La implicación lógica y el doble uso de los principios lógicos en Russell y Lewis

Carlos A. Oller[1]

Recibido: 22 de marzo de 2018
Aceptado: 22 de abril de 2018

Resumen. Una interpretación particularmente influyente de la teoría de la implicación lógica de Bertrand Russell y Clarence I. Lewis es la propuesta por Quine en su artículo "Reply to Professor Marcus". Allí Quine sostiene que la lógica modal de Lewis nació en pecado: el pecado de confundir uso con mención, ya que cuando se afirma que una oración implica lógicamente a otra, estas oraciones no están siendo usadas sino mencionadas. Según la interpretación de Quine, Clarence I. Lewis persistió en el error de Russell, que consistió en confundir la implicación material con la implicación lógica, y confundió la implicación estricta con la implicación lógica. Estos 'pecados' de Russell y Lewis pueden entenderse mejor si se tiene en cuenta que tanto Lewis como Russell sostienen que los axiomas y los teoremas en un cálculo lógico se usan de dos maneras: (a) como premisas a partir de las cuales se obtienen nuevos teoremas, y (b) como reglas de inferencia mediante las cuales se obtienen nuevos teoremas. En efecto, estos autores suscriben la teoría del doble uso de los principios lógicos que parece originarse en la obra de Peano y que ha sido casi completamente ignorada en la literatura acerca de la historia de la lógica.

Palabras clave: implicación lógica – concepción del doble uso de los principios lógicos – Bertrand Russell – Clarence Irving Lewis.

Title: Logical implication and the double use of logical principles in Russell and Lewis

Abstract. A particularly influential interpretation of Bertrand Russell's and Clarence I. Lewis's theory of logical implication is the one proposed by Quine in his article "Reply to Professor Marcus". In that article Quine argues that Lewis's modal logic was born in sin: the sin of confusing use with mention, since when it is stated that a sentence logically implies another sentence, these sentences are not being used but mentioned. According to Quine's interpretation, Clarence I. Lewis persisted in Russell's error, which consisted in confusing material implication with logical implication, and confused strict implication with logical implication. These 'sins' of Russell and Lewis can be better understood if we take into account that both logicians argue that the axioms and theorems in a logical calculus are used in two ways: (a) as premises from which new theorems are obtained, and (b) as rules of inference by which new theorems are obtained. In fact, these authors subscribe to the theory of the double use of logical principles that seems to originate in Peano's work and that has been almost completely ignored in the literature about the history of logic.

[1] Facultad de Filosofía y Letras - Universidad de Buenos Aires. IdHICS- Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación - Universidad Nacional de La Plata
✉ carlos.a.oller@gmail.com
Oller, Carlos A. (2018). La implicación lógica y el doble uso de los principios lógicos en Russell y Lewis. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 2(2), 17-26. ISSN: 2525-1198

Keywords: logical implication – double use conception of logical principles – Bertrand Russell – Clarence Irving Lewis.

1. Introducción

Una interpretación particularmente influyente de las teorías de la implicación lógica de Russell y C.I. Lewis es la propuesta por Quine en su artículo “Reply to Professor Marcus” (Quine, 1961). Allí Quine sostiene que la lógica modal de Lewis nació en pecado: el pecado de confundir uso con mención, ya que cuando se afirma que una oración implica lógicamente a otra, estas oraciones no están siendo usadas sino mencionadas. Lewis se vio obligado a construir su teoría de la implicación estricta como reacción a la teoría de Russell que confundió la implicación material con la implicación lógica. Sin embargo, según la interpretación de Quine, Lewis persistió en el error de Russell y confundió la implicación estricta con la implicación lógica.

La interpretación de Quine tiene su antecedente en un pasaje de *The Logical Syntax of Language* (Carnap, 1937, p. 255) en el que Carnap se lamenta de que Russell use el término “implicación” para designar una conectiva, y se pregunta si esta elección fue una consecuencia de confundir la implicación material con la relación de consecuencia lógica.

