Arquímedes bajo la lupa: la pequeña balanza de Galileo

Gonzalo Luis Recio[1]

Recibido: 26 de enero de 2017
Versión revisada: 22 de junio de 2017
Aceptado: 1 de agosto de 2017

Resumen. El arquitecto romano Vitruvio relata, en su *De Architectura Libri Decem*, la famosa historia del *eureka* de Arquímedes. Según esta obra, el rey de Siracusa había encargado una corona a un orfebre y, ante la posibilidad de que el artesano le hubiese robado parte del oro entregado para ese fin, le pidió al gran matemático que descubra la verdad. Vitruvio indica, además, el modo según el cual Arquímedes lo habría logrado. Más de un milenio y medio después, un joven Galileo propuso una alternativa al método indicado por Vitruvio, y explicó el modo según el cual, según él, Arquímedes habría podido solucionar el misterio. En este artículo analizo la factibilidad de ambos métodos y pongo la propuesta galileana en el contexto de la posición del gran pisano respecto de la relación entre ciencia y experimentación.

Palabras clave: Arquímedes – Galileo – balanza hidrostática – experimentación.

Title: Archimedes under the magnifying glass: Galileo´s little balance

Abstract. The Roman architect Vitruvius tells, in his *De Architectura Libri Decem*, the famous story about Archimedes´ *eureka*. According to this work, the king of Syracuse had commissioned a golden crown to a goldsmith and, when told about the possibility that the artisan had stolen part of the gold he had been given to that end, he asked the great mathematician to uncover the truth. Vitruvius also tells us which was the method that Archimedes supposedly followed to achieve that goal. More than one and a half millennium later, a young Galileo proposed an alternative to the method indicated by Vitruvius, and explained how, according to him, Archimedes could have solved the mystery. In this paper I analyze the factibility of both methods, and put the Galilean proposal in the context of his position regarding the relation between science and experimentation.

Keywords: Archimedes – Galileo – hydrostatic balance – experimentation.

[1] Universidad Nacional de Quilmes-CONICET
✉ gonzalorecio@hotmail.com
Recio, Gonzalo Luis (2017). Arquímedes bajo la lupa: la pequeña balanza de Galileo. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 2(1), 5-23. ISSN: 2525-1198

1. Introducción

En el año de 1589 la Universidad de Pisa decidió nombrar para la cátedra de Matemáticas a un joven profesor de 25 años, Galileo Galilei. Poco después de comenzar las tareas propias de su puesto, Galileo enfocó sus esfuerzos en el estudio de la obra del príncipe de las matemáticas de la Antigüedad, Arquímedes. Uno de los frutos de estos estudios es una pequeña obra titulada *La Bilancetta*, donde Galileo discute acerca del famoso relato del Eureka de Arquímedes y su paseo desnudo por las calles de la ciudad siciliana. Como es sabido, el episodio nudista del matemático siracusano tuvo su origen en un encargo del rey de Siracusa, Hierón. El gobernante, que había accedido al poder a causa de sus dotes militares, decidió honrar a los dioses que le habían sido propicios entregando una corona votiva de oro a uno de los templos de la ciudad. Con ese fin había dado una cantidad apropiada de ese metal a un orfebre, quien después de un tiempo le devolvió una magnífica corona. Enseguida, sin embargo, comenzaron a correr rumores de que para realizar la corona en cuestión el orfebre no había utilizado todo el oro que Hierón le había entregado, y que en cambio había sustraído parte del mismo, reemplazándolo por un peso equivalente en plata. El honor del rey estaba en juego. El crimen, no obstante, no era fácil de probar: el metal que constituía la corona era –si el orfebre era efectivamente un ladrón– una aleación entre los dos metales, por lo que un simple examen de la corona no necesariamente permitiría dar un veredicto definitivo. El rey se volvió entonces hacia el sabio más famoso de su ciudad, Arquímedes, y le pidió que hiciera las veces de detective, y encontrara el modo de resolver la cuestión y salvar su orgullo. Luego de pensar mucho acerca de la cuestión, Arquímedes decidió, cansado, ir a tomar un baño. Mientras entraba en la bañera llena de agua sucedió uno de esos eventos que son tan comunes en la historia de las matemáticas y, súbitamente, apareció frente a sus ojos la solución al problema. Eufórico, Arquímedes –según dicen los relatos– salió corriendo de la bañera olvidando sus ropas, mientras gritaba *¡eureka, eureka!* –¡(lo) encontré, (lo) encontré!– por las calles de la ciudad.

Esta historia es conocida, fundamentalmente, gracias al relato que de ella hizo el arquitecto romano Marco Vitruvio unos doscientos años después en su *De Architectura Libri Decem* (Vitrubio, 1914). En el libro IX de la obra el escritor romano, mientras hace una alabanza del ingenio de los filósofos y matemáticos griegos, nos dice que Arquímedes realizó "numerosos y admirables descubrimientos" (Vitruvio, 1914, p. 253), pero que el que de modo más claro muestra su genialidad, fue aquél que le permitió resolver el problema de la corona. A continuación, Vitruvio cuenta la historia que referí anteriormente, y describe el método que Arquímedes habría utilizado para solucionar la cuestión propuesta por el rey.

Unos dieciséis siglos después, el joven Galileo se encontraba, como dije, enfrascado en sus estudios relativos a la cátedra que recientemente le habían otorgado en Pisa. Meditando acerca de la historia de Vitruvio sobre Arquímedes, llegó a la conclusión de que la misma, tal y como la transmitió el arquitecto romano, no era correcta. Y no sólo eso: escribió la pequeña obra que señalé, *La Bilancetta*, para indicar cómo debió de haber sucedido realmente el episodio siracusano.

En este artículo busco, a través del estudio de este episodio, mostrar que el interés de Galileo en las cuestiones relativas al diseño experimental y al valor de la observación controlada se encontraban ya, al menos germinalmente, desde el inicio de la vida académica del pisano. Desarrollo el argumento a través de tres secciones. Primero, voy a describir el método que expone Vitruvio en su obra, analizando el alcance y precisión del mismo. En segundo lugar voy a exponer el método alternativo propuesto por Galileo. Para ello voy a explicar algunos principios físicos de origen arquimedeano sobre los cuales Galileo se apoya, y voy a realizar un análisis comparativo[2] con el método de Vitruvio, para lograr evaluar las ventajas de cada uno. Por último, y en tercer lugar, voy a mostrar la posible relación entre los argumentos galileanos contra el método de Vitruvio y sus ideas acerca del método científico, y pondré esta discusión en el contexto del debate historiográfico acerca de la relación entre Galileo y la experimentación.

2. ¡Eureka!

El método descripto por Vitruvio (1914, pp. 253-255) se hizo famoso no sólo por el contexto en el cual Arquímedes –pretendidamente– lo descubrió, sino también por la simplicidad que encierra. Según Vitruvio, al introducirse en la bañera con agua Arquímedes notó el hecho de que el volumen de agua desplazada por esa acción era proporcional al volumen de su propio cuerpo. Siguiendo esa sencilla observación, Arquímedes ideó el procedimiento para determinar si su rey había sido estafado.

