Ed.) Leipzig: Teubner.

Ptolomeo, C. (1940). *Tetrabiblos.* (F. Robbins, Trans.) Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Ptolomeo, C. (1984). *Almagest.* En G. Toomer, *Ptolemy´s Almagest* (G. Toomer, Trad., pp. 27-659). Princeton: Princeton University Press.

Ptolomeo, C. (1987). *Hipótesis planetarias.* (Perez Sedeño, Trad.) Madrid: Alianza.

Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy´s Almagest.* (G. J. Toomer, Ed., & G. J. Toomer, Trad.) Princeton: Princeton University Press.