Sin embargo, esta interpretación no tiene en cuenta que tanto Lewis como Russell –este último, en un período temprano de su obra lógica– sostienen que los axiomas y los teoremas en un cálculo lógico se usan de dos maneras: como premisas a partir de las cuales se obtienen nuevos teoremas, y como reglas de inferencia mediante las cuales se obtienen nuevos teoremas. En efecto, estos autores suscriben la teoría del doble uso de los principios lógicos que parece originarse en la obra de Peano y que ha sido casi completamente ignorada en la literatura acerca de la historia de la lógica (Corcoran, 2006; Borga & Palladino, 1992).

En esta comunicación sostendremos que interpretar las teorías de la implicación lógica de Bertrand Russell y la de Clarence I. Lewis a la luz de la teoría del doble uso de los principios lógicos permite lograr una comprensión más adecuada de la razón por la cual esos autores sostienen esas concepciones acerca de esa noción fundamental.

2. La teoría de la implicación lógica de Russell

La interpretación de Quine de la teoría de la implicación lógica de Russell tiene su antecedente, como se ha señalado en la introducción, en el siguiente pasaje de *The Logical Syntax of Language*:

> Russell’s choice of the designation ‘implication’ for the sentential junction with the characteristic TFTT has turned out to be a very unfortunate one. The words ‘to imply’ in the English language mean the same as ‘to contain’ or ‘to involve’. Whether the choice of the name was due to a confusion of implication with consequence relation, I do not know; but, in any case, this nomenclature has been the cause of much confusion in the minds of many, and it is even possible that it is to blame for the fact that a number of people, though aware of the difference between implication and the consequence-

> relation, still think that the symbol of implication ought really to express the consequence-relation, and count it as a failure on the part of this symbol that it does not do so (Carnap, 1937, p. 255).
>
> [La elección de Russell de designar 'implicación' a la conectiva oracional con la característica VFVV resultó ser muy desafortunada. La palabra 'implicar' en castellano significa lo mismo que 'contener' o 'involucrar'. No sé si la elección del nombre se debió a la confusión de la implicación con la relación de consecuencia; pero, en cualquier caso, esta nomenclatura ha sido la causa de mucha confusión en la mente de muchos, e incluso es posible que sea culpable del hecho de que algunos, aunque sean conscientes de la diferencia entre la implicación y la relación de consecuencia, todavía piensen que el símbolo de la implicación debería realmente expresar la relación de consecuencia, y consideren como un fracaso de este símbolo el que no lo haga.]

Bertrand Russell desarrolla tempranamente una teoría de la implicación lógica en su extenso artículo "The Theory of Implication" (Russell, 1906). Allí Russell sostiene que para que una proposición pueda ser inferida deductivamente de otra debe existir una relación entre ellas que haga que la segunda sea consecuencia lógica de la primera: a esta relación la llama Russell "implicación". De manera que la relación de implicación se da entre dos proposiciones p y q cuando la proposición q es una consecuencia de p, es decir cuando q puede ser inferida deductivamente de p. La deducción depende, pues, de la relación de implicación; por ello, afirma Russell que todo sistema deductivo debe contener entre sus premisas las propiedades de la implicación necesarias para justificar la deducción.

La propiedad esencial que Russell pide de la relación de implicación es que lo implicado por una proposición verdadera sea verdadero, ya que es en virtud de esta propiedad que la implicación da origen a demostraciones. Russell elige al condicional material para representar esta relación:

> Hence, "p implies q" will be a relation which holds between any two entities p and q unless p is true and q is not true, *i. e.* whenever either p is not true or q is true. The proposition "p implies q" is equivalent to "if p is true, then q is true", *i. e.* "'p is true' implies 'q is true'"; it is also equivalent to "if q is false, p is false". When p is in fact true, "implies" may be replaced by "therefore", *i. e.* in place of "p implies q" we may say "p is true; therefore q is true". For "implies" we use the symbol "⊃", thus
>
> "$p \supset q$" means "p implies q"
>
> "$p. \supset .q \supset r$" means "p implies that q implies r", etc. (Russell, 1906, p. 162).
>
> [Por lo tanto, "p implica q" será una relación que se da entre dos entidades p y q a menos que p sea verdadera y q no sea verdadera, i. e. cada vez que p no es verdadera o q es verdadera. La proposición "p implica q" es equivalente a "si p es verdadera, entonces q es verdadera", i. e. "'p es verdadera' implica 'q es verdadera'"; también es equivalente a "si q es falsa, p es falsa". Cuando p es de hecho verdadera, "implica" puede ser reemplazado por "por lo tanto", i. e. en lugar de "p implica q" podemos decir "p es verdadera; por lo tanto, q es verdadera". Para "implica" utilizamos el símbolo "⊃", por lo tanto

"$p \supset q$" significa "p implica q"

"$p. \supset .q \supset r$ "significa "p implica que q implica r ", etc.]

Este pasaje, como señala Sanford (1989, p. 66), muestra que Russell no confunde uso con mención: son los nombres de las proposiciones, y no las proposiciones mismas, las que pueden completar adecuadamente el esquema oracional '___ es verdadera'. En el mismo texto es posible encontrar otros pasajes que parecen desmentir la acusación de Quine que atribuye a Russell: el no ser consciente de la diferencia entre usar y mencionar una oración.

Las tesis que contienen apariciones del condicional material son consideradas por Russell, de acuerdo a lo anterior, como principios acerca de la implicación lógica que justifican los procedimientos deductivos:

> Thus deduction depends upon the relation of implication, and every deductive system must contain among its premisses as many of the properties of implication as are necessary to legitimate the ordinary procedure of deduction (Russell, 1906, p. 161).
>
> [La deducción depende de la relación de implicación, y todo sistema deductivo debe contener entre sus premisas tantas propiedades de la implicación como sea necesario para legitimar el procedimiento ordinario de deducción.]

Russell es consciente de que el significado que él le da a la implicación lógica puede resultar artificial y que hay otros significados legítimos para ella, pero considera su elección es la más conveniente por razones de economía conceptual. En efecto, en su contestación a las críticas de Lewis, en el capítulo XIV de la segunda edición de su *Introduction to Mathematical Philosophy*, Russell sostiene:

> It is the truth of "not-*p* or *q*" that is required for the *validity* of the inference; what is required further is only required for the practical feasibility of the inference. [...] I maintain that, whether or not there be such a relation as he [Lewis] speaks of, it is in any case one that mathematics does not need, and therefore one that, on general grounds of economy, ought not to be admitted into our apparatus of fundamental notions (Russell, 1919, pp. 153-154).
>
> [Es la verdad de "no-*p* o *q*" lo que se requiere para la validez de la inferencia; los requerimientos adicionales solo son necesarios para la factibilidad práctica de la inferencia. [...] Sostengo que, sea que exista o no exista la relación de cual [Lewis] habla, ella es en todo caso una relación que la matemática no necesita, y por lo tanto una que, por razones generales de economía, no debe admitirse en nuestro aparato de nociones fundamentales.]

3. La teoría de la implicación lógica de Lewis

Lewis, que presenta sus críticas a Russell en una serie de artículos que publica desde 1912 (Lewis, 1912, 1917) y desarrolla en su libro *A Survey of Symbolic Logic* (Lewis, 1918), afirma que la relación (sic) de implicación material, simbolizada por $\supset$, no es la relación que tenemos en mente cuando decimos que q se infiere de p, y que no hay ninguna razón de peso para abandonar el uso habitual de "implicación" por este nuevo uso. El carácter inusual de la implicación material, cuando se la entiende como implicación lógica, es responsable de la presencia en los *Principia Mathematica* (Whitehead & Russell, 1910, 1912, 1913) de teoremas como los siguientes:

Una proposición falsa implica cualquier proposición: $\neg p \supset (p \supset q)$

Una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición: $q \supset (p \supset q)$

Si p no implica a q, entonces p es verdadera: $\neg(p \supset q) \supset p$

Si p no implica a q, entonces q es falsa: $\neg(p \supset q) \supset \neg q$

Si p no implica a q, entonces p implica que q es falsa: $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$

Si p no implica a q, entonces 'p es falsa' implica q: $\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset q)$

Si p y q son las dos verdaderas, entonces p implica q y q implica p:

$(p \wedge q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$

Si p y q son las dos falsas, entonces p implica q y q implica p:

$(\neg p \wedge \neg q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$

Si bien es posible darle al término diversos sentidos, Lewis afirma que hay (por lo menos) un significado adecuado de "implicación" que es necesario respetar:

> The word denotes that relation which is present when we "validly" pass from one assertion, or set of assertions, to another assertion, without any reference to additional "evidence" (Lewis, 1918, p. 324).
>
> [La palabra denota esa relación que está presente cuando pasamos "válidamente" de una afirmación, o conjunto de afirmaciones, a otra afirmación sin ninguna referencia a alguna "evidencia" adicional.]

En efecto, sostiene Lewis que aunque la matemática contemporánea no se ocupa de la verdad de sus tesis y sus definiciones son arbitrarias, la situación de la lógica es diferente. Si una tesis de un sistema lógico es falsa su uso como premisa podrá introducir teoremas falsos y su uso como regla de inferencia podrá producir demostraciones inválidas:

> We are hardly ready to speak of a "good" abstract mathematical system whose *proofs* are *arbitrarily invalid*. Until we are, it is requisite that the meaning of "implies" in any system of symbolic logic shall be a "proper" one, and that the theorems –used as rules of inference– shall be *true* of this meaning (Lewis, 1918, p. 325).
>
> [No estamos dispuestos a hablar de un "buen" sistema matemático abstracto cuyas *demostraciones* sean *arbitrariamente inválidas*. Hasta que lo estemos, es necesario que el significado de "implica" en cualquier sistema de lógica simbólica sea "apropiado", y que los teoremas –usados como reglas de inferencia– sean *verdaderos* de acuerdo a este significado.]

Cuando los principios cuestionables, como $q \supset (p \supset q)$, se usan como reglas de inferencia sancionan proposiciones como "Hoy es lunes implica que 2 + 2 = 4" que afirman que existe una relación lógica entre enunciados irrelevantes entre sí. Sin embargo, reconoce Lewis, en los *Principia* no se usan esos teoremas cuestionables como reglas de inferencia en las demostraciones, de manera que el sistema de implicación material presentado allí constituye un *organon* aceptable de demostración, pero sólo porque únicamente se usan aquellos principios que están de acuerdo con el significado ordinario de "implica".

La implicación material tiene una importante propiedad en común con la relación de inferencia o implicación lógica: si *p* es verdadera y *q* es falsa, entonces el condicional $p \supset q$ es falso, y es falso que *q* se infiera de *p*. Pero, según Lewis, hay una importante diferencia entre implicación material e implicación lógica: la relación de implicación material es una relación entre las extensiones –los valores de verdad– de las proposiciones, mientras que la de implicación lógica es una relación entre las intensiones o significados de las proposiciones. Lewis se ve obligado a desarrollar una lógica intensional, ya que no existe en el momento en que él comienza su investigación una contraparte intensional de la lógica extensional cristalizada en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. La tesis que intenta probar Lewis mediante el estudio de la lógica intensional es que la inferencia deductiva puede fundamentarse en las propiedades de la implicación estricta.