Figura 1. Diagrama del método de Vitruvio.

Tomando una gran vasija (fig. 1), la llenó con agua hasta el borde, en el punto *A*. Luego sumergió en ella un cuerpo de plata del mismo peso que la corona sobre la cual recaía la disputa. Como era de esperar, esa acción causó que una cierta

[2] Agradezco al Dr. Christián Carman por su ayuda en el repaso detallado de los cálculos involucrados en la comparación.

cantidad de agua rebalse. Luego retiró el cuerpo de plata, y pudo determinar que el nivel del agua ahora llegaba hasta *B*. Luego volvió a llenar la vasija, y sumergió en el agua un cuerpo de oro que también tenía el mismo peso que la corona. Luego de retirar el cuerpo de oro, determinó que había rebalsado una cantidad de agua tal, que ahora el agua llegaba hasta el punto *C*. Esto indicaba que, a igual peso, el oro desplaza menos agua que la plata, lo que muestra que es más denso. Este procedimiento incluso le permitió a Arquímedes –siempre según Vitruvio– determinar la relación exacta entre las densidades de uno y otro metal. Por último Arquímedes sumergió la corona misma, descubriendo que desplazaba más agua que el cuerpo de oro, esto es, que el nivel del agua, luego de retirada la corona, se encontraba por debajo de *C*, en un punto *D*. Esto significaba, por supuesto, que la corona no era de oro puro, tal y como el orfebre aseguraba, sino que contenía algún otro metal menos denso. Todo apuntaba a que el rumor sobre el reemplazo de oro por plata estaba bien fundado. Vitruvio sugiere que Arquímedes fue incluso capaz de determinar qué cantidad de oro había sido reemplazado.

Hasta aquí el breve relato de Vitruvio. En *La Bilancetta*, sin embargo, Galileo comienza diciendo que esta manera de resolver el problema es "[…] muy grosera y falta de exquisitez […]" (Galilei, 1890, v. 1, p. 215)[3]. Por otro lado, es claro que Galileo, al igual que Vitruvio, era un gran admirador de Arquímedes. Esto queda atestiguado por las palabras que siguen: para Galileo "[…] todos los demás ingenios son inferiores al de Arquímedes, y […] poca esperanza puede quedar a cualquiera de poder descubrir alguna vez cosas semejantes […]" (Galilei, 1890, v. 1, pp. 215-216). De ningún modo, entonces, sus críticas van dirigidas a Arquímedes: es el relato de Vitruvio el que le inspira desconfianza. Dado que los fundamentos teóricos sobre los cuales se apoya el método descripto por Vitruvio son indisputables, al parecer Galileo pensaba que tal procedimiento indicado era incapaz de arrojar resultados con la exactitud pretendida por el relato del romano. Esta cuestión es el primer tema sobre el cual voy a enfocarme.

Para evaluar esta cuestión es central tomar en cuenta un dato indicado explícitamente por Vitruvio. Según el arquitecto, al retirar al cuerpo de plata pura que sumergió en la vasija con agua en primer lugar, encontró que había desplazado un volumen igual a un sextario. El valor de esta unidad de medida romana no es conocido con exactitud, aunque una aproximación razonable es 0,58 lt (cfr. voz *Amphora* en Encyclopaedia Brittannica). Dada la densidad de la plata, 10,49 gr/cm^3, ese volumen equivale a 6,08 kg de ese metal precioso. Puesto que el cuerpo de plata sumergido tenía el mismo peso que la corona, llegamos a la conclusión de que ese era el peso de la corona, según Vitruvio. A esta altura, es necesario considerar que, si el orfebre tenía la pretensión de reemplazar parte del oro sin ser descubierto, era necesario que reemplace una cantidad tal que las características de la aleación resultante fueran suficientemente parecidas a las del oro puro. Considero que es razonable asumir que el reemplazo podía tener una cota máxima

[3] Agradezco la ayuda de Luis A. Recio en la traducción de los textos en italiano.

de aproximadamente 8,33% del oro.[4] Por lo tanto podía reemplazar, como máximo, 506,464 gr de metal. Por cada gramo de oro[5] que es reemplazado por plata, se agregan unos 43,515 mm^3 a la corona. Por lo tanto, si hubiera reemplazado el máximo posible, el volumen de la misma habría aumentado en 22038,78 mm^3. Una vez que conocemos ese valor, la cuestión relevante es si Arquímedes pudo haber detectado una variación de volumen tal, utilizando el procedimiento descripto por Vitruvio.

Vitruvio indica, expresamente, que Arquímedes usó un *vas amplum* para llevar adelante el procedimiento. El término latino *vas,-is* puede referirse tanto a un recipiente de gran tamaño como a un vaso. Asumamos, en principio, que utilizó una vasija de tamaño considerable.

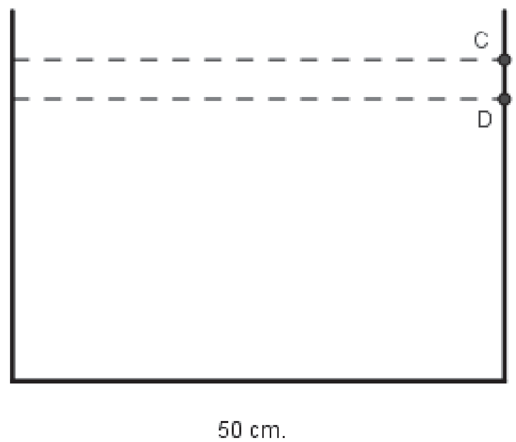

Figura 2. Diagrama para una vasija cilíndrica de 50 cm de diámetro.

Para simplificar los cálculos voy a suponer que ésta era de forma cilíndrica. Supongamos una vasija grande, de 50 cm de diámetro en la boca (fig. 2), y de una profundidad cualquiera, la necesaria para poder contener con comodidad a los cuerpos metálicos. Dado un diámetro tal, cada mm de profundidad implica 196349,54 mm^3 de volumen. La diferencia en volumen producida por un reemplazo de 506,464 gr de metal precioso, implica, por tanto, una diferencia *CD* en la altura del agua de tan sólo 0,112 mm. Esa diferencia era, por supuesto, completamente imperceptible. Es posible, sin embargo, que Arquímedes haya utilizado un recipiente de menor diámetro. Supongamos que el recipiente utilizado, en lugar de tener 50 cm de diámetro, tenía sólo 15 cm. Sin ser una vasija grande, continúa siendo un gran vaso, por lo que se ajusta a una posible traducción de la expresión *vas amplum* usada por Vitruvio. En ese caso, cada mm de profundidad del recipiente implica 17671,458 mm^3 de volumen. Un reemplazo del 8,33%

[4] Esta es la diferencia entre oro 24K –24 partes de 24 son oro– y el nivel de pureza que le sigue en la graduación de pureza moderna, 22K –22 partes de 24 son oro–, siendo las restantes 2 partes de algún metal menos maleable. Esto permite obtener un material más duro, y por lo tanto más apto para la fabricación de joyas duraderas (cfr. Smith, 1978). Esta diferencia en la maleabilidad hace que un orfebre entrenado pueda distinguir ambos niveles de pureza sin mucha dificultad.

[5] La densidad del oro es 19,3 gr/cm^3.

hubiera producido una diferencia en la altura del agua igual a 1,247 mm. Hay, sin embargo, un modo a través del cual el matemático griego pudo haber mejorado notablemente la precisión del procedimiento, e incluso el texto mismo de Vitruvio parece sugerir que este fue el caso (cfr. Vitruvio, 1914, p. 254). Vitruvio relata que Arquímedes primero sumergió la plata en el recipiente, luego la retiró, y luego volvió a llenarlo hasta el borde. Sólo entonces, nos dice el arquitecto romano, Arquímedes midió cuánta agua había sido desplazada. No lo hizo antes de rellenar el recipiente, sino después. Sospecho que esto delata un detalle no menor, que vuelve al relato de Vitruvio mucho más plausible. Creo que Arquímedes no midió el agua desplazada directamente en el recipiente usado para sumergir los metales –como en la fig. 1–, sino que utilizó para ello un segundo recipiente medidor translúcido.

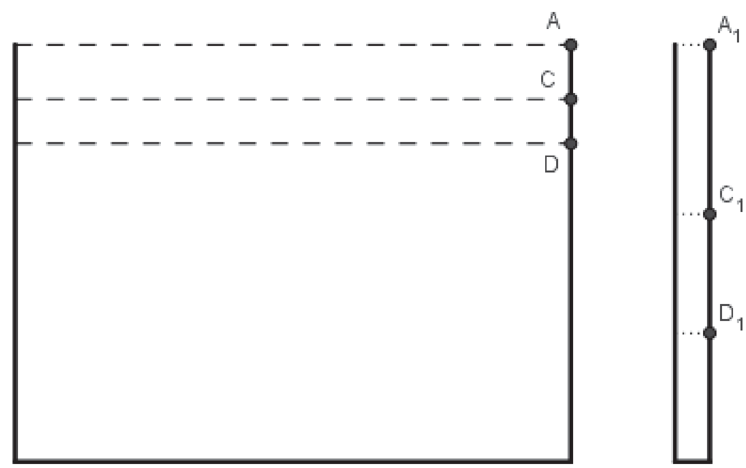

Figura 3. Diagrama del método de Vitruvio con recipiente medidor independiente.

En la fig. 3 vemos dos recipientes. El grande, a la izquierda, es aquél que debe ser llenado inicialmente hasta el borde, y en el que se sumergen los diversos cuerpos metálicos. A la derecha se ve el recipiente medidor, más angosto. Arquímedes sumergiría, entonces, el cuerpo en el recipiente grande, para retirarlo luego del rebalse del agua correspondiente. Luego tomaría un segundo recipiente cuidadosamente graduado, y lo llenaría de agua. Por último, comenzaría a volcar el agua desde el recipiente medidor hacia la vasija, hasta lograr que esta última estuviera llena hasta el borde, como al inicio. Cuanta más agua hubiere rebalsado a causa de la inmersión del cuerpo, más agua haría falta para volver a llenar la vasija hasta el borde. Por lo tanto, más vacío quedaría el recipiente medidor al finalizar el procedimiento. Por ejemplo, si al sumergir el oro y retirarlo el nivel del agua bajó desde A hasta C en la vasija, será necesario volcar el agua contenida entre A_1 y C_1 en el recipiente medidor. Si después se sumerge la corona en la vasija y el agua baja desde A hasta D, será necesario entonces volcar el agua contenida entre A_1 y D_1. La gran ventaja de esta modificación es que dado que el recipiente medidor no es el que recibe en su interior a los cuerpos metálicos, puede ser confeccionado con un diámetro mucho menor. Ahora bien, en un recipiente cilíndrico se da que

$$v = \pi r^2 h$$

donde v es el volumen del recipiente, r es su radio, y h su altura. Si mantenemos constante a v, y reducimos el r, entonces necesariamente h debe crecer. Esto significa que a medida que se reduce el diámetro del recipiente medidor, cualquier modificación en los volúmenes medidos causará mayores diferencias en altura. Y esas diferencias en altura son las que, justamente, se miden como signo del reemplazo entre metales. Además, dado que r, uno de los factores utilizados para calcular el volumen, es elevado al cuadrado, v decrece exponencialmente a medida que r decrece. Esto significa que, si v permanece constante a medida que r decrece, entonces h crece en la misma proporción. Como veremos, esta característica de la relación entre radio y altura en un recipiente cilíndrico tiene grandes ventajas para el método planteado por Vitruvio.

Supongamos que, efectivamente, Arquímedes utilizó un segundo recipiente medidor. Para el caso, podía utilizar un recipiente cilíndrico de tan sólo 5 cm de diámetro. Así, cada mm de altura representa tan sólo 1963,495 mm^3 de volumen, por lo que la diferencia de volumen producida por el reemplazo de metal indicado más arriba implica una diferencia en la altura del agua de unos notables 11,224 mm. Esta diferencia vuelve al método mucho más plausible. Los dos factores clave en este método son, primero, el límite que tenía Arquímedes para percibir cambios de altura en la columna de agua. Cuanto más pequeña sea esta magnitud, más preciso el método. Segundo, el diámetro del recipiente medidor. Como dije, cuanto más angosto, el cambio de volumen producido por el reemplazo de metal resultaría en mayores cambios en la altura de la columna de agua en el recipiente.

Respecto de lo primero, pienso que es razonable suponer que la precisión máxima de Arquímedes al observar diferencias de altura en la columna de agua no podía ser superior a 1 mm. El motivo fundamental de esto es el hecho de que, por efecto de capilaridad, la superficie del agua tiende a curvarse, sobre todo al encontrarse dentro de recipientes tan angostos. Por ello es muy difícil indicar, en estos casos, cuál es el nivel exacto de la superficie del agua.

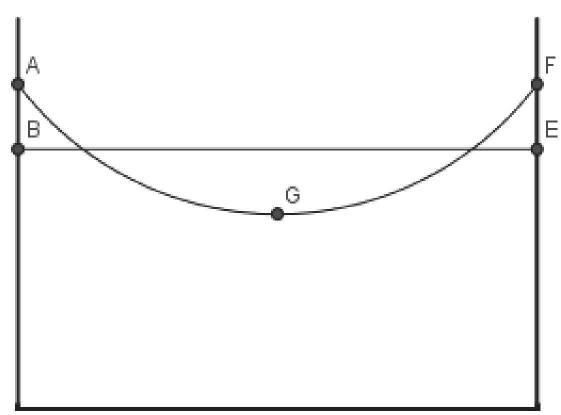

Figura 4. Diagrama de la curvatura causada por el ascenso por capilaridad.