La implicación estricta propuesta por Lewis para caracterizar la relación de implicación lógica puede definirse en términos de la imposibilidad, de manera que "*p* implica estrictamente *q*" puede definirse como "es imposible que *p* sea verdadera y *q* falsa". Si ~ es el operador de imposibilidad y $\prec$ el de la implicación estricta, esta definición puede expresarse en símbolos de la siguiente manera: $(p \prec q) =_{df} {\sim}(p \wedge \neg q)$.

La lógica de la implicación estricta tiene, sin embargo, entre sus teoremas contrapartes de las paradojas de la implicación material. En particular, valen las siguientes dos tesis:

> Una proposición imposible implica estrictamente cualquier proposición:
>
> ${\sim}p \prec (p \prec q)$
>
> Una proposición necesaria es implicada por cualquier proposición:
>
> ${\sim}\neg q \prec (q \prec p)$

La conjunción de una proposición y su negación puede considerarse como un caso paradigmático de proposición imposible. Por lo tanto, si se acepta con Lewis que una proposición imposible implica lógicamente cualquier proposición, se debe aceptar como principio válido para la implicación lógica la regla del ex *contradictione quodlibet*.

Por otra parte, dado que las tautologías son casos paradigmáticos de proposiciones necesarias, aceptar con Lewis que una proposición necesaria es implicada por cualquier proposición nos obliga a aceptar que una tautología es implicada por cualquier proposición. Pero, aceptar esto nos obligaría, a su vez, a sancionar como inferencias válidas a inferencias cuya conclusión introduce variables proposicionales que no aparecen en las premisas –es decir, inferencias que no son analíticas en el sentido definido por Parry (1933).

Lewis justifica la presencia de esas dos tesis, y de las contrapartes para la implicación estricta de los otros principios cuestionados de la implicación material, argumentando que son principios correctos –principios que se deben aceptar si uno acepta otros que sostiene que son intuitivamente incuestionables– para la noción intuitiva de implicación lógica que la implicación estricta pretende formalizar.

Sin embargo, estos intentos justificatorios de Lewis no resultan particularmente convincentes para sus contemporáneos, y las paradojas de la implicación estricta de Lewis explican por qué quienes –como Parry (1933) o Nelson (1930)– no aceptan el *ECQ* se ven motivados a buscar alternativas tanto a la teoría de la implicación lógica de Russell como a la de Lewis. Pero, estos autores continúan utilizando una conectiva del lenguaje para representar la noción de implicación lógica que intentan formalizar y, en esto, siguen con el uso adoptado por Russell y Lewis.

4. La concepción del doble uso de los principios lógicos

La teorías de la implicación lógica de Russell y Lewis se comprenden mejor si se tiene en cuenta que tanto Lewis como Russell –al menos en su obra lógica temprana– sostienen que los axiomas y los teoremas en un cálculo lógico se usan de dos maneras: (a) como premisas a partir de las cuales se obtienen nuevos teoremas, y (b) como reglas de inferencia mediante las cuales se obtienen nuevos teoremas. En efecto, estos autores suscriben la teoría del doble uso de los principios lógicos que parece originarse en la obra de Peano y que, como ha señalado Corcoran, ha sido casi completamente ignorada en la literatura acerca de la historia de la lógica.

Peano concibe a la lógica como un instrumento, un lenguaje artificial cuya función es expresar con el mayor rigor las pruebas y los conceptos matemáticos. Por su parte, los principios de la lógica no son otra cosa que una transcripción simbólica de los esquemas del razonamiento matemático. En efecto, Peano sostiene que :

> Les règles du raisonnement sont les formules mêmes de logique (Peano, 1957-59, II, 174).
>
> [Las reglas del razonamiento son las fórmulas mismas de la lógica.]
>
> Le lois de logique, contenues dans la suite, on été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques (Peano, 1957-59, II, 32).
>
> [Las leyes de la lógica, contenidas a continuación, fueron encontradas en general al enunciar, bajo la forma de reglas, las deducciones que se encuentran en las demostraciones matemáticas.]