La línea BE en la fig. 4 representa la forma de la superficie del agua sin capilaridad, mientras que la curva AGF indica la forma que tiene a causa del ascenso del agua por capilaridad en las paredes del recipiente. Es difícil determinar si la altura del agua está en A y F, en G o, como es de hecho el caso, en B y E.

Este es, no obstante, el único problema producido por el ascenso por capilaridad. Si bien, sin dudas, en recipientes tan pequeños el efecto de ascenso por capilaridad es notorio (cfr. Batchelor, 2000, pp. 60-68), es el mismo para todas las mediciones, por lo que puede ser desestimado sin mayores problemas.

Como vimos más arriba, la diferencia entre ambos volúmenes no pudo haber sido mayor a 22038,78 mm^3. Dada una precisión de 1 mm, para detectar el robo es necesario que el recipiente posea un radio tal que el volumen mencionado se corresponda con una altura igual a 1 mm. Así, para conocer ese radio sólo hay que tomar la fórmula para el volumen de un cilidro, $v = \pi r^2 h$, y reemplazar v por la diferencia de 22038,78 mm^3, y h por el límite de precisión 1 mm. Si se despeja r, se obtiene entonces el diámetro necesario para un recipiente medidor capaz de detectar el robo. Al hacer estos cálculos encontramos que cuando el recipiente medidor tiene un diámetro igual o menor a 167 mm, el robo se vuelve detectable. A partir de los 118 mm, además, la diferencia produce un cambio de altura en el agua mayor a 2 mm, por lo que es posible, al menos de modo grosero, conocer la magnitud del reemplazo. El siguiente salto de precisión se produce con diámetro de 96 mm para el recipiente medidor, con una diferencia de altura mayor a 3 mm. Y el siguiente es en 83 mm. El límite para la precisión del método está sujeto a la capacidad de Arquímedes de confeccionar un recipiente medidor lo suficientemente angosto como para que la mínima diferencia observable –en nuestro caso, 1 mm– represente el mayor volumen posible. Es difícil determinar cuál era exactamente el límite técnico de Arquímedes. Pienso, sin embargo, que un recipiente de 5 mm de diámetro se encontraba, sin dudas, dentro de las posibilidades técnicas de la época.[6] Un reemplazo de 506,464 gr de metal implicaría, en un recipiente semejante, una diferencia de altura en la columna de agua de 1122,436 mm. Arquímedes no sólo hubiera sido capaz de detectar un robo minúsculo de 0,451 gr, sino, como sugiere Vitruvio, de decirle al rey cuánto oro había sido reemplazado con un margen de error de aprox. $\pm$ 0,198 gr.

Estos datos muestran que, sin lugar a dudas, el método descripto por Vitruvio hubiera sido capaz de resolver el problema presentado por Hierón a

[6] Se han hallado numerosos restos arqueológicos que atestiguan el gran nivel técnico que los artesanos del vidrio habían alcanzado entre los siglos II a.C. y II d.C. en el Mediterráneo. Los *unguentaria*, pequeños recipientes que contenían desde mezclas con fines médicos hasta perfumes, son un ejemplo del tipo de recipientes que Arquímedes hubiera necesitado. Sus largos cuellos de pequeño diámetro hubieran podido convertirse con facilidad en el recipiente medidor que menciono. Pueden verse algunos magníficos ejemplares en el Museo Arqueológico del Cerámico de Atenas. Por otro lado, como ejemplo de la artesanía de precisión de la época, en un mecanismo astronómico descubierto en los alrededores de la isla griega de Anticítera a comienzos del s. XX, y que fue datado a una fecha cercana a Arquímedes (Carman & Evans, 2014; Freeth, 2014), hay partes que muestran un nivel de precision incluso inferior a 0,5 mm (Carman & Di Cocco, 2016).

Arquímedes. Si bien es necesario contar con gran destreza técnica para confeccionar los instrumentos de medición a utilizar, ese grado de exactitud buscado se encontraba dentro de las posibilidades de los clásicos en general, y de Arquímedes en particular. Es verdad que hay numerosas variables que restan precisión al procedimiento: las minúsculas irregularidades en la forma del recipiente medidor, la absorción del agua por los materiales de los cuales se hacían los recipientes, la variación de capacidad de los recipientes producto de la dilatación térmica[7], la dificultad para determinar cuándo un recipiente se encontraba lleno hasta el borde, e incluso la posibilidad de que parte del agua salga de los recipientes no por el desplazamiento producido por la inmersión del cuerpo, sino meramente por quedar adherido al mismo al ser retirado.

No obstante estas dificultades, los amantes de la justicia pueden quedarse en paz: si Arquímedes declaró culpable al orfebre utilizando este método, es porque con toda probabilidad lo era. Galileo Galilei, sin embargo, no lo consideró suficiente. En la próxima sección investigaremos sus motivos para ello.

3. La balanza de Arquímedes

En su comentario respecto del método que describe Vitruvio, Galileo no sólo afirma que éste no fue el utilizado por Arquímedes, sino que ofrece una explicación a la confusión de Vitruvio. Según Galileo (1890, p. 216), el descubrimiento de Arquímedes debió haberse hecho conocido entre los habitantes de la ciudad. Enterado de que el método involucraba la inmersión de cuerpos en recipientes con agua, algún autor contemporáneo habría dejado noticia del hecho por escrito. No conociendo nada más, el desconocido autor probablemente completó el relato con los demás detalles del procedimiento. Este fue el relato que llegó a Vitruvio, a través de quien nos llega a nosotros. Como vimos, Galileo lo considera indigno del genio de Arquímedes. Según nos dice en el mismo lugar, luego de investigar y reflexionar acerca de dos obras del matemático siracusano, *Sobre los cuerpos flotantes* y *Sobre el equilibrio de los planos* –ambas llegaron hasta nosotros–, llegó a la conclusión de que existía otro método más preciso y más afín a los intereses teóricos de Arquímedes.

Galileo propone que probablemente el método utilizado por Arquímedes fue similar al siguiente: en primer lugar, hay que confeccionar una balanza que tenga,

[7] Es interesante notar que Arquímedes pasó, durante su juventud, varios años en Alejandría. Allí debió de haber conocido, directa o indirectamente, los trabajos de Filón de Bizancio, contemporáneo suyo que vivió casi toda su vida en esa ciudad. Una de las obras más interesantes de Filón es su *Pneumática*, donde describe las propiedades del aire y del agua, indicando algunas aplicaciones técnicas posibles a través de la variación de la presión de esos elementos por cambios en la temperatura de los mismos. La obra es el primer tratado que conozcamos donde se señalan fenómenos que luego serían unificados teóricamente bajo ley de dilatación térmica, que indica que la longitud, área y volumen de un cuerpo aumentan al aplicarse sobre el mismo un aumento de temperatura.