Esto puede explicar la ausencia de reglas de inferencia en los escritos de Peano, ausencia que ya es señalada por Frege (1984, p. 238) como un defecto y sobre la cual van Heijenoort afirma:

> The formulas are simply listed, not derived; and they could not be derived, because no rules of inference are given. [...] What is far more important, he [Peano] does not have any rule that would play the role of the rule of detachment. The result is that, for all his meticulousness in the writing of the formulas, he has no logic that he can use. [...] when ultimately he does detach, it is a move totally unjustified in his system (van Heijenoort, 1967, p. 84).

> [Las fórmulas simplemente se enumeran, no se derivan; y no podrían derivarse, porque no se ofrece ninguna regla de inferencia. [...] Lo que es más importante, [Peano] no tiene ninguna regla que pueda funcionar como la regla de separación. El resultado es que, a pesar de su meticulosidad para escribir las fórmulas, no tiene una lógica que pueda usar. [...] cuando finalmente aplica la separación, realiza un movimiento totalmente injustificado en su sistema.]

Esta observación que van Heijenoort realiza respecto de las demostraciones aritméticas de Peano se aplica también a las demostraciones lógicas que sufren de esta ausencia de reglas de inferencia y que, por lo tanto, contienen pasos que resultan injustificados dentro de su sistema. Aunque van Heijenoort reconoce que hay pasajes en la obra de Peano –como los citados más arriba– que sugieren que las leyes lógicas deben interpretarse como reglas de inferencia y no como fórmulas de un lenguaje lógico, esto no resultaría en una interpretación coherente de su sistema. Borga y Palladino también adhieren a esta interpretación de Peano y sostienen que en este autor las leyes lógicas son al mismo tiempo reglas de inferencia.

La adhesión de Russell a la doctrina del doble uso de los principios lógicos sobrevive en su obra aun después de la publicación de sus *Principia*. En efecto, en el siguiente pasaje de su *Introduction to Mathematical Philosophy* –publicado en 1919– aplica esa concepción a los cinco axiomas de los *Principia Mathematica*:

> A formal principle of deduction has a double use, and it is in order to make this clear that we have cited the above five propositions. It has a use as the premiss of an inference, and a use as establishing the fact that the premiss implies the conclusion. In the schema of an inference we have a proposition *p*, and a proposition "*p* implies *q*," from which we infer *q*. Now when we are concerned with the principles of deduction, our apparatus of primitive propositions has to yield both the *p* and the "*p* implies *q*" of our inferences. That is to say, our rules of deduction are to be used, not *only* as *rules*, which is their use for establishing "*p* implies *q*," but *also* as substantive premisses, i. e. as the *p* of our schema. (Russell, 1919, p. 150).

> [Un principio formal de deducción tiene un doble uso, y es para aclarar esto que hemos citado las cinco proposiciones anteriores. Tiene un uso como la premisa de una inferencia, y un uso para establecer el hecho de que la premisa implica la conclusión. En el esquema de una inferencia tenemos una proposición p, y una proposición "p implica q", de la cual inferimos q. Ahora bien, cuando nos ocupamos de los principios de la deducción, nuestro aparato de proposiciones primitivas debe producir tanto la p como la "p implica q" de nuestras inferencias. Es decir, nuestras reglas de deducción deben usarse, no solo como reglas, que es su uso para establecer "p implica q", sino también como premisas sustantivas, i. e. como la p de nuestro esquema.]

Annelis (2000-2001, p. 80) sostiene que las observaciones Borga y Palladino y de van Heijenoort sobre la ausencia de reglas de inferencia en el sistema de Peano, cuyo papel cumplen las leyes y axiomas lógicos, se pueden aplicar también al Russell de los *The Principles of Mathematics* [1903], aunque no se apliquen ya al de los *Principia Mathematica*. Sin embargo, el pasaje anterior muestra que la teoría del doble uso de los principios lógicos queda como una concepción residual en la obra de Russell aun luego de la publicación de los *Principia*.