"[...] al menos dos *braccia*[8] de largo [...]". El uso de esta balanza para solucionar el problema de la corona supone el conocimiento de algunos descubrimientos arquimedeanos. Como explica el genio griego (Cfr. las últimas seis proposiciones del libro I de *Sobre los cuerpos flotantes*, y la primera del libro II (Arquímedes, 2009, pp. 198-209), todo cuerpo al ser sumergido en agua disminuye su peso en una cantidad igual al peso del agua correspondiente al volumen del cuerpo. Por ejemplo, al sumergir en agua un cuerpo de 2 kg de peso y 1 lt de volumen, ese cuerpo perderá el peso correspondiente a 1 lt de agua, es decir, 1 kg. Éste es el famoso Principio de Arquímedes (de ahora en más, PA). El matemático también explica (Cfr. las proposiciones seis y siete del libro I de *Sobre el equilibrio de los planos* (Arquímedes, 2009, pp. 86-89) que si tenemos una palanca sobre un punto de apoyo y dos objetos sobre los extremos de la misma, la palanca se hallará en equilibrio sólo si las distancias entre sus centros de gravedad y el punto de apoyo son inversamente proporcionales a sus respectivos pesos. Por ejemplo, si uno de los dos extremos tiene un objeto de 2 kg y el otro uno de 4 kg, entonces para alcanzar el equilibrio la distancia desde el punto de apoyo al centro de gravedad del objeto más pesado deberá ser la mitad que al centro de gravedad del objeto más liviano. Esta es la llamada Ley de la Palanca (de ahora en más, LP).

Supongamos ahora la siguiente configuración (fig. 5), donde la longitud AB es la balanza, y C es su centro exacto. Si se apoya la balanza en C sin que haya nada en sus extremos, deberá estar perfectamente equilibrada.

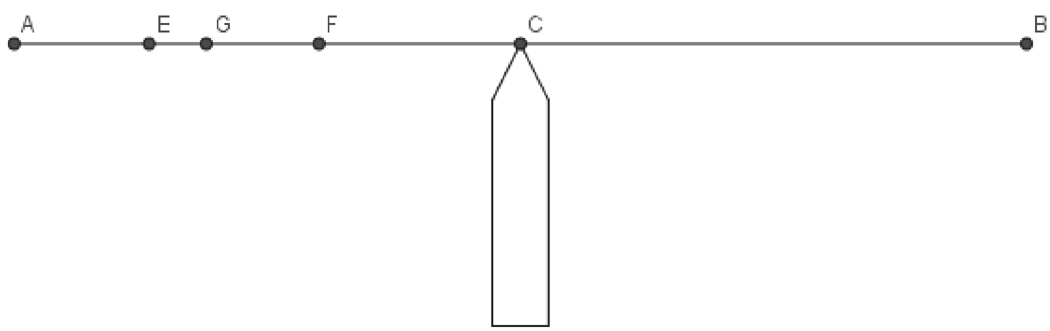

Figura 5. Diagrama de la balanza propuesta por Galileo.

Ahora coloquemos en A un cuerpo cualquiera, con la condición de que tenga el mismo peso que la corona. Luego coloquemos en B un cuerpo de oro que también tenga el mismo peso que la corona. Dado que ambos cuerpos pesan lo mismo y se encuentran a la misma distancia del punto de apoyo, por LP sabemos que la balanza permanecerá equilibrada. Ahora sumerjamos el cuerpo de oro en un recipiente con agua. Gracias a PA, sabemos que la fuerza ejercida por el oro hacia abajo disminuirá en proporción a su volumen. Eso significa que la balanza perderá su equilibrio. Para

[8] La longitud de un *braccio* variaba de ciudad a ciudad, e incluso en cada una de ellas había diversos tipos. El valor aceptado actualmente para el *braccio* usado por Galileo –quien por otro lado no parece expresarse con precisión a este respecto– se halla entre 53 y 56 cm. Cfr. (Roche, 1998: 251, nota 93). En adelante voy a suponer el valor intermedio de 54,5 cm.

volver a equilibrarla es necesario mover el contrapeso que se encuentra en A hacia un nuevo punto E, más cercano al centro C de la balanza. Luego volvamos a hacer la misma experiencia, sólo que esta vez colocaremos en el punto B un cuerpo de plata con el mismo peso que la corona. Dado que la plata es menos densa que el oro, al ser sumergida en agua desplazará más agua. Como indica PA, esto significa una pérdida mayor de peso. La consecuencia directa de esto es que, al mover el contrapeso hacia el punto de apoyo C con el fin de volver a equilibrar la balanza, habrá que hacerlo hasta un punto F que necesariamente estará más cerca de C que lo que lo está el punto E. A través de esta aplicación de estos dos principios arquimedeanos, Galileo logró convertir una proporción entre dos densidades, las del oro y la plata, en una proporción entre dos longitudes, las de AE y AF. La relación entre ambas proporciones es inversa, pues a mayor longitud entre A y el punto de equilibrio del metal, menos densidad del mismo. Una vez determinada esta relación, Galileo indica que hay que realizar el mismo procedimiento con la propia corona, colocándola en el punto B. Si al sumergirla necesitamos mover el contrapeso hasta el punto E para volver al equilibrio, eso significa que la corona está compuesta exclusivamente por oro. Si en cambio necesitáramos moverlo hasta el punto F, eso sería signo de que el material es plata pura. Si, como dice el relato, la corona esta una mezcla de ambos metales, entonces el nuevo punto de equilibrio G se encontrará entre E y F. Como dice Galileo, cuanto más cerca se halle G de E, mayor será la proporción de oro, y cuanto más cerca de F, mayor cantidad de plata tendrá la corona. De hecho, la proporción entre las longitudes FG y EF es la misma que entre la cantidad de oro y de plata en la corona. Pero la descripción galileana no termina allí. Quizá inspirado en sus recuerdos infantiles, en los cuales su padre, el músico Vincenzo Galilei, seguramente cerraba los ojos prestando atención únicamente a lo que los sonidos le decían (Heilbron, 2010, pp. 1-4), Galileo diseñó un método para medir las pequeñas distancias entre los puntos utilizando no la vista, sino el oído. Propone tomar un hilo metálico sumamente fino, y enrollarlo cuidadosamente en torno a la balanza (fig. 6), de tal modo que toda la sección de la misma que se encuentre entre E y F quede cubierta por él. Dado que el hilo metálico es muy fino como para ser distinguido, nos dice Galileo, hay que tomar un estilete sumamente afilado, y pasarlo suavemente sobre el hilo enrollado. Las pequeñísimas depresiones que hay entre cada vuelta del hilo causarán que, cuando el filo pase sobre el mismo, haga un pequeño sonido metálico. Así, contando los sonidos, es posible determinar la cantidad de vueltas que hay entre cada punto, y de ese modo determinar la proporción de metales usados para la confección de la corona.

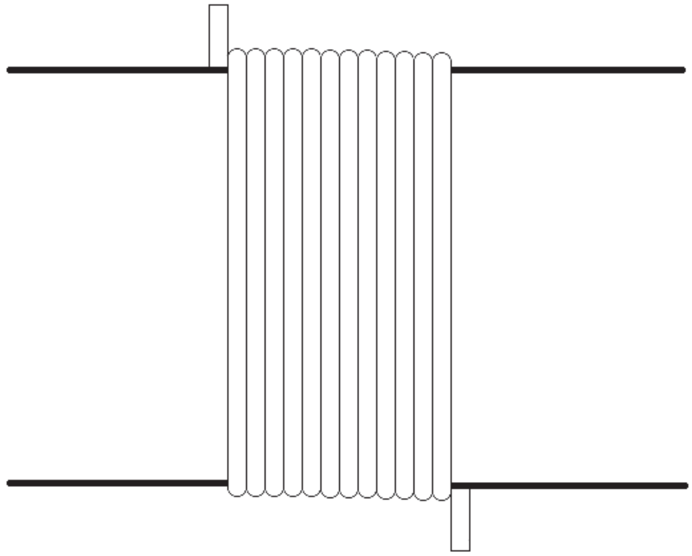

Figura 6. Esquema del método de la disposición del alambre en la balanza propuesta por Galileo para medir diferencias entre los puntos de equilibrio. El estilete es pasado por las minúsculas depresiones entre cada vuelta del alambre, produciendo un sonido.

Es difícil determinar cuál era el grosor del hilo propuesto por Galileo. No obstante, voy a proponer una medida que considero puede ser tomada como el límite. Dado que la máxima resolución para un ser humano con excelente visión es de alrededor de un minuto de arco (Yanoff & Duker, 2009, p. 54), y respecto del punto más cercano donde es posible hacer foco, alrededor de 16 cm para un hombre de 40 años (Rogers, 2011, p. 70), eso implica que el límite de visibilidad para un hilo metálico es de alrededor de 0,0465 mm. Supongamos que el hilo tenía un grosor inferior a eso, por ejemplo, 0,045 mm. Es, ciertamente, una pretensión muy grande: estamos hablando de un hilo tan fino que, para un observador de las características de Arquímedes o Galileo, es virtualmente invisible. Por otro lado, aunque Arquímedes hubiera podido percibir auditivamente diferencias tan pequeñas, esto no quiere decir que era capaz de mover el contrapeso según distancias tan pequeñas. Ninguna balanza es perfecta, en el sentido de que nunca hay un solo punto donde es posible ubicar el contrapeso para lograr el equilibrio. Esto es causado por el hecho de que en ninguna balanza posible el contacto entre brazo y fulcro es un punto. Si bien habrá sólo un lugar donde el equilibrio esté causado por el respeto a LP, en los demás puntos posibles sobre el brazo el efecto causado por el apoyo del brazo sobre una superficie extensa será lo suficientemente poderoso como para mantener el equilibrio en la balanza a pesar de la falta de proporción adecuada. Es allí donde debemos buscar el límite de precisión del método, y no en el grosor del hilo metálico. La precisión a este respecto depende, fundamentalmente, de la extensión que tenga el contacto entre fulcro y brazo. Asumamos por un momento que, dada esta limitación, el nivel de precisión del método es 1 mm.

Los cálculos para el caso de la balanza son ligeramente más complejos. Si quisieramos comparar la precisión del método de Vitruvio con el propuesto por Galileo, comparando el mínimo reemplazo de oro por plata que cada uno pudiera detectar, deberíamos, para el caso de la balanza, proceder como sigue. En primer lugar, calcular dónde quedaría el contrapeso luego de poner el oro sumergido en el punto B calculando, por ejemplo, el valor de CE. Luego habría que preguntar cuánto debería pesar la corona sumergida si movemos al contrapeso desde E hasta F, según una distancia igual a la mínima unidad de precisión, en nuestro caso, 1 mm. Esa diferencia de peso es causada, según PA, por una diferencia de volumen, que en este caso será el mínimo detectable por la balanza. Esa diferencia de volumen estará, entonces, causada por el mínimo reemplazo de oro por plata detectable a través de este procedimiento.

Tomando en cuenta la longitud mínima propuesta para la balanza de Galileo, unos 109 cm, y esta precisión de 1 mm, dada una corona de 6,08 kg, Arquímedes hubiera podido detectar un reemplazo de 256,368 gr de oro por plata. No es un resultado tan notable. Con el método de Vitruvio, este resultado es alcanzable con un recipiente de 140,516 mm. Por supuesto, es posible aumentar la precisión del método de Galileo de un modo muy simple: a través de la extensión de la longitud de la balanza. Si duplicamos la longitud de la balanza a unos 218 cm, entonces el mínimo reemplazo detectable es de 5,768 gr. Como dije más arriba, dadas las características de la relación entre radio y volumen de un recipiente cilíndrico, un pequeño decrecimiento en el diámetro del recipiente causa un gran aumento de precisión en la medición de volúmenes. Y esta relación se hace más eficiente cuanto más pequeño es el radio. En el caso de la balanza, no obstante, la relación es lineal: para que el mínimo detectable sea la mitad, es necesario duplicar el largo de la balanza. Esto hace que el alargamiento se vuelva cada vez más ineficiente. Mientras que al añadir un cm a la balanza original de 109 cm Arquímedes hubiera sido capaz de detectar un reemplazo de 254,037 gr, es decir, mejorar su mínimo detectable en 2,33 gr, al llegar a los 218 cm, si se le agrega un cm para llegar a una balanza de 219 cm, la mejora en el mínimo detectable es de tan sólo 0,585 gr. Alargar la balanza es tan poco eficiente que para alcanzar el mínimo detectable del método de Vitruvio, 0,451 gr, Arquímedes hubiera necesitado construir una balanza de casi 619 m de largo. Esto es, por supuesto, imposible. En el caso de que Arquímedes fuera capaz de mejorar esa precisión de 1 mm, y reducirla a la mitad, el método galileano es todavía sumamente inferior: para alcanzar la precisión de Vitruvio haría falta aún una longitud de más de 300 m. Supongamos, no obstante, por mor de la argumentación, que efectivamente Arquímedes pudo alcanzar la precisión de 0,045 mm indicada arriba para el hilo metálico. En ese caso, para igualar la precisión del método de Vitruvio, bastaría con un largo de 27,87 m de largo.

El método propuesto por Galileo, no obstante, es sumamente eficiente para despejar las dudas acerca del crimen del orfebre. Dada una corona de 6,08 kg y la peor precisión propuesta de 1 mm, bastaba con un brazo de 55,175 cm de largo para detectar el reemplazo del 8,33% del oro por plata. Con una precisión de 0,5 mm la longitud necesaria se reduce a alrededor de 27,6 cm. Por último, si la precisión es de 0,045 mm, basta con un brazo de apenas 2,5 cm.