En lo que respecta a Lewis, los pasajes citados más arriba muestran que este autor sostiene la concepción del doble uso de los principios lógicos. Lo que es más, Lewis no sólo les otorga esta doble función, sino que también destaca que esta es una peculiaridad que distingue a la lógica simbólica de otras teorías matemáticas como la geometría:

> A symbolic logic, logistically developed –i. e. without assuming ordinary logic to validate its proofs– is peculiar among mathematical systems in that its postulates and theorems have a double use. They are used not only as premises from which further theorems are deduced, but also as rules of inference by which the deductions are made. A system of geometry, for example, uses its postulates as premises only; it gets its rules of inference from logic (Lewis, 1918, p. 324).
>
> [Una lógica simbólica, desarrollada de manera logística –i. e. sin presuponer la lógica ordinaria para validar sus demostraciones– es peculiar entre los sistemas matemáticos porque sus postulados y teoremas tienen un doble uso. Se usan no solo como premisas de las que se deducen otros teoremas, sino también como reglas de inferencia mediante las cuales se realizan las deducciones. Un sistema de geometría, por ejemplo, usa sus postulados solo como premisas; obtiene sus reglas de inferencia de la lógica.]

En conclusión, a la luz de los textos citados es posible comprender que las teorías de la implicación lógica de Russell y Lewis no se originan en una inadvertida confusión entre la implicación material –o la implicación estricta– y la consecuencia lógica, como sugiere Carnap y sostiene Quine. La relación que esos autores establecen entre esos conceptos es defendida explícitamente en su obra y en esa defensa la teoría del doble uso de los principios lógicos –como la bautiza Lewis– tiene un papel crucial. Por ello, queda como tema abierto una investigación más detallada de la manera en la cual esta concepción, que Corcoran considera muy ajena al pensamiento lógico contemporáneo, se transmite de la escuela de Peano a los autores posteriores y de las razones por las cuales sobrevive hasta la década de los años treinta.

5. Referencias

Anellis, I. (2000-2001). Review of vol. 3 and vol.4 of *The Collected Papers of Bertrand Russell*, *Modern Logic*, 8, pp. 57–93.

Borga, M. & Palladino, D. (1992). Logic and Foundations of Mathematics in Peano's School, *Modern Logic*, 3, pp. 18-44.

Carnap, R. (1937). *The Logical Syntax of Language*, New York, Harcourt Brace.

Corcoran, J. (2006). C. I. Lewis: History and Philosophy of Logic, *Transactions of the C. S. Peirce Society*, 42, pp. 1–9.

Frege, G. (1984). On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own (1897), en *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, London, Basil Blackwell, pp. 234-248.

Lewis, C. I. (1912). Implication and the Algebra of Logic, *Mind*, 21, pp. 522-531.

Lewis, C. I. (1917). The Issues Concerning Material Implication, *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, 14, pp. 350-356.

Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, University of California Press.

Nelson, E. J. (1930). Intensional Relations, *Mind*, 39, pp. 440-453

Parry, W. T. (1933). Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation), *Ergebnisse eines mathematischen Kollquiums*, 4, pp. 5-6.

Peano, G. (1957-1959). *Opere scelte*, tres volúmenes, Roma, Edizioni Cremonese.

Quine, W. v. O. (1961). Reply to Professor Marcus, *Synthese*, XIII, pp. 323-330.

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Russell, B. (1906). The Theory of Implication, *American Journal of Mathematics*, 28, pp. 159-202.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2nd ed. London, G. Allen and Unwin.

Sanford, D. H. (1989). If P, then Q. Conditionals and the Foundations of Reasoning, London & New York, Routledge.

van Heijenoort, J.(Ed.) (1967). *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879 - 1931*, Cambridge, Harvard University Press.

Whitehead, A. N. & Russell, B. (1910, 1912, 1913). *Principia Mathematica*, 3 vols, Cambridge, Cambridge University Press.