4. Galileo, la historia de la corona, y el método científico

En los párrafos anteriores hemos analizado la capacidad de cada uno de los dos métodos para determinar el reemplazo de oro por plata en la corona. Como vimos, el método de Vitruvio permite niveles de precisión imposibles para el método galileano. ¿Por qué Galileo prefirió el método de la balanza, entonces? Una primera respuesta la da el propio Galileo, al decirnos que la idea de la balanza le vino cuando estudiaba las obras arquimedeanas. Según el pisano, su método es más afín a las preocupaciones de Arquímedes y a los temas acerca de los cuales investigó y escribió durante su vida. Esto es parcialmente verdadero. Ciertamente el método de la balanza incorpora cuestiones que por siempre estarán asociadas a Arquímedes: el Principio de Arquímedes y la Ley de la Palanca. Las investigaciones físicas del siracusano fueron pioneras en estos ámbitos. Podría sostenerse, sin embargo, que los descubrimientos más notables e influyentes de Arquímedes no se encuentran en las matemáticas aplicadas, sino en las matemáticas puras. Sus argumentos geométricos acerca de las superficies y volúmenes de cuerpos de diversos tipos fueron el fundamento de investigaciones matemáticas durante milenios. Estos temas, no obstante, están ausentes en el método de Galileo, mientras que son omnipresentes en el caso del método descrito por Vitruvio. Haya sido cual haya sido el modo concreto de medir las diferencias en el agua desplazada, todo cálculo de precisión debe comenzar con un cálculo de volumen basado en principios ligados a esas preocupaciones de Arquímedes.

La respuesta a la preferencia galileana, pienso, debe buscarse en otro lado. En primer lugar, vimos al final de la sección 2 que, si bien no es tan preciso como el de Vitruvio, el método de Galileo es capaz, con comodidad, de solucionar el problema planteado a Hierón. Una balanza de poco más de 1 m, una precisión de 1 mm. Eso basta para resolver el enigma de la corona, y para hacerlo con cierta exactitud respecto de la magnitud del robo. Es posible que Galileo haya considerado que este método era más simple, si se lo aplicaba a problemas de un grado similar al propuesto en el relato de Vitruvio, y que por eso lo haya elegido.

Aunque quizá esto haya podido jugar un rol en su elección, creo sin embargo que hay un segundo factor mucho más interesante, y que, en mi opinión, resulta decisivo al momento de explicar las críticas galileanas al método propuesto por Vitruvio.

Galileo fue, sin dudas, uno de los personajes más importantes en la historia de aquello que llamamos, en la actualidad, método científico. Sin ingresar en el debate acerca de a qué nos referimos precisamente con esa expresión, es claro que el nombre de Galileo Galilei estará por siempre asociado a ella. Un aspecto relevante para nuestra discusión es la presencia, en los escritos galileanos más tardíos, de la noción de *ceteris paribus*. Si bien ni esta expresión ni otra equivalente es utilizada de modo explícito, es claro que la noción se encuentra presente. En su última obra, el *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, Galileo trata el tema del movimiento acelerado. Es sabido que una de las cosas que más interesaba al pisano era la cuestión de la dinámica de la caída libre de los cuerpos. La famosa –y aparentemente apócrifa- historia del lanzamiento de cuerpos de diverso peso desde el campanario de la Catedral de Pisa por Galileo tiene como protagonista, precisamente, uno de los descubrimientos más notables del pisano: todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Dice Salviati, el personaje del diálogo galileano que representa la posición del propio autor:

> Aristóteles declara que móviles de diverso peso, en el mismo medio, se mueven (en lo que depende de la gravedad) según una velocidad proporcional a su peso, y lo ejemplifica con móviles en los cuales es posible percibir el puro y absoluto efecto del peso, eliminando las otras consideraciones como la figura [...] (Galilei, 1890, v. 8, p. 109).

El texto continúa mostrando que la afirmación aristotélica es errada, y se apoya tanto en experimientos reales en los que se observan cuerpos en caída y se comparan velocidades, como en experimentos ideales donde se alcanza la misma conclusión a través de razonamientos. Lo importante aquí es que la eliminación de otros factores relevantes para la velocidad de caída de un cuerpo, como el ejemplo señalado de la figura del objeto, variando únicamente el factor sobre el cual se está poniendo el foco, esto es, el peso del cuerpo, es evidentemente una clara referencia a la necesidad de mantener constantes las demás variables –figura– para poder medir el efecto de una sola –peso– sobre un fenómeno determinado –velocidad de caída–. Y este pasaje es tan sólo uno de muchos que hacen referencia a la misma cuestión.

Aquí se encuentra, en mi opinión, el nudo de la crítica galileana al método de Vitruvio. Pienso que Galileo, al comparar los dos métodos, tuvo en consideración la capacidad para mantener constantes todas las otras variables irrelevantes para el procedimiento, y de ese modo aislar la influencia de la única variable relevante, la densidad del metal. Así, encontró que en el método de Vitruvio la cantidad de variables con potenciales efectos sobre el resultado que debía controlar era más numerosa que en el método propuesto por él. Ambos métodos buscan transformar diferencias de volumen –esto es, diferencias en una magnitud espacial tridimensional– en diferencias en distancia –una magnitud espacial esencialmente unidimensional. El método de Vitruvio, no obstante, logra esa conversión de un modo mucho más indirecto que el método de la balanza galileana. Mientras que en el primero la altura de la columna en el recipiente medidor está midiendo la cantidad de agua necesaria para rellenar un recipiente que fue parcialmente vaciado producto del desplazamiento de agua causado por la inmersión de un metal, en el segundo la posición del contrapeso en el brazo es causado por la simple aplicación de LP, y las distancias entre ambas posiciones son reflejo directo de la diferencia de volúmenes. Hay también, como no puede ser de otro modo, variables a controlar. No obstante, dado que la balanza es la misma en todas las mediciones, mientras que en el método de Vitruvio el llenado de los recipientes debía realizarse nuevamente en cada medición, éstas pueden ser consideradas, en principio, como más fácilmente controlables.

El jóven Galileo del que estamos hablando es todavía, apenas, la promesa del renovador de la física que vendrá después. Creo, no obstante, que el caso del crimen de la corona deja entrever, quizá, el temprano interés galileano, que más tarde lo haría famoso, por el diseño experimental. El método de Vitruvio es en la práctica, probablemente, más preciso. Sus resultados son más exactos. El procedimiento como tal, no obstante, es a los ojos de Galileo excesivamente crudo, la cantidad de variables a controlar son demasiadas. Su propio método es en ese sentido más límpido, más controlable. Es capaz, además, de resolver el problema concreto propuesto a Arquímedes. A los ojos de Galileo, un genio de la talla del gran matemático de Siracusa tuvo que haber tomado en cuenta este aspecto del procedimiento. Aún cuando las variables a controlar no influyeran significativamente en el resultado, aún cuando el método de Vitruvio tuviera, en la teoría y en la práctica, mayor precisión que el de la balanza, aún en esos casos, un científico del calibre de Arquímedes no podría haber desestimado este aspecto casi estético del procedimiento, y debe de haber, según Galileo, inclinado su preferencia hacia un método como el de la balanza.

Estas consideraciones constituyen un caso de interés para el debate más general acerca de la relación entre el propio Galileo y la experimentación. En efecto, desde los estudios de Koyré a fines de la década de los treinta (cfr. Koyré, 1980), una de las posiciones más importantes acerca de esta cuestión es la que indica que Galileo no era un investigador que sustentaba sus teorías en experimentos reales, efectivamente llevados a cabo por él mismo, sino que éstos eran meramente ficciones cuya única función es hacer más convincente el argumento. La nueva ciencia galileana estaría así fundada en el puro pensamiento.

Esta opinión, no obstante, encontró a mediados del siglo XX oposición en una serie de investigaciones en las cuales se recreaban algunos experimentos descriptos por Galileo[9], encontrando que, utilizando sus materiales y métodos, los resultados señalados por el pisano podrían, efectivamente, haber sido obtenidos a través de la experimentación. En Settle (1961) se describe la recreación del experimento de los *Discorsi* en los cuales Galileo estudia la aceleración de un cuerpo en caída. Allí (Galilei, 1890, vol. 8, p. 213), el científico italiano indica que para medir los tiempos utilizó un recipiente que, durante el período que se deseaba medir, dejaba escapar agua por un pequeño tubo, agua que era recogida en otro recipiente. Luego se pesaba, con una "exactísima balanza", el recipiente con el agua vertida, y la proporción entre los diversos pesos indicaba la proporción entre los tiempos. Koyré (1980, p. 145) se refiere a ese relato galileano con desdén, concluyendo que la precisión pretendida por Galileo estaba fuera de su alcance, y que éste es tan sólo uno de los tantos experimentos ideales que Galileo acostumbraba a presentar. La recreación de Settle, no obstante, muestra que los

[9] Algunos de los textos donde Galileo había dejado estas descripciones no habían sido incluidos en la edición de 1890 de sus obras completas (cfr. Boido, 1996, p. 313).

límites de los instrumentos de la época estaban completamente dentro las pretensiones galileanas.

Similares reconstrucciones de otros experimentos fueron realizadas en MacLachlan (1973) y Drake & MacLachlan (1975), entre otros. Algunos autores, sin embargo, matizaron un poco el experimentalismo galileano que estos estudios buscan demostrar, atacando diversos aspectos de las reconstrucciones realizadas. Así, por ejemplo, en Beltrán (1998) el autor pone bajo la lupa la posibilidad de que los experimentos que Galileo describe muestren, al menos en algún caso, fenómenos conocidos en la época. De esta manera se debilitaría la idea de que Galileo efectivamente los realizó tal y como él los describe.

La discusión, como vemos, es compleja. La reconstrucción desarrollada en este artículo, y la respuesta que doy al hecho de que el método recomendado por Galileo para detectar el robo es, en sí mismo, menos preciso que el propuesto por Vitruvio, constituyen un aporte al debate respecto de estas cuestiones, y ayudan a percibir con mayor claridad la relación entre Galileo y un método experimental riguroso.

5. Conclusión

En este trabajo se ha realizado un análisis de la precisión alcanzable por los dos métodos que fueron propuestos para explicar el éxito de Arquímedes en el caso de la corona de Hierón. Luego de comparar ambos métodos a partir de parámetros que o bien constan explícitamente en las fuentes, o bien han debido ser asumidos fundándonos en diversos argumentos *ad hoc*, se encontró que si bien los dos son capaces de resolver el problema concreto que Hierón presentó a Arquímedes, el método propuesto por Galileo se vuelve impracticable cuando se le exige una precisión mayor que la que ese caso necesita.

Si bien no es posible justificar la elección galileana a partir de la precisión de su propuesta, encontramos que coincide muy bien con otras preocupaciones típicamente galileanas. Pues el método propuesto por Galileo, aunque menos preciso que el de Vitruvio, es, en términos experimentales, más controlable, y por lo tanto se corresponde mejor con las exigencias de Galileo al momento de considerar las características adecuadas de un correcto método experimental. Por último, una visión semejante de este aspecto del pensamiento del pisano constituye un elemento de interés para el debate historiográfico acerca de la relación entre Galileo y la experimentación.

6. Bibliografía

Arquímedes. (2009). *Tratados. vol. II*. (trad. Ortiz García, Paloma). Madrid: Gredos.

Batchelor, G. K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Beltrán, A. (1998). Wine, Water, and Epistemological Sobriety: A Note on the Koyré-MacLachlan Debate. *Isis* (89), 82-89.

Boido, G. (1996). *Noticias del planeta Tierra; Galileo Galilei y la revolución científica.* Buenos Aires: AZ editora.

Carman, C., & Di Cocco, M. (2016). *The moon phase anomaly in the Antikythera Mechanism.* Recuperado el 14 de diciembre de 2016, de sitio web de la New York University: http://dlib.nyu.edu/awdl/isaw/isaw-papers/11/

Carman, C., & Evans, J. (2014). On the epoch of the Antikythera mechanism and its eclipse predictor. *Archive for History of Exact Sciences, 64* (6), 693-774.

Cicerón, M. T. (2005). *Disputaciones tusculanas.* (A. Medina Gonzalez, Trad.) Madrid: Gredos.

Drake, S., & MacLachlan, J. (1975). Galileo´s Discovery of the Parabolic Trajectory. *Scientific American* (232), 102-110.

Encyclopaedia Brittannica. (s.f.). *Encyclopaedia Brittanica Online*. Recuperado el 8 de diciembre de 2016, de https://www.britannica.com/science/amphora-measurement

Freeth, T. (2014). *Eclipse Prediction on the Ancient Greek Astronomical Calculating Machine Known as the Antikythera Mechanism*. Recuperado el 14 de diciembre de 2016, de Plos One: http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0103275

Galilei, G. (1890). *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestra il Re ´Italia.* Firenze: G. Barbera.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes, edited in Modern Notation with Introductory Chapters.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heilbron, J. (2010). *Galileo.* Oxford: Oxford University Press.

Koyré, A. (1980). *Estudios galileanos.* Madrid: Siglo XXI.

Libri, G. (1840). *Histoire des sciences mathématiques en Italie: depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du 17e siècle* (Vol. 3). Paris: J. Renouard & cie.

MacLachlan, J. (1973). A Test of an "Imaginary" Experiment of Galileo's. *Isis, 64* (3), 374-379.

Roche, J. J. (1998). *The Mathematics of Measurement: a Critical History.* Londres: The Athlone Press/Springer.

Rogers, K. (Ed.). (2011). *The Eye: the Physiology of Human Perception.* New York: Britannica Educational Publishing.

Settle, T. (1961). An Experiment in the History of Science. *Science* (133), 19-23.

Smith, E. A. (1978). *Working in Precious Metals.* London: NAG Press.

Vitruvio. (1914). *The Ten Books on Architecture.* (M. H. Morgan, Trad.) Cambridge, US: Harvard University Press.

Yanoff, M., & Duker, J. S. (2009). *Ophtalmology.* China: Mosby/Elsevier.